Lógica Matemática

Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa:
António St. Aubyn, Maria Carlos Figueiredo,
Luís de Loura, Luísa Ribeiro, Francisco Viegas

Lisboa, Março de 2004

O documento presente foi obtido directamente do código TeX fornecido pelos autores com alterações de formatação. A versão corrente é de 27 de Setembro de 2005. A revisão deste texto do ponto de vista gráfico ainda não está completa. Novas versões poderão ficar disponíveis no futuro a partir de http://preprint.math.ist.utl.pt/files/ppgmutlconjuntos.pdf. O DMIST agradece ao Grupo de Matemática da UTL a possibilidade de facultar o texto aos alunos das disciplinas introdutórias de Matemática do IST.

Conteúdo

LÓGICA MATEMÁTICA

1 Introdução

A Matemática, tal como toda a ciência, usa a linguagem corrente para se exprimir. Quando dizemos, por exemplo, "dois é um número natural par", estamos a utilizar a língua portuguesa para construir uma frase que traduz uma propriedade sobre certos entes matemáticos. Claro que esta frase poderia ter sido dita noutra língua: por exemplo chinês, dinamarquês, francês, inglês, ou qualquer outra. Neste aspecto existe uma semelhança entre a frase "2 é um número natural par", referente a entes matemáticos, e a frase "O Figo é um jogador de futebol extraordinário", referente a um desporto bastante popular na época em que vivemos. Há no entanto uma diferença fundamental entre estas duas frases e é para ela que nos interessa chamar a atenção.

Suponhamos que, num café da Praça de Londres (em Lisboa), enquanto se deliciam respectivamente com uma "italiana" e com uma "bica pingada", o Zeferino e a Zenóbia (amigos de longa data) começam a discutir futebol. No calor da discussão diz a Zenóbia, enlevada, "O Figo é um jogador de futebol extraordinário". O Zeferino, mais pelo prazer da contradição do que por convicção, replica imediatamente "Que disparate! O Figo é um bom jogador, mas nada que se pareça com um jogador extraordinário. O Eusébio, ou o Matateu, isso sim... eram jogadores extraordinários! O Figo é um bom jogador!" Não vale a pena relatarmos a continuação da discussão, nem como a "italiana" se foi esparramar no nariz da Zenóbia e a "bica pingada" no olho esquerdo do Zeferino. Queremos é chamar a atenção para o facto de uma discussão deste tipo ser impensável a partir da frase "dois é um número natural par"; e não é porque a Zenóbia (aluna do curso de Matemática Aplicada e Computação do Instituto Superior Técnico) e o Zeferino (aluno do curso de Física Tecnológica do Instituto Superior Técnico) se desinteressem por questões matemáticas, mas sim porque a frase "dois é um número natural par" é, sem margem para discussão, verdadeira. Isto porque sabemos definir exactamente o que são os números naturais pares e sabemos verificar se o número dois obedece ou não àquela definição. O problema com a frase "O Figo é um jogador de futebol extraordinário" é não sabermos definir exactamente o que se entende por um "jogador de futebol extraordinário". Decidir se alguém é ou não jogador de futebol, ainda vá; agora atribuir-lhe o epíteto de extraordinário, isso varia de pessoa para pessoa.

Com o exemplo destas duas frases pretendemos fazer sentir no leitor a necessidade de um muito maior rigor na linguagem matemática, em comparação com o da linguagem corrente. É isto que nos leva a reflectir um pouco mais sobre a linguagem matemática, estudando os princípios da chamada Lógica Matemática.

As frases que construímos, tanto na linguagem matemática como na linguagem corrente, envolvem certos entes, cada um dos quais é designado por um símbolo (a que, neste caso, chamamos designação) conveniente. Na frase "dois é um número natural par" aparecem os entes cujas designações são respectivamente "dois", "número natural" e "número natural par". Na frase "O Figo é um jogador de futebol extraordinário" temos os entes designados respectivamente por "Figo", "jogador de futebol" e "jogador de futebol extraordinário". Não devemos confundir o ente com a sua designação, até porque um mesmo ente pode ter várias designações diferentes; por exemplo "dois", "2" e "$\sqrt{4}$" são três designações distintas para o mesmo ente.

As frases, ou proposições, fazem intervir vários entes; por exemplo, na proposição "4 é múltiplo de 2", aparecem os entes designados respectivamente por "4" e por "múltiplo de 2". Claro que não podemos confundir as designações com as proposições; por exemplo

$$\pi, \qquad \left(3+\sqrt{2}\right)^2, \qquad \text{Lisboa}$$

são designações, enquanto

$$\pi \text{ é um número irracional}, \qquad \text{Lisboa é a capital de Portugal}$$

são proposições.

Uma proposição pode ser verdadeira ou falsa. Por exemplo a proposição "Lisboa é a capital de Portugal" é verdadeira, enquanto a proposição "Paris é a capital de Portugal" é falsa. Dizemos por isso que a proposição "Lisboa é a capital de Portugal" tem o valor lógico V (verdade) e que a proposição "Paris é a capital de Portugal" tem o valor lógico F (falso). Num primeiro estudo da Lógica Matemática admitiremos que, em cada teoria, toda a proposição tem um e um único dos dois valores lógicos referidos V e F. De facto esta ideia terá de ser abandonada mais tarde, visto existirem teorias com interesse matemático onde há proposições que não são verdadeiras nem falsas (são as chamadas proposições indecidíveis). De momento não nos preocupemos com esse facto e admitamos que toda a proposição ou é verdadeira ou é falsa e nunca é as duas coisas em simultâneo.

Usualmente representaremos as proposições por letras minúsculas p, q, r, etc. e os seus valores lógicos por V (verdade) e F (falso). Também, em certas situações, usaremos a notação V para designar uma proposição verdadeira e a notação F para designar uma proposição falsa.

2 Igualdade, equivalência.

Já sabemos que a linguagem matemática (tal como a linguagem corrente) é construída a partir de designações e proposições; sabemos também a distinção existente entre esses dois conceitos. Recordamos que um determinado ente pode ser designado através de muitas designações distintas; por exemplo "Paris" e "capital da França" são duas designações distintas para o mesmo ente.

Vamos ver que há dois processos muito simples de construir uma proposição a partir de duas designações. Consideremos as designações "Lisboa" e "capital da França". Podemos construir uma proposição onde intervenham apenas estas duas designações, por exemplo, "Lisboa é a capital da França"; trata-se de uma proposição falsa. Com as mesmas duas designações também poderíamos ter construído uma proposição verdadeira: "Lisboa não é a capital da França". Na proposição "Lisboa é a capital da França" estamos a afirmar que as duas designações "Lisboa" e "capital da França" designam o mesmo ente, o que aliás sabemos ser falso. Já na proposição "Lisboa não é a capital da França" afirmamos que as designações "Lisboa" e "capital da França" designam entes distintos.

Dadas duas designações, digamos a e b, há então dois processos muito simples de construir uma proposição. O primeiro é dizer que as designações a e b designam o mesmo ente; nesse caso escreveremos o sinal de igualdade "=" entre as duas designações:

$$a = b.$$

O segundo é dizer que as designações a e b designam entes distintos; escreveremos então o sinal de desigualdade "≠" entre as duas designações:

$$a \neq b.$$

Claro que o valor lógico de cada uma das proposições "$a = b$" e "$a \neq b$" depende das designações a e b. Por exemplo, ao escrevermos

$$\text{Lisboa} \; = \; \text{Capital da França}$$

construímos uma proposição falsa; mas as proposições

$$\text{Lisboa} \; \neq \; \text{Capital da Dinamarca}$$

$$\text{Lisboa} = \text{Capital de Portugal}$$

são verdadeiras. Dando agora exemplos com designações de entes matemáticos, são verdadeiras as proposições

$$2 = \sqrt{4}, \qquad 2 \neq \sqrt{9}, \qquad -2 \neq \sqrt{4}, \qquad 3 \times 4 = 12$$

e falsas as proposições

$$(3+2)^2 = 3^2 + 2^2, \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}.$$

Acabámos de ver que um processo para construir proposições é escrever um dos sinais = ou ≠ entre duas designações. Um outro processo semelhante é escrever o sinal de equivalência ⇔ entre duas proposições. Dadas duas proposições, digamos p e q, podemos construir uma nova proposição

$$p \Leftrightarrow q,$$

que se lê "p equivalente a q", e que é verdadeira sse p e q tiverem o mesmo valor lógico (ambas verdadeiras ou ambas falsas) e falsa sse p e q tiverem valores lógicos diferentes (uma for verdadeira e a outra for falsa). Assim, por exemplo, a proposição

$$\text{Lisboa é uma cidade} \Leftrightarrow \text{Londres é uma vila}$$

é falsa, visto a proposição "Lisboa é uma cidade" ser verdadeira e a proposição "Londres é uma vila" ser falsa. Já a proposição

$$\text{Luís Figo é um astronauta} \Leftrightarrow \text{dois é um número irracional}$$

é verdadeira, visto as proposições "Luís Figo é um astronauta" e "dois é um número irracional" serem ambas falsas.

Uma forma visual bastante útil de exprimir o valor lógico da proposição $p \Leftrightarrow q$ como função dos valores lógicos de p e de q é a utilização das chamadas tabelas de verdade

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Na primeira coluna da tabela anterior estão os valores lógicos de p, na segunda coluna os valores lógicos de q e na coluna da direita os valores lógicos de $p \Leftrightarrow q$. É óbvio que, nas duas primeiras colunas, teremos de ter todas as combinações possíveis de valores lógicos das proposições p e q.

Claro que, à semelhança dos sinais $=$ e $\neq$ utilizados entre designações por forma a construir proposições, poderemos arranjar um sinal para exprimir a não equivalência de duas proposições; esse sinal será $\not\Leftrightarrow$. A proposição

$$p \not\Leftrightarrow q$$

será verdadeira sse os valores lógicos de p e de q forem distintos e falsa sse forem iguais. Em termos de tabela de verdade, teremos

p	q	$p \not\Leftrightarrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Por exemplo

$$2 = \sqrt{4} \quad \not\Leftrightarrow \quad 3 + 4 = 7$$

é uma proposição falsa, visto as proposições "$2 = \sqrt{4}$" e "$3 + 4 = 7$" serem ambas verdadeiras. Já a proposição

$$2 = \sqrt{4} \quad \not\Leftrightarrow \quad \text{Luís Figo é um astronauta}$$

é verdadeira, porque as proposições "$2 = \sqrt{4}$" e "Luís Figo é um astronauta" têm valores lógicos distintos: "$2 = \sqrt{4}$" é verdadeira, enquanto "Luís Figo é um astronauta" é falsa.

Não confundamos os sinais "$=$" e "$\Leftrightarrow$"; o primeiro utiliza-se entre duas designações, formando uma proposição que é verdadeira sse essas designações designarem o mesmo ente; o segundo utiliza-se entre duas proposições, para construir uma nova proposição que é verdadeira sse aquelas duas proposições tiverem o mesmo valor lógico. Assim, tem sentido escrever

$$\text{Lisboa} = \text{Capital de Portugal}$$

ou

$$\text{Paris} = \text{Capital de Portugal.}$$

A primeira destas proposições é verdadeira e a segundo é falsa. Mas

$$\text{Lisboa} \Leftrightarrow \text{Capital de Portugal}$$

é desprovido de qualquer sentido porque entre designações não temos o direito de escrever o sinal de equivalência $\Leftrightarrow$. Também tem sentido escrever

$$2 - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 = 3$$

que é uma proposição verdadeira, ou

$$3^2 = (-3)^2 \;\Leftrightarrow\; 3 = -3$$

que é uma proposição falsa. Mas não tem sentido escrever

$$2 \;\Leftrightarrow\; 1 + 1$$

porque 2 e 1+1 são designações e o sinal de equivalência não se pode situar entre designações, devendo situar-se entre proposições.

3 Conjunção

A partir de proposições simples podemos construir proposições mais complexas. Por exemplo, com as duas proposições "Lisboa é uma cidade" e "Lisboa é a capital de Portugal", podemos construir a proposição "Lisboa é uma cidade e é a capital de Portugal". Do ponto de vista gramatical, agrupámos as duas primeiras proposições numa só, usando a conjunção coordenada copulativa "e". Do ponto de vista da Lógica Matemática interessa-nos relacionar o valor lógico da proposição assim construída com os valores lógicos de cada uma das proposições elementares. Se designarmos por p a proposição "Lisboa é uma cidade" e por q a proposição "Lisboa é a capital de Portugal", interessa-nos conseguir determinar o valor lógico da proposição "p e q", desde que sejam conhecidos os valores lógicos das proposições "p" e "q". Claro que podemos agrupar duas proposições de outras formas; por exemplo poderíamos ter usado a conjunção coordenada disjuntiva "ou" em vez da conjunção coordenada copulativa "e", o que originaria "Lisboa é uma cidade ou é a capital de Portugal". No seguimento iremos usar o processo acabado de descrever para construir proposições cada vez mais complexas. O que nos interessará neste momento não é tanto o valor semântico das proposições (aquilo que elas querem dizer), mas sim a forma como se relacionam os seus valores lógicos.

Consideremos as duas proposições seguintes: "$4 > 2$" e "4 é um número natural". Partindo destas duas proposições podemos ser levados a construir a proposição "$4 > 2$ e 4 é um número natural". Esta ultima proposição foi obtida ligando as duas proposições iniciais por intermédio da conjunção coordenada copulativa "e". No caso geral, podemos pensar em duas proposições quaisquer p e q e construir uma nova proposição, a que chamaremos a conjunção de p com q, que designaremos por $p \wedge q$, e que leremos "p e q". A questão que se põe é: conhecidos os valores lógicos de p e de q, qual o valor lógico de $p \wedge q$? Pois bem, o valor lógico de $p \wedge q$ é definido através da seguinte tabela de verdade:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Vemos assim que, por definição, $p \wedge q$ é verdadeira sse tanto p como q forem verdadeiras. Repare-se que esta definição está de acordo com o sentido usual que damos à conjunção coordenada copulativa "e". Repare-se também que $p \wedge q$ é falsa sse pelo menos uma das proposições p ou q for falsa. Assim, são verdadeiras as seguintes proposições:

$$2 > 1 \ \wedge \ 3 > 1,$$
$$\text{Lisboa é a capital de Portugal} \ \wedge \ \text{Paris é a capital da França},$$
$$\text{Luís Figo é jogador de futebol} \ \wedge \ (3+2)^2 = 3^2 + 12 + 2^2.$$

São falsas as proposições seguintes:

$$\text{Luís Figo é jogador de futebol} \ \wedge \ (3+2)^2 = 3^2 + 12,$$
$$\text{Lisboa é a capital da França} \ \wedge \ 2 \neq 3$$
$$\text{Lisboa é a capital da França} \ \wedge \ \text{Luís Figo é um astronauta}.$$

A conjunção de proposições permite-nos abreviar certas expressões contendo o símbolo de igualdade ou o símbolo de equivalência. Suponhamos que a, b e c são três designações quaisquer; é usual, na escrita matemática, abreviar a proposição "$a = b \ \wedge \ b = c$" da forma seguinte:

$$a = b = c.$$

Esta notação, que significa que as designações a, b e c designam todas o mesmo ente, foi já largamente usada durante o ensino secundário, por exemplo ao escrever

$$(7+9)^2 = 7^2 + 126 + 9^2 = 256.$$

Significado óbvio têm as expressões em que o sinal de igualdade aparece mais do que duas vezes, por exemplo

$$(7+9)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 9 + 9^2 = 49 + 2 \times 63 + 81 = 49 + 126 + 81 = 256.$$

Situação análoga se passa com o sinal de equivalência. Sejam p, q e r três proposições quaisquer; abreviaremos a proposição $(p \Leftrightarrow q) \ \wedge \ (q \Leftrightarrow r)$ para

$$p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r.$$

Claro que $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$ é verdadeira sse os valores lógicos de p, q e r forem idênticos (p, q e r todas falsas ou p, q e r todas verdadeiras). Também esta notação era largamente usada no ensino secundário; por exemplo, são verdadeiras as proposições

$$3 > 2 \ \Leftrightarrow \ 3 \geq 2 \ \Leftrightarrow \ 3 > 1,$$
$$3 = 2 \ \Leftrightarrow \ 3 \leq 2 \ \Leftrightarrow \ 3 = 1.$$

Uma vez introduzida a operação de conjunção de duas proposições é natural estudar algumas propriedades desta operação. Por exemplo, haverá alguma relação entre os valores lógicos de $p \wedge q$ e de $q \wedge p$? A resposta é muito simples e decorre da tabela de verdade para a conjunção: $p \wedge q$ é verdadeira sse tanto p como q forem ambas verdadeiras; $q \wedge p$ é verdadeira sse tanto q como p forem ambas verdadeiras; logo $p \wedge q$ e $q \wedge p$ têm o mesmo valor lógico. Significa isto que a proposição

$$p \wedge q \ \Leftrightarrow \ q \wedge p \tag{1}$$

é verdadeira. Dizemos por isso que a conjunção de proposições é comutativa.

Sejam agora p, q e r três proposições quaisquer; consideremos as duas proposições seguintes:

$$(p \wedge q) \wedge r,$$
$$p \wedge (q \wedge r).$$

Haverá alguma relação entre os valores lógicos destas duas proposições? É fácil ver que sim. De facto $(p \wedge q) \wedge r$ é a conjunção de $p \wedge q$ com r e é verdadeira sse tanto $p \wedge q$ como r forem verdadeiras, ou ainda, tendo em conta que $p \wedge q$ é a conjunção de p com q, sse p, q e r forem todas verdadeiras. Um raciocínio análogo mostra-nos que $p \wedge (q \wedge r)$ também é verdadeira sse p, q e r forem todas verdadeiras. Então as proposições $(p \wedge q) \wedge r$ e $p \wedge (q \wedge r)$ são equivalentes; significa isto que a proposição

$$(p \wedge q) \wedge r \ \Leftrightarrow \ p \wedge (q \wedge r) \tag{2}$$

é verdadeira. Dizemos por isso que a conjunção de proposições é associativa. Uma outra maneira de mostrar a fórmula (2) é construir as tabelas de verdade para as proposições $(p \wedge q) \wedge r$ e $p \wedge (q \wedge r)$:

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Repare-se que, por haver inicialmente três proposições, é necessário considerar as 8 combinações possíveis para os valores lógicos destas três proposições; daí a tabela ter oito linhas de valores lógicos. Nas três primeiras colunas escrevemos os valores lógicos das três proposições iniciais p, q e r; nas colunas 4 e 5 escrevemos as proposições intermediárias que nos permitem chegar às duas proposições que queremos estudar e que se encontram nas colunas 6 e 7. Como as colunas 6 e 7 têm exactamente os mesmos valores lógicos, concluímos que as proposições $(p \wedge q) \wedge r$ e $p \wedge (q \wedge r)$ são equivalentes. Repare-se que a coluna 4 só depende da 1 e da 2; a coluna 5 só depende da 2 e da 3; a coluna 6 é construída a partir da 4 e da 3; finalmente a coluna 7 obtém-se a partir da 1 e da 5.

A associatividade da conjunção permite-nos escrever expressões do tipo $p \wedge q \wedge r$; de facto uma expressão destas poderá ser lida como $(p \wedge q) \wedge r$ ou como $p \wedge (q \wedge r)$ mas, como estas duas últimas proposições são equivalentes, é irrelevante a forma como se lê a proposição inicial $p \wedge q \wedge r$. O importante é perceber que $p \wedge q \wedge r$ é verdadeira sse cada uma das proposições p, q e r for verdadeira e é falsa em todos os outros casos (ou seja, se pelo menos uma das proposições p, q e r for falsa).

Consideremos agora a conjunção das proposições p e q, supondo que q é verdadeira. Então, se p for verdadeira, $p \wedge q$ também é verdadeira; se p for falsa, $p \wedge q$ é falsa. Em qualquer dos casos (p verdadeira ou p falsa) o valor lógico de $p \wedge q$ é igual ao valor lógico de p. Podemos então afirmar que

$$p \wedge V \;\Leftrightarrow\; V \wedge p \;\Leftrightarrow\; p \tag{3}$$

onde, como já convencionámos anteriormente, V representa uma qualquer proposição verdadeira. Devido à fórmula (3), dizemos que V é o elemento neutro da conjunção.

Suponhamos agora que, na conjunção das proposições p com q, a proposição q é falsa. Então, independentemente do valor lógico de p, $p \wedge q$ é falsa. Podemos então escrever

$$p \wedge F \;\Leftrightarrow\; F \wedge p \;\Leftrightarrow\; F \tag{4}$$

onde, como convencionado, F representa uma qualquer proposição falsa. Tendo em conta a fórmula (4), dizemos que F é o elemento absorvente da conjunção.

4 Disjunção

Na secção anterior estudámos a conjunção de duas proposições que corresponde, na linguagem corrente, à utilização da conjunção coordenada copulativa "e". Nesta secção vamos estudar a chamada disjunção de proposições, correspondente, na linguagem corrente, ao uso da conjunção coordenada disjuntiva "ou". Consideremos a seguinte frase: "O João Caramelo e Silva foi ontem ao cinema ou ao teatro". Esta frase é construída a partir das frases "O João Caramelo e Silva foi ontem ao cinema" e "O João Caramelo e Silva foi ontem ao teatro", ligadas através da conjunção "ou". Ninguém tem dúvidas de que a frase "O João Caramelo e Silva foi ontem ao cinema ou ao teatro" é falsa se ambas as frases "O João Caramelo e Silva foi ontem ao cinema" e "O João Caramelo e Silva foi ontem ao teatro" o forem. Por outro lado, se o João Caramelo e Silva tiver ido ao teatro e não tiver ido ao cinema, ou ainda se tiver ido ao cinema sem ir ao teatro, a frase "O João Caramelo e Silva foi ontem ao cinema ou ao teatro" é obviamente verdadeira. Quer dizer que, na linguagem corrente, ao ligarmos duas frases com a conjunção "ou" obtemos uma frase falsa se aquelas duas forem falsas e uma frase verdadeira se uma daquelas for falsa e a outra verdadeira. E o que se passará se ambas forem verdadeiras? Supondo que o João Caramelo e Silva foi ontem ao teatro e também foi ontem ao cinema, será a frase "O João Caramelo e Silva foi ontem ao cinema ou ao teatro" verdadeira ou falsa? A linguagem comum não é muito explícita quanto a este facto. Claro que, em linguagem matemática, teremos de ser absolutamente rigorosos e, por definição, diremos que esta frase ainda é verdadeira.

De acordo com a introdução feita no parágrafo precedente, sejam p e q duas proposições quaisquer; a partir delas podemos construir uma nova proposição, designada por $p \vee q$ (leia-se "p ou q"), a que chamaremos disjunção de p com q, e cujo valor lógico é definido pela seguinte tabela de valores lógicos:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Vemos assim que, por definição, $p \vee q$ só é falsa se tanto p como q forem falsas. Repare-se que $p \vee q$ é verdadeira sse pelo menos uma das proposições p ou q for verdadeira. Assim, são verdadeiras as seguintes proposições:

$$2 > 1 \ \vee \ 3 < 1,$$
$$\text{Lisboa é a capital do Daomé} \ \vee \ \text{Paris é a capital da França},$$
$$\text{Luís Figo é jogador de futebol} \ \vee \ \sqrt{9} = 3.$$

São falsas as proposições seguintes:

$$\text{Luís Figo é professor de Análise Matemática} \ \vee \ \sqrt{9} = 9,$$
$$\text{Lisboa é a capital da França} \ \vee \ 2 = 3.$$

São agora muito fáceis de provar as seguintes propriedades da operação de disjunção de proposições

$$p \vee q \ \Leftrightarrow \ q \vee p \tag{5}$$
$$(p \vee q) \vee r \ \Leftrightarrow \ p \vee (q \vee r) \tag{6}$$
$$p \vee F \ \Leftrightarrow \ F \vee p \ \Leftrightarrow \ p \tag{7}$$
$$p \vee V \ \Leftrightarrow \ V \vee p \ \Leftrightarrow \ V \tag{8}$$

onde p, q e r são três proposições quaisquer, V é uma proposição verdadeira qualquer e F é uma proposição falsa qualquer. Repare-se na analogia entre as propriedades (1), (2), (3) e (4) referentes à conjunção e as propriedades (5), (6), (7) e (8) referentes à disjunção. Por (5) vemos que a disjunção é comutativa, por (6) que é associativa, por (7) que F é o elemento neutro da disjunção e por (8) que V é o seu elemento absorvente. A associatividade da disjunção permite-nos escrever expressões do tipo $p \vee q \vee r$; esta proposição é falsa sse cada uma das proposições p, q e r for falsa e verdadeira sse pelo menos uma das proposições p, q e r for verdadeira.

As demonstrações das propriedades (5), (6), (7) e (8) são semelhantes às que fizemos no caso da conjunção. A comutatividade (5) resulta imediatamente da tabela de verdade da disjunção. A associatividade (6) decorre da seguinte tabela de valores lógicos:

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

As propriedades (7) e (8) são também uma consequência imediata da tabela de verdade da disjunção.

Introduzimos duas operações sobre proposições: a conjunção e a disjunção. Estudámos as propriedades da conjunção, que se traduzem nas fórmulas (1), (2), (3) e (4); estudámos as propriedades da disjunção, expressas por (5), (6), (7) e (8). É natural agora estudar propriedades que envolvam simultaneamente as duas operações de conjunção e de disjunção. Comecemos por mostrar que a propriedade

$$(p \vee q) \wedge r \;\Leftrightarrow\; (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \tag{9}$$

é verdadeira, quaisquer que sejam as proposições p, q e r. A forma mais prática de o fazer, é construir uma tabela de valores lógicos:

p	q	r	$p \vee q$	$p \wedge r$	$q \wedge r$	$(p \vee q) \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Uma outra propriedade que também envolve a conjunção e a disjunção, e que também se demonstra muito facilmente através da construção de uma tabela de valores lógicos apropriada, é

$$(p \wedge q) \vee r \;\Leftrightarrow\; (p \vee r) \wedge (q \vee r) \tag{10}$$

Aconselhamos vivamente o leitor a construir a tabela de valores lógicos, antes de olhar para a que apresentamos:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee r$	$q \vee r$	$(p \wedge q) \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	F

A propriedade (9) é a chamada distributividade da conjunção em relação à disjunção; a propriedade (10) é a distributividade da disjunção em relação à conjunção.

5 Negação

Dada uma proposição, por exemplo "O carro é verde", todos sabemos, na linguagem corrente, negá-la; no exemplo considerado seria "O carro não é verde". Se a proposição "O carro é verde" for verdadeira, então "O carro não é verde" é falsa; se "O carro é verde" for falsa, então "O carro não é verde" é verdadeira.

Somos então levados a introduzir, na nossa linguagem matemática, a chamada operação de negação. Seja p uma proposição qualquer; chamaremos negação de p a uma nova proposição, designada por $\sim p$ (leia-se "não p"), cujo valor lógico é diferente do de p. Assim, se p for verdadeira, $\sim p$ é falsa; se p for falsa, $\sim p$ é verdadeira. A tabela do valor lógico da negação é portanto muito simples:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Por exemplo, são verdadeiras as proposições

$$\sim 2 < 1, \qquad \sim (2+3)^2 = 2^2 + 3^2, \qquad \sim 5^2 5^3 = 5^6,$$

são falsas as proposições

$$\sim 4^2 = 16, \qquad \sim \sqrt[3]{-27} = -3, \qquad \sim \left(5^2\right)^3 = 5^6.$$

Voltemos a um diálogo de café... "O nosso Governo não é bom" afirma, convicto, o Antero Gatinho, da oposição, sorvendo lentamente a sua "bica pingada"; "Não é verdade que o nosso Governo não seja bom" riposta, pressurosa, a Manuela Ferrada Lamas (afecta ao partido do Governo) entre dois golos da sua "italiana". Não narrarei, por pudor, a continuação da história (nem o destino final da "bica pingada" e da "italiana"), mas gostaria de chamar a atenção para a frase da Manuela Ferrada Lamas; consiste ela na negação da frase do Antero Gatinho, frase essa que, por sua vez, era a negação de "O nosso Governo é bom". Vemos assim que, na linguagem corrente (mesmo em situações menos dramáticas do que a descrita) utilizamos por vezes a negação de uma negação. Em termos matemáticos, e sendo p uma proposição qualquer, a negação da negação de p escreve-se

$$\sim (\sim p).$$

Qual o valor lógico desta proposição? É muito fácil determiná-lo: $\sim p$ tem valor lógico contrário a p, $\sim (\sim p)$ tem valor lógico contrário a $\sim p$, logo $\sim (\sim p)$ e p têm o mesmo valor lógico. Podemos portanto afirmar que

$$\sim (\sim p) \;\Leftrightarrow\; p \tag{11}$$

Claro que a propriedade (11) poderia ter sido deduzida de uma tabela de verdade conveniente:

p	$\sim p$	$\sim (\sim p)$
V	F	V
F	V	F

A propriedade (11) pode ser generalizada para mais do que duas negações. Tem-se, por exemplo,

$$\begin{aligned} \sim (\sim (\sim p)) \;&\Leftrightarrow \sim p, \\ \sim (\sim (\sim (\sim p))) \;&\Leftrightarrow\; p. \end{aligned}$$

Podemos agora pensar nas propriedades que ligam a negação com as operações já estudadas. Da análise das tabelas de verdade para a equivalência ($\Leftrightarrow$) e para a não equivalência ($\not\Leftrightarrow$) é imediato ver que a negação de uma equivalência é uma não equivalência e vice-versa. Por outras palavras, quaisquer que sejam as proposições p e q, são verdadeiras as proposições seguintes:

$$(\sim (p \Leftrightarrow q)) \;\Leftrightarrow\; (p \not\Leftrightarrow q) \tag{12}$$

$$(\sim (p \not\Leftrightarrow q)) \;\Leftrightarrow\; (p \Leftrightarrow q) \tag{13}$$

Algo de análogo se passa com os símbolos de igualdade (=) e de desigualdade (≠); assim, sendo a e b dois entes quaisquer, são verdadeiras as seguintes proposições:

$$(\sim a = b) \ \Leftrightarrow \ (a \neq b) \tag{14}$$

$$(\sim a \neq b) \ \Leftrightarrow \ (a = b) \tag{15}$$

De uma forma geral, qualquer que seja o símbolo matemático usado para construir uma certa proposição, uma barra "/" sobre esse símbolo corresponde à negação dessa proposição.

Vejamos agora as interligações entre a negação e as operações de conjunção e de disjunção. Mais especificamente, qual o valor lógico da negação de uma conjunção? E de uma disjunção? Suponhamos que eu digo: "Hoje vou ao cinema e ao teatro"; intuitivamente, negar esta frase é dizer que "Hoje não vou ao cinema ou não vou ao teatro". A intuição diz-nos que a negação de uma conjunção é a disjunção das negações. De forma análoga, a negação de "Hoje como sopa ou carne", é "Hoje não como sopa nem como carne"; a intuição sugere-nos que a negação de uma disjunção é a conjunção das negações.

O que acabámos de dizer leva-nos a considerar duas proposições p e q quaisquer e a tentar demonstrar rigorosamente as propriedades

$$(\sim (p \wedge q)) \ \Leftrightarrow \ ((\sim p) \vee (\sim q)) \tag{16}$$

$$(\sim (p \vee q)) \ \Leftrightarrow \ ((\sim p) \wedge (\sim q)) \tag{17}$$

Claro que uma demonstração de (16) e (17) deverá ser feita à custa de tabelas de verdade convenientes:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

As propriedades (16) e (17) são usualmente conhecidas com o nome de primeiras leis de De Morgan.

6 Implicação

Na linguagem corrente usamos frequentes vezes frases condicionais, por exemplo, "Se hoje chover, então vou ao cinema". Esta frase só é falsa se hoje chover e eu não for ao cinema; se hoje não chover a frase é verdadeira, tal como o é se hoje chover e eu for ao cinema. A operação que traduz, em termos de Lógica Matemática, a ideia de uma frase condicional é a implicação. Trata-se de uma operação lógica de grande importância que é designada por $\Rightarrow$. Sendo p e q duas proposições quaisquer, a proposição $p \Rightarrow q$ (leia-se "p implica q") é falsa se p for verdadeira e q falsa e é verdadeira em todos os outros casos; por outras palavras, a tabela de verdade para a implicação é, por definição, a seguinte:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Na implicação $p \Rightarrow q$ chama-se antecedente à proposição p e consequente à proposição q. Repare-se que uma implicação só é falsa se o antecedente for verdadeiro e o consequente for falso; em todos os outros casos a implicação é verdadeira. Também por vezes escreveremos $q \Leftarrow p$ (em vez de $p \Rightarrow q$) com o significado de "p implica q".

A implicação é muito importante na linguagem matemática porque aparece sistematicamente nos teoremas que constituem as teorias matemáticas. Um teorema é uma proposição do tipo $p \Rightarrow q$, onde p é uma proposição verdadeira na teoria em questão. Demonstrar um teorema não é mais do que provar que a proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira o que, atendendo a que p é verdadeira, é equivalente a dizer que q é verdadeira. Num teorema é usual chamar hipótese à proposição p, antecedente da implicação $p \Rightarrow q$. A proposição q, que é o consequente da implicação, designa-se por tese. Um exemplo de um teorema é

Seja n um número natural. Então, se n é par, n^2 também é par.

A hipótese é a proposição "n é par"; a tese é "n^2 é par". A demonstração deste teorema pode ser feita da forma que passamos a expor. Por definição de número par, sabemos que existe um natural k tal que $n = 2k$; consequentemente

$$n^2 = (2k)^2 = 2^2k^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2m,$$

onde designámos por m o natural $2k^2$. Mas, novamente por definição de número par, e tendo em conta que $n^2 = 2m$, vemos que n^2 é par. O teorema está demonstrado.

Antes de darmos alguns exemplos de proposições onde a implicação intervém, queremos chamar a atenção para um facto importante. Consideremos a frase (infelizmente dita e muito repetida nos dias que correm): "Estamos em crise económica, logo os salários sobem abaixo da inflação". Ao dizermos esta frase, na linguagem corrente, estamos a admitir uma relação de causa a efeito entre a crise económica e o aumento dos salários. Do ponto de vista matemático esta frase é uma implicação: "Estamos em crise económica *implica* que os salários sobem abaixo da inflação". Mas cuidado! Na lógica matemática não nos preocupamos com qualquer relação de causa a efeito entre o antecedente e o consequente de uma implicação. O que há é uma relação entre o valor lógico da implicação e os valores lógicos do antecedente e do consequente. A frase "Estamos em crise económica, logo os salários sobem abaixo da inflação" é verdadeira porque o antecedente ("Estamos em crise económica") é verdadeiro (infelizmente) e o consequente ("Os salários sobem abaixo da inflação") é também verdadeiro (desgraçadamente). Mas a frase "O Primeiro Ministro é astronauta, logo os salários sobem abaixo da inflação" também é verdadeira! Isto porque o antecedente ("O Primeiro Ministro é astronauta") é falso; agora já é irrelevante o valor lógico do consequente porque, numa implicação, se o antecedente for falso, a implicação é verdadeira. Neste caso não há (ou, pelo menos, não parece haver) qualquer relação de causa a efeito entre o Primeiro Ministro ser astronauta e os salários subirem abaixo da inflação. Curiosamente a frase "O Primeiro Ministro é astronauta, logo os salários sobem acima da inflação" também é verdadeira porque (por infelicidade) o Primeiro Ministro *não é astronauta*; o antecedente é falso, logo a implicação é verdadeira.

Passemos agora a exemplos matemáticos; são falsas as seguintes proposições:

$$2 > 1 \;\Rightarrow\; 2 > 4, \quad 4 = 2^2 \;\Rightarrow\; \sqrt{4} = -2, \quad 3 + 2 = 5 \;\Rightarrow\; 100000 \neq 10^3 10^2.$$

De facto, em cada uma das três implicações anteriores, o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Nesta situação a implicação é falsa; é aliás a única situação em que a implicação é falsa (antecedente verdadeiro e consequente falso).

As seguintes proposições (todas elas implicações) são verdadeiras:

$$2 > 0 \;\Rightarrow\; 2 > 1, \quad 4 = 2^3 \;\Rightarrow\; \sqrt{4} = 2, \quad 3 + 2 = 7 \;\Rightarrow\; 1000 \neq 10^3.$$

Na primeira das implicações anteriores o antecedente é verdadeiro e o consequente também, pelo que a implicação é verdadeira. Nas outras duas o antecedente é falso pelo que, independentemente do valor lógico do consequente, a implicação é verdadeira.

Construindo as tabelas de valores lógicos necessárias é fácil provar as seguintes propriedades:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee q) \tag{18}$$
$$(\sim (p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q)) \tag{19}$$
$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q) \tag{20}$$
$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \Rightarrow (\sim p)) \tag{21}$$
$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \tag{22}$$

A título de exemplo demonstraremos a propriedade (22), que é a transitividade da implicação, recorrendo à seguinte tabela de verdade:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	(22)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Verificamos que o valor lógico de (22) é sempre V, independentemente dos valores lógicos de cada uma das proposições p, q e r; isto significa que (22) é verdadeira. Embora não o façamos aqui, recomendamos vivamente ao leitor que construa as tabelas de verdade que permitem demonstrar as propriedades (18), (19), (20) e (21).

Atenção à negação de uma implicação! Um erro frequente entre os estudantes é dizer que a negação de $p \Rightarrow q$ é $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$; falso, como se depreende de (19). Outro erro frequente é dizer que a negação de $p \Rightarrow q$ é $q \Rightarrow p$; igualmente falso! A negação de $p \Rightarrow q$, dada por (19), é $p \wedge (\sim q)$.

A proposição $q \Rightarrow p$ é chamada proposição recíproca de $p \Rightarrow q$; a propriedade (20) mostra-nos que, se tanto $p \Rightarrow q$ como a sua recíproca forem verdadeiras, então p e q são equivalentes.

A proposição $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ é chamada contra-recíproca de $p \Rightarrow q$; por essa razão a propriedade (21) é conhecida como regra do contra-recíproco, vulgarmente utilizada em certo tipo de demonstrações onde, em vez de demonstrarmos que $p \Rightarrow q$, provamos que $(\sim q) \Rightarrow (\sim p)$.

Para exemplificar demonstraremos que, fixado um número natural n, se o quadrado de n for par, então n também é par. A proposição a demonstrar escreve-se, simbolicamente,

$$n^2 \text{ é par } \Rightarrow n \text{ é par.}$$

Designando por p a proposição "n^2 é par" e por q a proposição "n é par", queremos mostrar que

$$p \Rightarrow q \tag{23}$$

Mas, atendendo a (21), esta última proposição é equivalente a

$$\sim q \Rightarrow \sim p \tag{24}$$

Vamos então demonstrar que

$$n \text{ não é par } \Rightarrow n^2 \text{ não é par.}$$

Suponhamos então que o número natural n não é par; então n é ímpar e, por definição de número ímpar, existe um natural k tal que

$$n = 2k + 1.$$

Consequentemente tem-se

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2m + 1,$$

onde designámos por m o número natural $2k^2 + 2k$. A igualdade anterior mostra-nos que o número natural n^2 é ímpar (porque se escreve na forma $2m + 1$) e portanto não é par. Demonstrámos assim que a proposição (24) é verdadeira e, como (23) é equivalente a (24), demonstrámos a proposição (23).

Um outro tipo de demonstração também muitas vezes utilizado é o chamado método de demonstração por redução ao absurdo. Neste caso, para demonstrarmos que $p \Rightarrow q$, começamos por supor que a hipótese é verdadeira e que a tese é falsa, ou seja, que a proposição

$$p \wedge (\sim q)$$

é verdadeira. À custa desta proposição deduzimos uma outra proposição r que sabemos ser falsa na teoria em que estamos. Concluímos então que a proposição r é simultaneamente verdadeira e falsa, o que é absurdo. Logo

$p \ \wedge\ (\sim q)$ é falsa e (porque p é verdadeiro, por ser a hipótese do teorema) vem que $\sim q$ é falsa, ou seja, q é verdadeira.

Exemplificaremos este processo de demonstração tornando a provar (agora por redução ao absurdo) que, fixado um número natural n, se tem

$$n^2 \text{ é par } \Rightarrow\ n \text{ é par.}$$

Suponhamos portanto que é verdadeira a proposição

$$n^2 \text{ é par } \wedge\ n \text{ não é par.} \tag{25}$$

Então existem dois números naturais k e m tais que

$$n^2 = 2k\ \wedge\ n = 2m + 1.$$

Tem-se assim $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$, pelo que

$$4m^2 + 4m + 1 = 2k.$$

Mas, na igualdade anterior, o primeiro membro é um número ímpar e o segundo membro é um número par; por outro lado sabemos que não existe qualquer número natural simultaneamente par e ímpar. Concluímos portanto que a proposição (25) é falsa, logo n é par.

Terminamos esta secção introduzindo uma notação. Sendo p e q duas proposições quaisquer, escreveremos $p \not\Rightarrow q$ (leia-se p não implica q) para negar que p implica q. Assim, $p \not\Rightarrow q$ é, por definição, equivalente a $\sim (p \Rightarrow q)$. Por vezes, em vez de $p \not\Rightarrow q$, escrevemos $q \not\Leftarrow p$. Tem-se então

$$(p \not\Rightarrow q)\ \Leftrightarrow\ (q \not\Leftarrow p)\ \Leftrightarrow\ (\sim (p \Rightarrow q))\ \Leftrightarrow\ (p \wedge (\sim q)).$$

7 Expressões com variáveis

Na linguagem matemática é muito cómodo utilizar variáveis; aliás, historicamente, a introdução de variáveis na simbologia matemática originou um desenvolvimento sem precedentes desta ciência.

As variáveis são símbolos (geralmente letras) que podem ser substituídos por qualquer designação de um determinado conjunto[1] de designações, chamado domínio da variável. Por exemplo

$$x + 3y - x^2 \tag{26}$$

$$\theta \text{ é capital de Portugal} \tag{27}$$

$$z, w \tag{28}$$

$$n^2 + 3n \geq 27 \tag{29}$$

[1]Utilizamos a palavra conjunto de forma heurística. Para mais detalhes, ver o capítulo "Conjuntos".

são expressões com variáveis. Em (26) aparecem as variáveis "x" e "y"; em (27) aparece a variável "θ"; em (28), as variáveis "z" e "w"; finalmente, em (29), aparece apenas a variável "n". Claro que deveríamos indicar precisamente qual é o domínio das variáveis em questão. Para fixar ideias digamos, por exemplo, que o domínio das variáveis de (26) é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o domínio das variáveis de (27) e (28) é o conjunto das cidades europeias e o domínio da variável de (29) é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Isto significa que podemos substituir, em cada uma das expressões anteriores, cada uma das variáveis intervenientes por um qualquer valor do seu domínio. Por exemplo, substituindo x por 2,3 e y por 0,1 em (26), obtemos

$$2{,}3 + 3 \times 0{,}1 - 2{,}3^2.$$

Substituindo, em (28), z por Paris e w por Praga, obtemos

Paris, Praga.

Pensemos agora nas expressões (26) e (29). Já substituímos, em (26), cada uma das variáveis x e y respectivamente pelos valores 2,3 e 0,1, tendo obtido

$$2{,}3 + 3 \times 0{,}1 - 2{,}3^2.$$

Ao fazermos esta substituição das variáveis obtivemos uma designação, nomeadamente $2{,}3 + 3 \times 0{,}1 - 2{,}3^2$. Substituamos agora a variável n, em (29), por exemplo por 7:

$$7^2 + 3 \times 7 \geq 27.$$

O que obtivemos, neste caso, foi uma proposição.

Somos então levados a classificar as expressões com variáveis em dois tipos: as expressões designatórias e as expressões proposicionais (também chamadas condições). As expressões designatórias transformam-se em designações quando da substituição das variáveis. As expressões proposicionais transformam-se, por substituição das variáveis, em proposições.

A expressão (26) é portanto uma expressão designatória, enquanto (29) é uma expressão proposicional. A expressão (27) é uma condição (ou expressão proposicional) porque, ao substituirmos a variável por uma valor do seu domínio, obtemos uma proposição. Por exemplo, substituindo θ por Lisboa, obtemos a proposição verdadeira

Lisboa é capital de Portugal,

ao substituirmos θ por Bruxelas, obtemos a proposição falsa

Bruxelas é capital de Portugal.

Claro que (28) é uma expressão designatória porque, ao substituirmos cada uma das variáveis por um elemento do seu domínio, obtemos designações.

Consideremos as seguintes duas expressões designatórias

$$(x-y)^2 \text{ e } x^2y^2,$$

onde o domínio das variáveis x e y é $\mathbb{R}$. Consideremos também a expressão com variáveis

$$(x-y)^2 = x^2y^2.$$

Esta última expressão, que é obviamente uma expressão proposicional, obteve-se por ligação das duas anteriores através de um sinal de igual. Isto mostra-nos que um processo para construir expressões proposicionais é escrever o sinal = entre duas expressões designatórias. Claro que também podemos escrever

$$(x-y)^2 \neq x^2y^2,$$

obtendo uma outra expressão proposicional. Em resumo, a inserção, quer do sinal de igualdade =, quer do sinal de desigualdade $\neq$, entre duas expressões designatórias, origina uma expressão proposicional.

Suponhamos agora que partimos de duas expressões proposicionais, digamos por exemplo $(x-y)^2 = 0$ e $x^2y^2 = 0$. Será que temos o direito de inserir o sinal de equivalência $\Leftrightarrow$ entre estas duas expressões proposicionais? É fácil ver que sim. De facto

$$(x-y)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2y^2 = 0$$

é uma nova expressão proposicional, obtida pela inserção do sinal de equivalência entre as expressões proposicionais $(x-y)^2 = 0$ e $x^2y^2 = 0$. Claro que, em vez do sinal de equivalência, podemos usar os sinais de conjunção, disjunção, implicação; obtemos sempre novas expressões proposicionais:

$$\begin{aligned}
&(x-y)^2 = 0 \;\wedge\; x^2y^2 = 0,\\
&(x-y)^2 = 0 \;\vee\; x^2y^2 = 0,\\
&(x-y)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2y^2 = 0.
\end{aligned}$$

Também, partindo de uma expressão proposicional qualquer, podemos fazê-la anteceder do sinal de negação, obtendo uma nova expressão proposicional. Por exemplo, a partir de $(x-y)^2 = 0$, podemos construir

$$\sim (x-y)^2 = 0.$$

Em resumo, as expressões com variáveis podem ser designatórias ou proposicionais. Uma expressão designatória transforma-se numa designação quando da substituição das variáveis. Uma expressão proposicional transforma-se, por substituição das variáveis, numa proposição; de notar que o valor lógico dessa proposição depende evidentemente do valor das variáveis. Duas expressões designatórias podem ser unidas pelos sinais de igualdade $=$ ou desigualdade $\neq$, originando uma expressão proposicional. Duas expressões proposicionais podem ser ligadas pelos sinais de equivalência $\Leftrightarrow$, conjunção $\wedge$, disjunção $\vee$, implicação $\Rightarrow$, dando origem a uma nova expressão proposicional. O sinal de negação $\sim$ pode ser usado antes de uma expressão proposicional, originando uma nova expressão proposicional.

8 Quantificadores

Consideremos a expressão proposicional $x > 0$, sendo $\mathbb{R}$ o domínio da variável x. Substituindo x por 7, obtemos a proposição verdadeira $7 > 0$; substituindo x por -1, obtemos a proposição falsa $-1 > 0$. A partir da expressão proposicional $x > 0$ podemos construir a seguinte proposição: "Existe uma designação no domínio da variável x tal que $x > 0$". Trata-se até de uma proposição verdadeira, porque existe pelo menos um elemento do domínio da variável x que, quando substituído na expressão proposicional $x > 0$, a transforma numa proposição verdadeira. A proposição "Existe uma designação no domínio da variável x tal que $x > 0$" escreve-se, em notação matemática,

$$\exists x \quad x > 0$$

ou, querendo indicar explicitamente o domínio da variável x,

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x > 0.$$

Diremos que $\exists$ é o quantificador existencial; como vimos, ao ser colocado antes de uma expressão proposicional na variável a que diz respeito, transforma-a numa proposição (que pode ser verdadeira ou falsa).

No caso geral, seja $p(x)$ uma expressão proposicional qualquer na variável x. A proposição

$$\exists x \quad p(x)$$

é verdadeira sse existir, no domínio da variável x, pelo menos uma designação ξ tal que a proposição $p(\xi)$ (obtida por substituição, na expressão proposicional $p(x)$, da variável x por aquela designação ξ) é verdadeira.

Por exemplo, são verdadeiras as proposições

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x < 0, \qquad \exists x \in \mathbb{N} \quad x \geq 100,$$

são falsa as proposições

$$\exists x \in \mathbb{N} \quad x < 0, \qquad \exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 < -1.$$

O outro quantificador, designado por $\forall$ (leia-se "para todo"), é o quantificador universal que, colocado antes de uma expressão proposicional $p(x)$ na variável x a que diz respeito, também a transforma numa proposição:

$$\forall x \quad p(x).$$

Claro que, querendo especificar o domínio D da variável x, escreveremos

$$\forall x \in D \quad p(x).$$

Esta proposição é verdadeira sse, qualquer que seja a designação pertencente ao domínio D da variável x, a condição $p(x)$ se transforma numa proposição verdadeira quando a variável é substituída por essa designação. Por exemplo, são verdadeiras as proposições

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{N} \quad x \geq 0,$$

são falsa as proposições

$$\forall x \in \mathbb{N} \quad x < 100, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 > 0.$$

Em resumo, dada uma expressão proposicional $p(x)$ na variável x de domínio D, há dois processos canónicos de construir uma proposição a partir dela: a utilização do quantificador existencial

$$\exists x \in D \quad p(x)$$

e a utilização do quantificador universal

$$\forall x \in D \quad p(x).$$

A proposição "$\exists x \in D \quad p(x)$" é verdadeira sse existir uma designação no domínio D da variável x tal que, quando substituída na expressão proposicional $p(x)$, dê origem a uma proposição verdadeira. A proposição "$\forall x \in D \quad p(x)$" é verdadeira sse, qualquer que seja a designação no domínio D da variável x, quando substituída na expressão proposicional $p(x)$, dê origem a uma proposição verdadeira.

Repare-se que $p(x)$ é uma expressão proposicional na variável x, enquanto as expressões

$$\exists x \quad p(x) \qquad \text{e} \qquad \forall x \quad p(x)$$

são proposições. Por esta razão, nestas duas últimas expressões, dizemos que x é uma variável *muda* ou *aparente*. Nas expressões anteriores o símbolo x da variável muda pode ser substituído por qualquer outro símbolo que designe uma variável com o mesmo domínio. Por outras palavras, e desde que x e y tenham o mesmo domínio, tem-se

$$\begin{array}{lll} \exists x \quad p(x) & \Leftrightarrow & \exists y \quad p(y), \\ \forall x \quad p(x) & \Leftrightarrow & \forall y \quad p(y). \end{array}$$

Consideremos agora uma expressão proposicional em duas variáveis x e y, digamos $p(x,y)$. Será que, sendo D o domínio da variável x, uma expressão do tipo

$$\exists x \in D \quad p(x,y)$$

tem sentido? É fácil ver que sim. Na verdade trata-se de uma nova expressão proposicional, agora apenas na variável y. Um exemplo concreto:

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x + y = 0.$$

Repare-se que $x + y = 0$ é uma expressão proposicional nas variáveis x e y. Ao colocarmos o quantificador existencial relativo a x (com o universal seria análogo) tornámos a variável x muda, obtendo uma expressão proposicional apenas na variável y. De facto, se substituirmos y por um qualquer valor real, por exemplo por sete, obtemos

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x + 7 = 0,$$

que é uma proposição (neste caso verdadeira).

Voltemos a pensar na expressão proposicional $x+y = 0$, onde o domínio das variáveis x e y é $\mathbb{R}$. Já sabemos que, ao escrevermos

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad x + y = 0$$

obtemos uma expressão proposicional, agora só na variável y. Claro que esta expressão proposicional pode ser antecedida de um quantificador na variável y, dando origem a uma proposição, por exemplo

$$\exists y \in \mathbb{R}\ (\exists x \in \mathbb{R} \quad x + y = 0).$$

Trata-se, neste caso, de uma proposição verdadeira; é vulgar omitir os parênteses quando do uso de mais de um quantificador, escrevendo

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} \quad x + y = 0.$$

É imediato ver que a proposição anterior é equivalente a

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0,$$

pelo que é usual escrever abreviadamente (com o sentido das duas proposições anteriores)

$$\exists x, y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0.$$

Consideremos agora, ainda a título de exemplo, a proposição

$$\forall y \in \mathbb{R}\ (\exists x \in \mathbb{R} \quad x + y = 0),$$

escrita, de forma abreviada,

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} \quad x + y = 0.$$

Trata-se de uma proposição verdadeira porque, fixado um y qualquer em $\mathbb{R}$, existe um número real x que somado com y dá zero: basta tomar $x = -y$. Mas já a proposição

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y = 0$$

é falsa. De facto não existe um número real x que somado com qualquer outro número real y dê sempre 0. Vemos assim que não é lícito trocar dois quantificadores de natureza diferente.

No caso geral, seja $p(x, y)$ uma expressão proposicional nas variáveis x e y. Partindo dela podemos obter proposições, fazendo-a anteceder de dois quantificadores (um em cada uma das variáveis). É imediato ver que, se esses dois quantificadores forem da mesma espécie (ambos existenciais ou ambos universais), a sua ordem é irrelevante. Se forem de espécies diferentes (um existencial e outro universal), então não é lícito trocar a ordem.

Para compreendermos melhor o que se passa ao trocar um quantificador existencial com um universal, seja $p(x, y)$ uma expressão proposicional qualquer nas variáveis x e y, de domínios respectivamente D_1 e D_2, e consideremos as duas proposições seguintes

$$\forall x \in D_1\ \exists y \in D_2 \quad p(x, y) \tag{30}$$

$$\exists y \in D_2\ \forall x \in D_1 \quad p(x, y) \tag{31}$$

Na proposição (30) afirma-se que, para cada x em D_1 existe um y em D_2 tal que $p(x, y)$; naturalmente que esse y depende do x considerado. Na proposição (31) afirma-se que existe um y em D_2 (independente de x) tal que, para todo o x em D_1, se tem $p(x, y)$. Isto mostra que (31) implica (30), ou seja, a proposição

$$\exists y \in D_2\ \forall x \in D_1 \quad p(x, y) \qquad \Rightarrow \qquad \forall x \in D_1\ \exists y \in D_2 \quad p(x, y) \tag{32}$$

é verdadeira. Atenção! Não há equivalência entre (30) e (31); o que se passa é que (31) implica (30), pelo que (32) é verdadeira. Por outras palavras, $\exists y\ \forall x$ *é mais forte* do que $\forall x\ \exists y$.

Consideremos, por exemplo, a proposição

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad xy(y-1) = 0 \quad ;$$

trata-se de uma proposição verdadeira, pois basta tomar $y = 0$ (alternativamente poderíamos ter tomado $y = 1$). Então a proposição

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad xy(y-1) = 0$$

é seguramente verdadeira. Já a proposição

$$\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in [0, +\infty[\quad y^2 = x$$

é obviamente falsa, enquanto a proposição

$$\forall x \in [0, +\infty[\ \exists y \in \mathbb{R} \quad y^2 = x$$

é verdadeira porque basta tomarmos para y uma raiz quadrada de x o que é possível pois, como sabemos, todo o número real ≥ 0 tem pelo menos uma raiz quadrada.

O que dissemos para duas variáveis, estende-se a um qualquer número delas. Numa expressão proposicional num certo número de variáveis, por cada variável quantificada obtemos uma expressão proposicional nas variáveis restantes; se todas as variáveis estiverem quantificadas, obtemos uma proposição. Quantificadores consecutivos da mesma espécie podem ser trocados; de espécie diferente *não*.

Vamos agora estudar a negação de proposições com quantificadores. Consideremos a proposição "Existe um português loiro"; negar esta frase é dizer que não existem portugueses loiros, ou seja, que, qualquer que seja o português, ele não é loiro. No caso geral, e sendo $p(x)$ uma expressão proposicional na variável x de domínio D, negar a proposição "$\exists x \in D\ p(x)$" é escrever "$\forall x \in D\ \sim p(x)$". Vemos assim que a proposição

$$\sim (\exists x \in D \quad p(x)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in D\ \sim p(x) \tag{33}$$

é verdadeira. Dito de forma imprecisa mas sugestiva, a negação de um quantificador existencial é um quantificador universal seguido de negação.

Consideremos agora a proposição "Todo o político é corrupto". Negar esta proposição é dizer que existe pelo menos um político que não é corrupto. Sendo $p(x)$ uma expressão proposicional na variável x de domínio D, negar a proposição "$\forall x \in D \quad p(x)$" é escrever "$\exists x \in D \quad \sim p(x)$". Concluímos assim que a proposição

$$\sim (\forall x \in D \quad p(x)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists x \in D \quad \sim p(x) \tag{34}$$

é verdadeira. Dito de forma imprecisa mas sugestiva, a negação de um quantificador universal é um quantificador existencial seguido de negação.

As regras de negação dos quantificadores, expressas por (33) e (34), são usualmente conhecidas pelo nome de segundas leis de De Morgan.

Atenção! Na linguagem corrente é (infelizmente) muito usual cometer erros na negação dos quantificadores; basta pedir a pessoas menos atentas a negação da frase "todos os homens são burros" para ouvir geralmente a resposta "nenhum homem é burro". Ora a negação de "todos os homens são burros" não é "nenhum homem é burro" mas sim "existe um homem que não é burro"!

A negação de uma proposição (ou de uma expressão proposicional) com mais do que um quantificador é obtida aplicando sucessivamente as segundas leis de De Morgan, como nos dois exemplos que apresentamos a seguir.

Exemplo 1.

$$\sim (\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y = 2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y \neq 2.$$

Exemplo 2.

$$\sim \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \leq \varepsilon\right)$$
$$\Leftrightarrow \qquad \exists \varepsilon > 0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geq p\ \wedge\ \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| > \varepsilon.$$

9 Exemplos

Nesta secção daremos dois exemplos de definições importantes usadas em Matemática, nas quais intervêm quantificadores. A primeira será a noção de sucessão convergente, já estudada no ensino secundário. A segunda a noção de função contínua num ponto, também abordada no ensino secundário. Claro que, nesta secção, não iremos desenvolver a explicação dos conceitos tratados, mas apenas as questões lógicas que se podem levantar nas definições intervenientes. Para um estudo das noções aqui tratadas remetemos para os capítulos "Sucessões" e "Continuidade".

9.1 Convergência de uma sucessão.

Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais e seja a um número real qualquer. Relembramos que se diz que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende (ou converge) para a, e escreve-se $u_n \to a$, sse:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \ \Rightarrow\ |u_n - a| \leq \varepsilon \tag{35}$$

Vemos assim que a definição de sucessão convergente — uma das mais importantes definições em Análise Matemática — faz intervir três quantificadores. Dizer que uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não* converge para o número real a é negar a proposição (35), ou seja, é dizer que

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \exists n_p \in \mathbb{N} \quad n_p \geq p \ \wedge\ \left|u_{n_p} - a\right| > \varepsilon \tag{36}$$

Na proposição (36) designámos a variável muda do segundo quantificador existencial por n_p, e não por n, para frisarmos bem que n_p depende de p [2].

Consideremos agora a proposição

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \ \Rightarrow\ |u_n - a| < \varepsilon \tag{37}$$

e comparêmo-la com (35). É evidente que a proposição (37) implica a proposição (35) porque, se $|u_n - a| < \varepsilon$, então também $|u_n - a| \leq \varepsilon$. Será que (35) implica (37)? Por outras palavras, será que (35) e (37) são proposições equivalentes? Vamos ver que sim. Demonstremos então que

$$(35) \quad \Rightarrow \quad (37).$$

A nossa tese é (37); devemos mostrar que, para todo o $\varepsilon > 0$, se tem

$$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \ \Rightarrow\ |u_n - a| < \varepsilon.$$

Fixemos então um $\varepsilon > 0$; a nossa hipótese — a proposição (35) — garante-nos que, qualquer que seja o número real $\gamma > 0$ [3], se tem

$$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \ \Rightarrow\ |u_n - a| \leq \gamma.$$

Em particular, escolhendo $\gamma = \dfrac{\varepsilon}{2}$, o que é possível porque $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, vem

$$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \ \Rightarrow\ |u_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

---

[2] Como sabemos uma variável quantificada com um quantificador existencial depende das variáveis quantificadas com quantificadores universais que a precedem.

[3] Para não utilizarmos ε com dois sentidos distintos, substituímos a variável muda ε em (35) pela variável muda γ o que, como sabemos, é lícito.

Mas, sendo $|u_n - a| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, será também $|u_n - a| \leq \varepsilon$, pelo que (35) fica demonstrada.

Na mesma ordem de ideias, consideremos a proposição

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n > p \ \Rightarrow\ |u_n - a| \leq \varepsilon \tag{38}$$

e comparêmo-la com (35); será que (35) e (38) são equivalentes? É fácil ver que sim. Por um lado, atendendo a que, se $n > p$, então também $n \geq p$, tem-se

$$(35) \quad \Rightarrow \quad (38).$$

Resta-nos mostrar a recíproca, isto é,

$$(38) \quad \Rightarrow \quad (35).$$

Para provarmos (35), comecemos por fixar $\varepsilon > 0$; por (38) sabemos que existe um número natural — designemo-lo por q — tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n > q \ \Rightarrow\ |u_n - a| \leq \varepsilon.$$

Ponhamos $p = q + 1$; a proposição anterior escreve-se (porque $n > q$ é equivalente a $n \geq q + 1 = p$)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \ \Rightarrow\ |u_n - a| \leq \varepsilon,$$

o que prova (35).

Acabámos de mostrar que as proposições (35), (37) e (38) são equivalentes. Do ponto de vista prático isto significa que, na definição de sucessão convergente para a, é irrelevante as desigualdades $n > p$ e $|u_n - a| < \varepsilon$ serem estritas ou não.

Consideremos ainda outra proposição de aparência semelhante a (35):

$$\forall \varepsilon \geq 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \ \Rightarrow\ |u_n - a| \leq \varepsilon \tag{39}$$

Tendo em conta que, se ε for > 0 então também ε é ≥ 0, é imediato ver que

$$(39) \quad \Rightarrow \quad (35).$$

Será que (35) e (39) são equivalentes? Vamos ver que *não*! Repare-se que, se (39) for verdadeira, podemos escolher $\varepsilon = 0$ em (39), obtendo

$$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \ \Rightarrow\ |u_n - a| \leq 0.$$

Mas $|u_n - a| \leq 0$ é equivalente a $|u_n - a| = 0$, ou ainda a $u_n = a$. Concluímos assim que, se (39) for verdadeira, então

$$\exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \ \Rightarrow\ u_n = a,$$

o que significa que a sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é constante e igual a a a partir da ordem p. Ora há sucessões que não verificam esta propriedade e, apesar disso, verificam (35). Um exemplo é a sucessão assim definida:

$$u_n = \frac{1}{n+1}.$$

Esta sucessão não verifica (39) com $a = 0$, por não se tratar de uma sucessão constante e igual a zero a partir de uma determinada ordem. Mas verifica (35) com $a = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{n+1} - 0\right| \leq \varepsilon.$$

De facto tem-se

$$\left|\frac{1}{n+1} - 0\right| \leq \varepsilon \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \ \Leftrightarrow\ n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

então, tomando um número natural p tal que $p > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, o que é possível porque o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais não é majorado, tem-se

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq p \ \Rightarrow\ \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon.$$

Portanto a sucessão de termo geral $\dfrac{1}{n+1}$ verifica (35) com $a = 0$.

9.2 Funções contínuas

Seja D um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, seja $f : D \to \mathbb{R}$ e seja $a \in D$. Recordamos que a função f se diz contínua no ponto a sse

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \quad |x - a| \leq \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \tag{40}$$

Tal como na secção 9.1 temos uma definição importantíssima em Análise Matemática que faz intervir três quantificadores. Tal como nessa secção, as desigualdades latas $|x - a| \leq \delta$ e $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ podem ser substituídas por desigualdades estritas $|x - a| < \delta$ e $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

A função f diz-se contínua em D sse for contínua em todos os pontos de D; significa isto que:

$$\forall a \in D\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D \quad |x - a| \leq \delta \ \Rightarrow\ \big|f(x) - f(a)\big| \leq \varepsilon \tag{41}$$

Claro que a proposição (41) implica a proposição (40), mas a recíproca é, no geral, falsa. O facto de uma função ser contínua num ponto do seu domínio *não* implica que seja contínua em todos os pontos do domínio.

Repare-se que, em (41), o δ depende de a e de ε. Para percebermos bem o que se passa, vamos considerar um exemplo.

Exemplo 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Comecemos por mostrar que esta função é contínua no ponto $a = 0$. Tendo em conta que, para todo o $\varepsilon > 0$, se tem

$$x^2 \leq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x| \leq \sqrt{\varepsilon},$$

vemos que basta fazer $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ em

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \leq \delta \;\Rightarrow\; |x^2| \leq \varepsilon$$

para obtermos uma proposição verdadeira; isto prova a continuidade da função $x \to x^2$ no ponto zero.

Seja agora $a \neq 0$. Para provar a continuidade de $x \to x^2$ no ponto a comecemos por fixar $\varepsilon > 0$; pretendemos determinar um $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x - a| \leq \delta \;\Rightarrow\; \left|x^2 - a^2\right| \leq \varepsilon.$$

Vamos exigir que δ verifique

$$0 < \delta < |a| \tag{42}$$

A vantagem deste procedimento é que $|x - a| \leq \delta$ implica que x e a tenham o mesmo sinal (porque a distância de x a a é inferior à distância de a a zero) e que $|x + a| < 2|a|$. A desigualdade

$$\left|x^2 - a^2\right| \leq \varepsilon$$

pode escrever-se

$$|x - a|\,|x + a| \leq \varepsilon$$

ou ainda, porque x é diferente de $-a$ (visto x e a terem o mesmo sinal),

$$|x - a| \leq \frac{\varepsilon}{|x + a|}.$$

Esta desigualdade sugere-nos escolher $\delta > 0$ tal que

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{|x + a|}$$

para todo o x verificando $|x - a| \leq \delta$, ou seja, para todo o x tal que $x \in]a - \delta, a + \delta[$. Mas, tendo em conta (42), sabemos que $|x - a| \leq \delta$ implica

$|x+a| < 2|a|$, ou ainda $\frac{\varepsilon}{2|a|} < \frac{\varepsilon}{|x+a|}$, bastando agora impor que δ verifique, para além de (42), a condição seguinte:

$$0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2|a|}.$$

Concluímos assim que é suficiente tomar

$$0 < \delta < \min\left\{|a|, \frac{\varepsilon}{2|a|}\right\} \tag{43}$$

para podermos garantir que a proposição

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \quad |x-a| \leq \delta\ \Rightarrow\ \left|x^2 - a^2\right| \leq \varepsilon$$

é verdadeira. Reparemos que, fixado ε, a desigualdade (43) mostra que δ diminui à medida que $|a|$ cresce. Para a fixo, δ diminui com a diminuição de ε. Em resumo δ depende, no caso da função considerada, de a e de ε.

Uma função $f : D \to \mathbb{R}$ diz-se uniformemente contínua em D sse for contínua em todos os pontos de D e o δ da proposição (40) não depender do ponto a de D. Quer isto dizer que f é uniformemente contínua em D sse

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\ \forall a \in D \quad |x-a| \leq \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon \tag{44}$$

Claro que toda a função uniformemente contínua em D é contínua em D porque, como sabemos, $\exists y\ \forall x$ é mais forte do que $\forall x\ \exists y$ — veja-se a fórmula (32). No entanto a continuidade de uma função não garante a sua continuidade uniforme. Por exemplo a função $x \to x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

No caso do domínio D de f ser um intervalo limitado e fechado $[a,b]$, com a e b números reais, $a < b$, é possível mostrar que f é uniformemente contínua em $D = [a,b]$ sse for contínua[4].

Terminaremos com um exemplo de uma função uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Seja k um número real qualquer e seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $\varphi(x) = kx$; mostremos que φ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$. Para isso, devemos provar que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall a \in \mathbb{R} \quad |x-a| \leq \delta\ \Rightarrow\ |kx - ka| \leq \varepsilon \tag{45}$$

No caso $k = 0$ a proposição anterior é trivialmente verdadeira porque o consequente da implicação, $|kx - ka| = 0 \leq \varepsilon$, é verdadeiro.

[4]Trata-se do teorema de Heine-Cantor, estudado usualmente nas cadeiras de Análise Matemática do primeiro ano dos cursos superiores.

No caso $k \neq 0$ basta reparar que

$$|kx - ka| \leq \varepsilon \iff |x - a| \leq \frac{\varepsilon}{|k|},$$

pelo que, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|k|}$, a proposição (45) é verdadeira, isto é, a função φ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.