Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Última actualização: 16/Out/2003

ÁLGEBRA LINEAR A

TESTE 1 PARA PRATICAR – OUTUBRO DE 2003

RESOLUÇÃO

(As soluções aqui propostas não são únicas!)

Duração: 50 minutos

Instruções

- **Não abra este caderno** de teste antes de ser anunciado o início da prova.
- Preencha os seus dados na parte de baixo desta folha.
- Cada um dos quatro problemas vale 5 pontos. A cotação do problema (4) é igualmente repartida pelas suas alíneas.
- Apresente e justifique todos os cálculos.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de máquinas calculadoras. É permitida a utilização de papel de rascunho.
- **A revisão de provas** é na 5ª feira, 30 de Outubro, 17h-18h, na sala de dúvidas.
- Boa sorte!

Para a correcção

pergunta	classificação
(1)	
(2)	
(3)	
(4)(a)	
(4)(b)	
(4)(c)	
(4)(d)	
(4)(e)	
total	

Nº:

Curso: ____________

Nome: ____

(1) Determine a solução geral do sistema

$$\begin{cases} x_1 & & -x_3 & +x_4 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Resolução: *Pelo método de eliminação de Gauss, usando notação matricial,*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & 2 & -2 & 3 \\ & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & 2 & -2 & 3 \\ & & 1 & 3 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ & 1 & 0 & -8 & 9 \\ & & 1 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

Portanto, a solução do sistema é (em notação vectorial)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

ou (em termos de variáveis)

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 4x_4 \\ x_2 = 9 + 8x_4 \\ x_3 = -3 - 3x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

□

(2) Inverta a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolução: *Aplicando o método de eliminação de Gauss:*

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} & & & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & & 1 & & \\ 4 & 1 & 2 & 3 & & & 1 & \\ 1 & & & & & & & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & & & 1 & \\ & & 1 & & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & & & \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & 1 \\ & 1 & & & -3 & -2 & 1 & -4 \\ & & 1 & & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & & & \end{array}\right]$$

onde as entradas omitidas são zero. Conclui-se que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

(3) Para que escolhas dos parâmetros a e b é que a seguinte transformação linear é invertível?

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 , \qquad T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + az \\ -x - y + bz \\ -ax - by + z \end{bmatrix}$$

Resolução: *A transformação T é representada pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & -1 & b \\ -a & -b & 1 \end{bmatrix} .$$

Pelo método de Gauss,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & & \\ -1 & -1 & b & & 1 & \\ -a & -b & 1 & & & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & & \\ & & a+b & 1 & 1 & \\ & a-b & a^2 & a & & 1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & a & 1 & & \\ & a-b & a^2 & a & & 1 \\ & & a+b & 1 & 1 & \end{array}\right]$$

vê-se que A é invertível se e só se $a + b \neq 0$ e $a - b \neq 0$ (para que haja três pivots). Como T é invertível exactamente quando A é invertível, conclui-se que tem que ser $a \neq \pm b$. $\square$

(4) Indique, justificadamente (com breves argumentos ou contra-exemplos), se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. *Não é atribuída qualquer cotação ao simples assinalar do correcto valor lógico da afirmação.*

(a) Um sistema de quatro equações a três incógnitas é sempre impossível.

Verdadeira ☐ Falsa ☒

Resolução: *Por exemplo, o seguinte sistema de quatro equações a três incógnitas é possível.*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$\square$

(b) Se A não é a matriz nula e é da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, então A é invertível.

Verdadeira ☒ Falsa ☐

Resolução: *Uma matriz 2×2 da forma* $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ *é invertível se e só se* $a^2+b^2 \neq 0$, *ou seja, se e só se* $(a,b) \neq (0,0)$, *ou seja, se e só se não é a matriz nula.* $\square$

(c) A matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ representa uma rotação.

Verdadeira ☐ Falsa ☒

Resolução: *Uma rotação é representada por uma matriz da forma* $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$*, onde cada coluna é um vector de comprimento* $\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$. *Como* $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \neq 1$, *a matriz dada não pode representar uma rotação.* $\square$

(d) O núcleo de uma transformação linear invertível consiste apenas no vector nulo.

Verdadeira ☒ Falsa ☐

Resolução:
T *é invertível* $\implies$ T *é injectiva* $\iff$ $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. $\square$

(e) Há uma matriz invertível 10×10 com 92 entradas iguais a 1.

Verdadeira ☐ Falsa ☒

Resolução: *Havendo apenas 8 entradas diferentes de 1, terão que ser pelo menos duas linhas iguais a* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$*, logo a forma escalonada terá no máximo 9 líderes, pelo que nunca poderá ser a identidade.* $\square$