

ANÁLISE MATEMÁTICA IV – LEEC

FICHA 3 – SÉRIES, SINGULARIDADES, RESÍDUOS E PRIMEIRAS EDO'S

para entregar até à aula teórica de **6ª feira, 4 de Abril**

- (1) Calcule as séries de Maclaurin (i.e., séries de Taylor em torno de $z_0 = 0$) das seguintes funções e indique os respectivos raios de convergência:

(a) $z^4 \cosh z^2$;

(b) $\frac{4}{z^2(z^2-4)}$;

(c) $\frac{1}{(2-z)^2} + (z+1)^2$.

Qual é a décima derivada de $z^4 \cosh z^2$ na origem?

- (2) Determine as séries de Laurent válidas nas regiões indicadas:

(a) $e^{\frac{z}{z+1}}$ na coroa circular $0 < |z+1| < +\infty$;

(b) $e^{\frac{z}{z+1}}$ no disco $|z-1| < 2$;

(c) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ na coroa circular $0 < |z-2| < 1$.

Classifique as singularidades destas funções e indique os respectivos resíduos.

- (3) Aplique o teorema dos resíduos para calcular os seguintes integrais:

(a) $\int_{\gamma} \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} dz$, onde γ é a curva parametrizada por $2 \cos t + i \sin t, t \in [0, 2\pi]$;

(b) $\int_{|z|=2} \frac{1+z}{1-\sin z} dz$, onde a circunferência é percorrida no sentido negativo .

- (4) Seja f a função definida por $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+9}$.

- (a) Utilize o teorema dos resíduos para calcular $\oint_{\gamma_R} f(z) dz$, onde γ_R é a curva fechada simples dada pela fronteira do semi-círculo,

$$D_R = \{z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\} ,$$

de raio $R > 3$, percorrida no sentido positivo.

- (b) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+9} dz \right| \leq \frac{R\pi}{R^2-9} ,$$

onde Γ_R é a semi-circunferência $\{z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$ contida em γ_R .

- (c) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+9} dx .$$

- (5) Determine as soluções gerais das seguintes equações diferenciais:

(a) $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$;

(b) $\frac{dy}{dt} + e^t y = 0$.