

# Funções reais de variável real

Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa:  
António St. Aubyn, Maria Carlos Figueiredo,  
Luís de Loura, Luísa Ribeiro, Francisco Viegas

Lisboa, Março de 2004

O documento presente foi obtido directamente do código TeX fornecido pelos autores com alterações de formatação e alguma revisão editorial. A versão corrente é de 28 de Janeiro de 2007. A revisão deste texto do ponto de vista gráfico ainda não está completa. Novas versões poderão ficar disponíveis no futuro a partir de <http://preprint.math.ist.utl.pt/files/ppgmutlfuncoesreais.pdf>. O DMIST agradece ao Grupo de Matemática da UTL a possibilidade de facultar o texto aos alunos das disciplinas introdutórias de Matemática do IST.



Na mesma série:

- Lógica matemática.
- Conjuntos.
- Números reais.
- Sucessões.
- Funções.
- Funções reais de variável real.
- Funções trigonométricas.
- Função exponencial.
- Continuidade.
- Derivadas.

---

**Índice**

<b>Índice</b>	<b>3</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>5</b>
<b>2 Operações algébricas</b>	<b>12</b>
<b>3 Composições elementares e gráficos</b>	<b>15</b>
3.1 Função $g \circ f$ . . . . .	16
3.2 Função $f \circ g$ . . . . .	22
3.3 Exemplo . . . . .	34
<b>4 Funções pares e ímpares</b>	<b>39</b>
4.1 Definição e exemplos . . . . .	39
4.2 Prolongamento e Paridade . . . . .	48
<b>5 Funções periódicas</b>	<b>53</b>
5.1 Definição e exemplos . . . . .	53
5.2 Prolongamento e periodicidade . . . . .	64
<b>6 Função inversa: exemplos.</b>	<b>70</b>
<b>7 Funções monótonas</b>	<b>82</b>
<b>8 Funções limitadas</b>	<b>86</b>
8.1 Definição e propriedades. . . . .	86
8.2 Supremo e ínfimo de uma função limitada . . . . .	92
<b>Índice remissivo</b>	<b>95</b>



## 1 Introdução

Seja  $U \neq \emptyset$  um conjunto qualquer; se nos derem dois subconjuntos de  $U$ ,  $A$  e  $B$ , as operações usuais de intersecção, reunião e passagem ao complementar permitem-nos considerar novos subconjuntos de  $U$ :  $A \cap B$ ,  $U \setminus A$ ,  $A \setminus B$ , etc.

Ao particularizarmos, tomando  $U = \mathbb{R}$  e dados subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $\mathbb{R}$ , continua a fazer sentido falar de  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ , etc., mas podemos agora ir mais longe neste processo. Assim, e como exemplo, uma vez que está definida uma operação de adição no conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ , podemos somar qualquer elemento de  $A \neq \emptyset$  com qualquer elemento de  $B \neq \emptyset$  e, conseqüentemente, definir o subconjunto  $A + B$  de  $\mathbb{R}$  por

$$A + B = \{w \in \mathbb{R} : \exists x \in A \exists y \in B \quad w = x + y\},$$

o que num qualquer conjunto  $U \neq \emptyset$  não tinha, em geral, sentido.

De forma análoga, podemos definir o subconjunto  $B + A$  de  $\mathbb{R}$ ; como sabemos que a adição goza da propriedade comutativa, podemos garantir que os conjuntos são iguais:  $A + B = B + A$ .

Por outras palavras, as operações usuais no conjunto dos *números* reais  $\mathbb{R}$  geram novas operações entre *conjuntos* de números reais.

Pensemos agora no conceito de função: dados conjuntos  $A$  e  $B$ , quaisquer e não vazios, definimos o que se entende por uma função  $f$  de  $A$  em  $B$ . Neste quadro geral, definimos função injectiva, sobrejectiva, inversa, composta, etc.

Se particularizarmos, tomando para  $A$  e  $B$  subconjuntos não vazios de  $\mathbb{R}$ , é natural que o carácter específico do domínio e do conjunto de chegada permita aprofundar o estudo de tais funções, formulando novas propriedades.

Para ilustrar esta ideia, comecemos por considerar um exemplo em que apenas o conjunto de chegada é subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

Seja então  $A = \{a, b, c, d\}$  (a natureza dos elementos de  $A$  é irrelevante; podem ser nomes de árvores, nomes de cidades da Ásia, ...) e seja  $B = \mathbb{N}$ , o conjunto dos números naturais.

Consideremos duas funções  $f$  e  $g$ , ambas definidas em  $A$  e com valores em  $\mathbb{N}$ , dadas por

$$f : A \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 21 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

e

$$g : A \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 9 & 10 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Uma vez que  $f$  é função injectiva (o que  $g$  não é), podemos considerar a função inversa  $f^{-1}$ ; porque se tem  $f(A) = \{1, 3, 14, 21\}$ , vem

$$f^{-1} : f(A) \rightarrow A$$

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 14 & 21 \\ a & c & d & b \end{pmatrix}.$$

Podemos ainda definir a função composta  $g \circ f^{-1}$ :

$$g \circ f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g \circ f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 14 & 21 \\ 9 & 10 & 11 & 10 \end{pmatrix}.$$

Em resumo, as duas funções dadas  $f$  e  $g$  permitiram-nos definir as duas novas funções  $f^{-1}$  e  $g \circ f^{-1}$ ; para tal, não tivemos em conta o facto de  $B$  ser um conjunto de números.

Ora o conjunto dos números naturais é fechado para a operação de adição, isto é,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad n + m \in \mathbb{N};$$

esta propriedade sugere-nos que definamos uma nova função, chamemo-lhe  $h$ , de  $A$  em  $\mathbb{N}$  que, a cada elemento  $x$  de  $A$ , associa o número natural obtido adicionando  $f(x)$  e  $g(x)$ ; de forma explícita, tem-se

$$h : A \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\forall x \in A \quad h(x) = f(x) + g(x)$$

ou, extensivamente,

$$h = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 10 & 31 & 13 & 25 \end{pmatrix}.$$

Porque é sugestivo, à função  $h$  chamamos *função soma de  $f$  e  $g$*  e designamo-la por  $f + g$ .

Analogamente, e agora porque  $\mathbb{N}$  é um conjunto fechado para a multiplicação, podemos definir uma outra função,  $j$ , de  $A$  em  $\mathbb{N}$  que, a cada

$x \in A$ , faz corresponder o número natural  $f(x) \cdot g(x)$ ; de forma equivalente

$$j : A \rightarrow \mathbb{N}$$

$$j = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 9 & 210 & 30 & 154 \end{pmatrix}.$$

A função  $j$  diz-se a *função produto de  $f$  por  $g$*  e nota-se  $f \cdot g$ .

Continuando, pensemos desta vez na subtracção. Aqui devemos ser mais cautelosos, dado que o conjunto dos números naturais  $\mathbb{N}$  não é fechado para a subtracção, isto é,

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad n - m \notin \mathbb{N}.$$

Neste caso, a função

$$x \mapsto f(x) - g(x)$$

não está definida no conjunto  $A$  visto que

$$a \in A \quad \text{e} \quad f(a) - g(a) = -8 \notin \mathbb{N};$$

consideremos então o subconjunto  $C$  de  $A$  definido por

$$C = \{x \in A; \quad f(x) - g(x) \in \mathbb{N}\} = \{b, d\}.$$

Podemos agora definir a função

$$\varphi : C \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} b & d \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

Uma tal função  $\varphi$  chama-se a *função diferença de  $f$  e  $g$*  e designa-se por  $f - g$ . É importante notar que, muito embora as funções  $f$  e  $g$  tenham por domínio o conjunto  $A$ , por "insuficiência" do conjunto de chegada, a nova função  $f - g$  está apenas definida num subconjunto próprio de  $A$ .

A situação piora ao pensarmos na divisão: com efeito, tem-se

$$\left\{ x \in A; \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{N} \right\} = \emptyset$$

e, neste caso, não tem sentido<sup>1</sup> falar do quociente de  $f$  por  $g$ .

Em resumo, podemos concluir que:

---

<sup>1</sup>Recordamos que convencionámos no capítulo *Funções* que quer o domínio quer o conjunto de chegada de uma qualquer função são conjuntos não vazios.

- O facto do conjunto de chegada  $B$  ser um conjunto de números permite-nos “gerar” novas funções inspiradas na estrutura de  $B$ .
- Os problemas decorrentes seriam evitados se, em lugar de tomarmos para conjunto de chegada o conjunto  $\mathbb{N}$  (demasiado “pequeno”), tivéssemos tomado o conjunto  $\mathbb{R}$ . No caso da divisão, há evidentemente uma questão inultrapassável que resulta da impossibilidade de dividir por zero, isto é,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow g(x) \neq 0.$$

No que se segue, vamos portanto considerar funções reais, ou seja, funções com conjunto de chegada igual a  $\mathbb{R}$ .

Além disso, e tendo em vista as aplicações, interessam-nos sobretudo funções cujo domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  (funções de variável real). Em Física, por exemplo, é frequente considerar funções que dependem do tempo, cujos domínios naturais são  $[0, +\infty[$  ou  $\mathbb{R}$ .

Então, dado um conjunto não vazio  $D \subset \mathbb{R}$ , vamos considerar funções  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Recordemos que chamamos *gráfico<sup>2</sup> de  $f$*  ao conjunto de pares ordenados definido por

$$G_f = \{(x, f(x)); x \in D\},$$

tem-se  $G_f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ .

Porque o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  é interpretado geometricamente como o conjunto dos pontos de uma recta, o gráfico de uma função real de variável real pode ser representado geometricamente como um subconjunto do plano.

Sabemos que, por exemplo, o gráfico de uma função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  e cuja expressão designatória é um polinómio de grau  $\leq 1$  é representado por uma recta (não vertical) do plano  $xOy$ , enquanto que, se a expressão designatória de  $f$  é um polinómio de grau 2, a representação geométrica do gráfico é uma parábola.

*Exemplo 1.1.*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Mais geralmente, se  $f : A \rightarrow B$ , chamamos gráfico de  $f$  ao subconjunto de  $A \times B$  definido por  $G_f = \{(x, f(x)); x \in A\}$ .



$f$  diz-se a função constante e igual a 1. A interpretação geométrica do seu gráfico,

$$G_f = \{(x, 1); x \in \mathbb{R}\}$$

é a seguinte

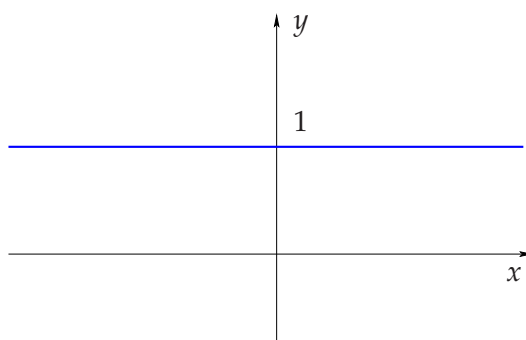


Figura 1: Gráfico da função constante e igual a 1.

É claro que esta não é a única função constante definida em  $\mathbb{R}$ ; há uma infinidade de funções constantes, tantas quantas os números reais.

Assim, e mais geralmente, dado um número real  $a$ , chamamos *função constante e igual a  $a$*  à definida por

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ F(x) &= a \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A representação geométrica do gráfico de  $F$  é a recta horizontal que passa pelo ponto  $(0, a)$ .

*Exemplo 1.2.*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

é a função identidade em  $\mathbb{R}$ ; como sabemos, a interpretação geométrica do seu gráfico é a recta bissectriz dos quadrantes ímpares, isto é, a recta que passa pelos pontos  $(0, 0)$  e  $(1, 1)$ .

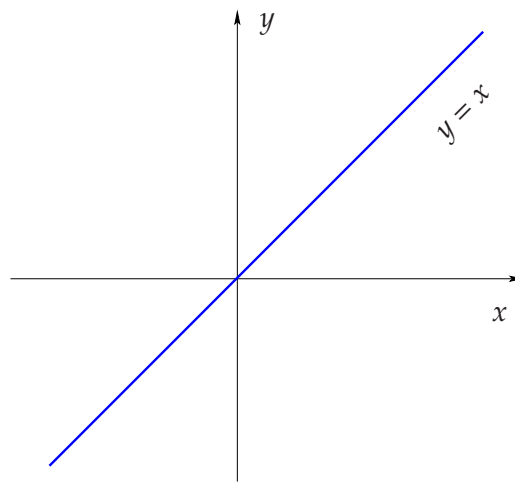
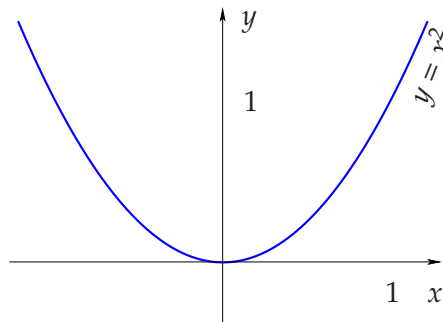


Figura 2: Gráfico da função identidade.

*Exemplo 1.3.*

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = x^2;$$

Figura 3: Gráfico de  $x \mapsto x^2$ .

*Exemplo 1.4.*

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = e^x,$$

dita *função exponencial*.

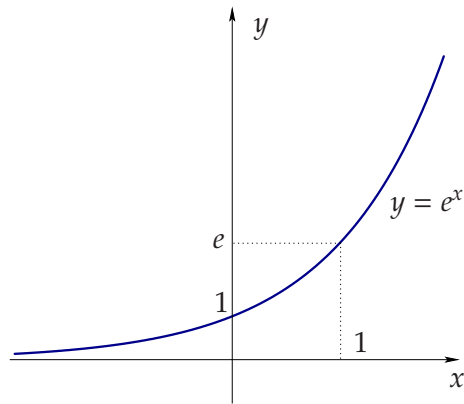


Figura 4: Gráfico da função exponencial.

Com  $a \in ]0, +\infty[$ , a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

diz-se a *função exponencial de base  $a$* .

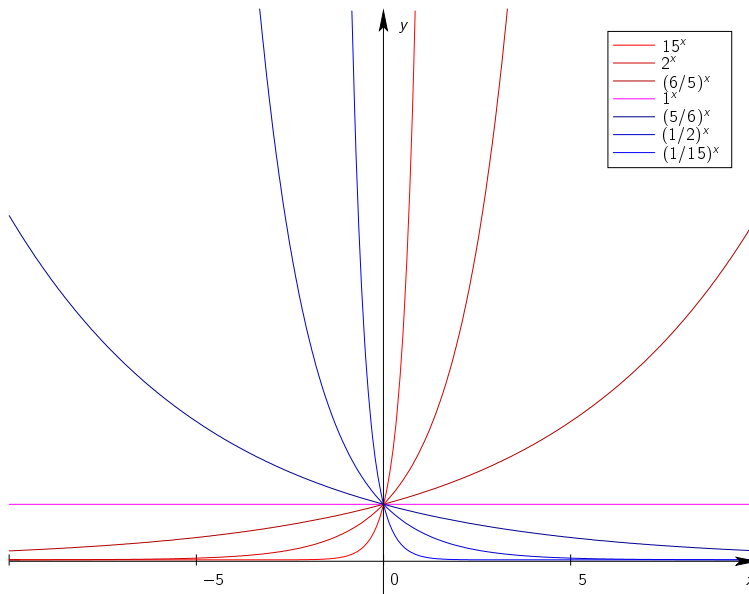


Figura 5: Gráfico da exponencial de base  $a$  para vários valores de  $a$ . Notar que para  $a > 1$  a função é crescente, para  $a = 1$  é constante e igual a 1, e para  $0 < a < 1$  é decrescente.

Para simplificar a linguagem, no que se segue identificaremos o gráfico de uma dada função com a respectiva interpretação geométrica. Assim, por exemplo, diremos que o gráfico da função constante igual a 0 “é” o eixo dos  $xx$ .

## 2 Operações algébricas

Observámos antes que o facto de termos em  $\mathbb{R}$  (conjunto de chegada) definidas operações de adição, multiplicação, diferença e divisão, vai permitir definir novas funções.

Começando com o caso da adição, tomemos

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) &= x + x^2. \end{aligned}$$

Atendendo aos exemplos 1.2 e 1.3 atrás, podemos escrever

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = g(x) + h(x)$$

e, em linguagem corrente, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , o valor de  $\varphi(x)$  é obtido somando os números reais  $g(x)$  e  $h(x)$ ; diremos que  $\varphi$  é a função soma de  $g$  e  $h$ .

Mais geralmente, suponhamos dadas duas funções

$$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad g : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Para podermos falar da soma  $f(x) + g(x)$  é necessário (como é óbvio!) que existam ambos os números reais  $f(x)$  e  $g(x)$ ; quer dizer, é necessário que  $x \in D$  (o que garante a existência de  $f(x)$ ) e que  $x \in E$  (para que exista  $g(x)$ ). Conclusão: precisamos que  $D \cap E \neq \emptyset$  e  $x \in D \cap E$ ; então sim, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} D \cap E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + g(x). \end{aligned}$$

Pela mesma razão, se  $D \cap E \neq \emptyset$ , podemos também definir as duas aplicações seguintes:

$$\begin{aligned} D \cap E &\rightarrow \mathbb{R} & D \cap E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \cdot g(x) & \text{e} & & x &\mapsto f(x) - g(x) \end{aligned}$$

**Definição 1.** *Sejam  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções dadas tais que  $D \cap E \neq \emptyset$ .*

1. Chamamos soma de  $f$  e  $g$ , que designamos por  $f + g$ , à função definida por

$$f + g : D \cap E \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\forall x \in D \cap E \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

2. Chamamos diferença de  $f$  e  $g$ , que designamos por  $f - g$ , à função tal que

$$f - g : D \cap E \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\forall x \in D \cap E \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

3. Damos o nome de produto de  $f$  e  $g$ , que designamos por  $f \cdot g$ , à função dada por

$$f \cdot g : D \cap E \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\forall x \in D \cap E \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Uma vez que a adição e a multiplicação são operações comutativas, tem-se

$$f + g = g + f \quad \text{e} \quad f \cdot g = g \cdot f;$$

além disso,

$$f - g = g - f \quad \Leftrightarrow \quad f = g \quad \Leftrightarrow \quad [E = D \wedge (\forall x \in D \ f(x) = g(x))].$$

No caso da divisão temos um pequeno problema, que é consequência da impossibilidade da divisão pelo número real zero. Com efeito, para que exista o número real  $\frac{f(x)}{g(x)}$  é necessário (e suficiente) que se verifiquem as três condições seguintes:

- existe  $f(x)$   $\Leftrightarrow$   $x \in D$ ;
- existe  $g(x)$   $\Leftrightarrow$   $x \in E$ ;
- $g(x) \neq 0$ .

Assim,

**Definição 2.** Dadas funções  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , seja o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}; \ x \in D \cap E \quad \wedge \quad g(x) \neq 0\}.$$

Se  $A \neq \emptyset$ , chamamos quociente de  $f$  por  $g$ , que designamos por  $\frac{f}{g}$ , a função dada por

$$\frac{f}{g} : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in A \quad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

*Exemplo 2.1.* Sejam

$$\begin{aligned} f, g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= x + x^2 \quad \wedge \quad g(x) = x. \end{aligned}$$

Tem-se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} (f + g)(x) = 2x + x^2 \\ (f - g)(x) = x^2 \\ (f \cdot g)(x) = x(x + x^2) \end{cases}$$

Quanto à função quociente  $\frac{f}{g}$ , tem por domínio o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}; g(x) = x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e é dada por

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x + x^2}{x} = x + 1.$$

Já a função  $\frac{g}{f}$  está definida em

$$B = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = x + x^2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}; x(1 + x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$$

e

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \quad \left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{1}{1 + x}.$$

*Exemplo 2.2* (Funções polinomiais). Seja a função

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) &= 2 + 3x + x^2 - x^3. \end{aligned}$$

$\varphi$  é função definida em  $\mathbb{R}$  e a respectiva expressão designatória é um polinómio de grau 3 (com coeficientes reais); por estas razões,  $\varphi$  diz-se uma função polinomial.

$\varphi$  é soma de funções definidas em  $\mathbb{R}$  em que, por sua vez, cada parcela é uma função constante ou um produto (de dois ou mais factores) em que cada factor é a função identidade ou uma função constante.

Mais geralmente,

**Definição 3** (Função polinomial). Chamamos função polinomial a toda a função  $P$  definida em  $\mathbb{R}$  e para a qual existem  $m \in \mathbb{N}$  e números reais  $a_0, a_1, \dots, a_m$  tais que

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m = \sum_{j=0}^m a_jx^j.$$

*Exemplo 2.3* (Funções racionais). Consideremos a função

$$\begin{aligned} \psi : D \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in D \quad \psi(x) &= \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x}. \end{aligned}$$

A expressão designatória que define  $\psi$  é um quociente de dois polinómios e, por este motivo,  $\psi$  diz-se uma função racional.

O domínio  $D$  de  $\psi$  é o conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R}; \quad x^2 + 2x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}; \quad x(x + 2) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}.$$

Mais geralmente,

**Definição 4** (Função racional). Chamamos função racional a toda a função  $R$  definida em  $D \subset \mathbb{R}$  que é quociente de duas funções polinomiais.

De forma equivalente,  $R$  é função racional sse existirem duas funções polinomiais  $P$  e  $Q$  tais que, com

$$D = \{x \in \mathbb{R}; Q(x) \neq 0\},$$

se tem

$$\forall x \in D \quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

### 3 Composições elementares e gráficos

Suponhamos dadas duas funções  $f$  e  $g$  em que  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é qualquer e, com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) &= \alpha x + \beta, \end{aligned}$$

isto é,  $g$  é uma função polinomial de grau zero (se  $\alpha = 0$ ) ou um (se  $\alpha \neq 0$ ).

Consideremos então as funções compostas  $g \circ f$  e  $f \circ g$ . Tem-se

$$\begin{aligned} g \circ f : D \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (g \circ f)(x) &= \alpha f(x) + \beta \end{aligned}$$

enquanto que, se

$$E = \{x \in \mathbb{R}; g(x) = \alpha x + \beta \in D\} \neq \emptyset,$$

a função  $f \circ g$  tem por domínio o conjunto  $E$  e

$$\forall x \in E \quad (f \circ g)(x) = f(ax + \beta).$$

Supondo conhecido o gráfico da função  $f$ , o objectivo deste parágrafo é determinar, de forma expedita, o gráfico de cada uma das funções  $f \circ g$  e  $g \circ f$ .

Para tal, vamos considerar separadamente cada uma das composições.

### 3.1 Função $g \circ f$

Suponhamos então dada uma função  $f$  definida num intervalo<sup>3</sup>  $]a, b[$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ) e com valores em  $\mathbb{R}$ , cujo gráfico é representado como na figura seguinte (não nos preocupemos com a expressão designatória que define a função  $f$ ).

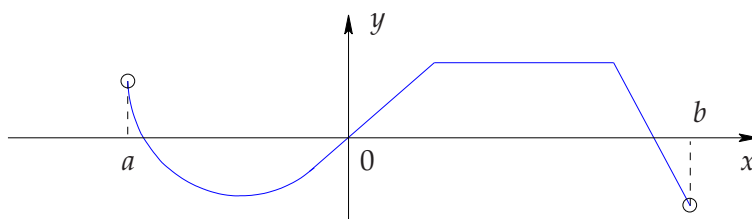


Figura 6: Gráfico de  $f$ .

Em primeiro lugar, tomemos  $\alpha = \beta = 1$ , isto é,

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) &= x + 1; \end{aligned}$$

vem

$$\begin{aligned} g \circ f : ]a, b[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in ]a, b[ \quad (g \circ f)(x) &= f(x) + 1 \end{aligned}$$

e, abreviadamente, escreveremos

$$g \circ f = f + 1.$$

Se  $x \in ]a, b[$ , o par ordenado  $(x, f(x))$  é um ponto do gráfico de  $f$  e, portanto,  $(x, f(x) + 1)$  é ponto do gráfico de  $f + 1$ . Por outras palavras, todo o ponto do gráfico de  $f + 1$  provém de um (e um só) ponto do gráfico de  $f$  que foi “empurrado para cima” uma unidade.

<sup>3</sup>O caso geral em que  $f$  tem por domínio um conjunto  $D \neq \emptyset$  deduz-se sem dificuldade.



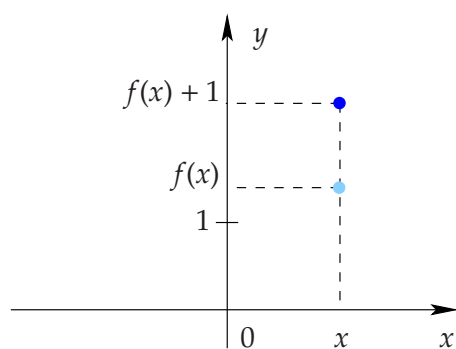


Figura 7: Pontos  $(x, f(x))$  e  $(x, f(x) + 1)$ .

Rigorosamente, o gráfico de  $f + 1$  é obtido por uma translação no plano do gráfico de  $f$  segundo o vector  $(0, 1)$ .

Tem-se

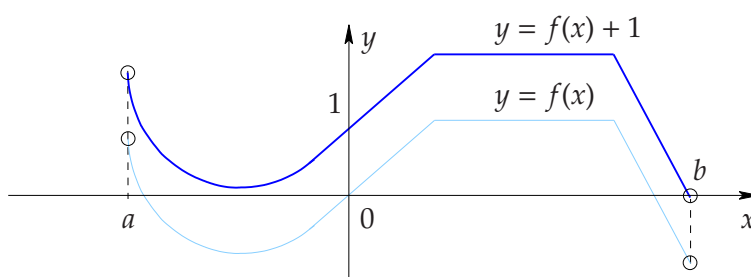


Figura 8: Gráficos de  $f$  e  $f + 1$ .

Naturalmente que o raciocínio para a função  $f + 1$  se mantém válido para qualquer outro valor real de  $\beta$ : se  $\beta \in \mathbb{R}$ , o gráfico da função  $f + \beta$

$$D \ni x \mapsto f(x) + \beta \in \mathbb{R}$$

é obtido por translação do gráfico de  $f$  segundo o vector  $(0, \beta)$ .

Note-se que, com

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x + \beta,$$

a função composta  $g \circ f$  é igual à soma de  $f$  com a função constante igual a  $\beta$ .

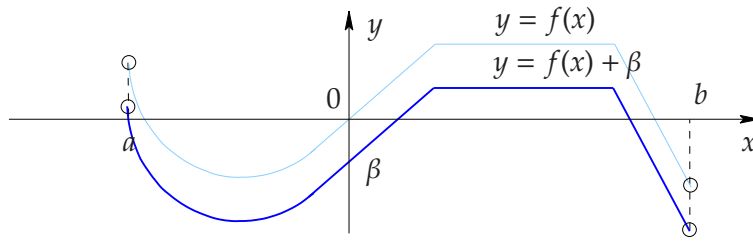


Figura 9: Gráficos de  $f$  e  $f + \beta$  ( $\beta < 0$ ).

Voltemos a tomar para  $g$  uma função particular; agora  $\beta = 0$  e  $\alpha = 2$ , ou seja

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 2x.$$

A função  $g \circ f$  vem dada por

$$\forall x \in ]a, b[ \quad (g \circ f)(x) = 2f(x)$$

e, neste caso, para cada  $x \in ]a, b[$ ,  $(x, f(x))$  é ponto do gráfico de  $f$  sse  $(x, 2f(x))$  é ponto do gráfico de  $g \circ f$ .

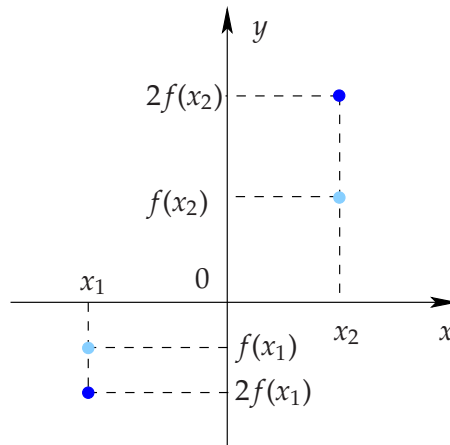


Figura 10: Pontos  $(x, f(x))$  e  $(x, 2f(x))$ .

Isto permite, de imediato, concluir que o gráfico de  $2f$  é dado por:

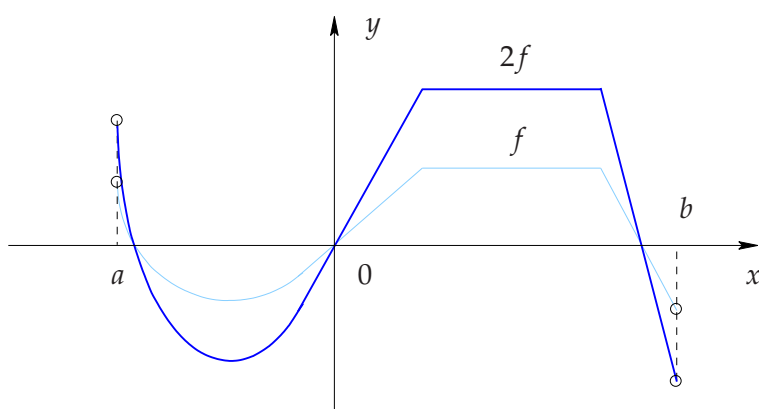


Figura 11: Gráficos de  $f$  e  $2f$ .

Mais geralmente, com  $\alpha > 0$  e mantendo  $\beta = 0$ , obtemos

$$\forall x \in ]a, b[ \quad (g \circ f)(x) = \alpha f(x)$$

e, tal como no caso anterior, reconhecemos agora que se tem

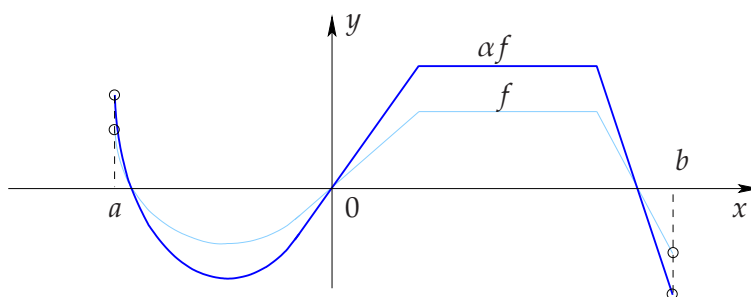


Figura 12: Gráficos de  $f$  e  $\alpha f$  ( $\alpha > 1$ ).

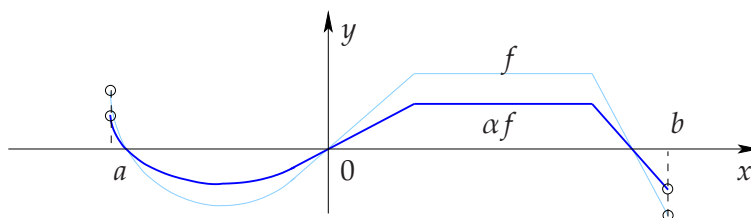


Figura 13: Gráficos de  $f$  e  $\alpha f$  ( $0 < \alpha < 1$ ).

É claro que, se  $\alpha = 1$ , se tem  $\alpha f = f$ .

Mas, e se  $\alpha$  for um número real negativo? Começemos então por considerar  $\alpha = -1$  (e  $\beta = 0$ ), o que corresponde a tomar para  $g \circ f$  a função

$$]a, b[ \ni x \mapsto -f(x),$$

função que notaremos por  $-f$ .

Uma vez que, dado  $c \in ]a, b[$ , se tem

$$(c, d) \text{ pertence ao gráfico de } f \Leftrightarrow (c, -d) \text{ pertence ao gráfico de } -f$$

é imediato reconhecer que o gráfico de  $-f$  é obtido do de  $f$  por simetria em relação ao eixo dos  $xx$ :

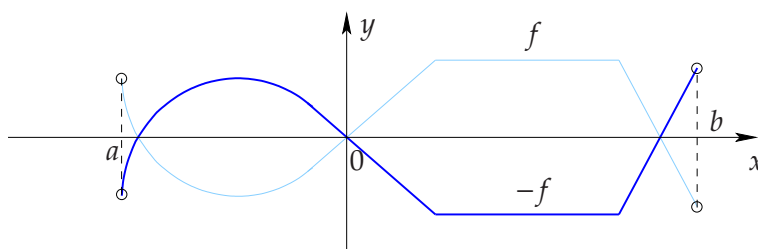


Figura 14: Gráficos de  $f$  e  $-f$ .

Finalmente, o caso em que  $\alpha \in ]-\infty, 0[ \setminus \{-1\}$  pode reduzir-se aos dois anteriores, bastando ter em conta a igualdade

$$\forall \alpha < 0 \quad \alpha = -|\alpha|.$$

Concluimos portanto, que se  $\alpha < 0$ , o gráfico de  $\alpha f$  é obtido do gráfico

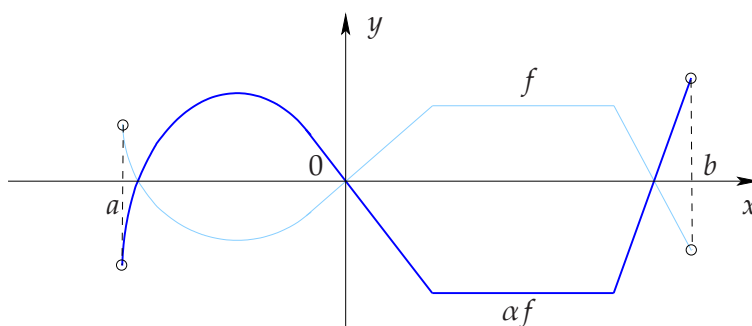


Figura 15: Gráficos de  $f$  e  $\alpha f$  ( $\alpha < -1$ ).

de  $f$  após duas transformações no plano: simetria em relação ao eixo

dos  $xx$  e  $(x, y) \mapsto (x, |a|y)$ ; é além disso claro que a ordem pela qual estas transformações são realizadas é arbitrária.

O caso geral é, agora, consequência imediata das considerações anteriores.

Com efeito, dados  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ , sejam  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g$  definida em  $\mathbb{R}$  por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \alpha x + \beta$$

e

$$\begin{aligned} g \circ f &: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in D \quad (g \circ f)(x) &= \alpha f(x) + \beta \end{aligned}$$

(ou, abreviadamente,  $g \circ f = \alpha f + \beta$ ). Conhecido o gráfico de  $f$ , podemos sem dificuldade esboçar o gráfico de  $\alpha f + \beta$ , para o que consideramos as transformações seguintes:

$$G_f \ni (x, y) \mapsto (x, \alpha y) \mapsto (x, \alpha y + \beta) \in G_{\alpha f + \beta}.$$

Assim, por exemplo:

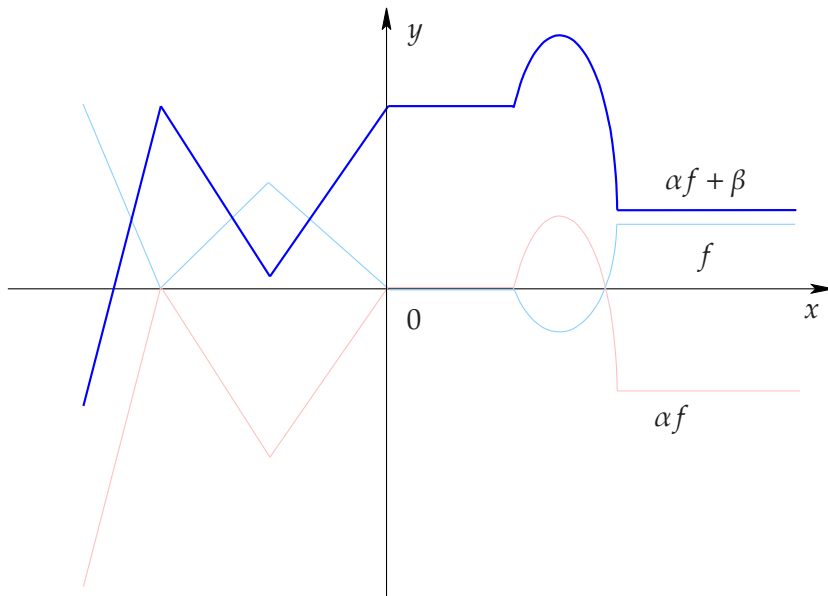


Figura 16: Gráficos<sup>4</sup>de  $f$ ,  $\alpha f$  e  $\alpha f + \beta$  ( $\alpha < 0 \wedge \beta > 0$ ).

<sup>4</sup>Notar que a função  $f$  nesta figura é distinta da introduzida na figura 6 e usada nas figuras 8, 9, 11, 12, 13, 14 e 15.

É claro que, se  $\alpha = 0$  (caso excluído antes), então

$$\forall x \in D \quad (g \circ f)(x) = \beta$$

isto é,  $g \circ f$  é a função definida em  $D$ , constante e igual a  $\beta$ , cujo gráfico conhecemos e é independente do gráfico de  $f$ .

### 3.2 Função $f \circ g$

Dada uma função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e conhecido o gráfico de  $f$ , o objectivo é esboçar o gráfico de  $f \circ g$ , onde  $g$  é a função afim tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \alpha x + \beta$$

com  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Para abordar o problema, comecemos por considerar o seguinte exemplo:

*Exemplo 3.1.* Seja  $f : [-2, 0] \cup ]3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x \in [-2, 0], \\ 2 - x & \text{se } x \in ]3, 4]. \end{cases}$$

O gráfico de  $f$  é dado pela figura seguinte:

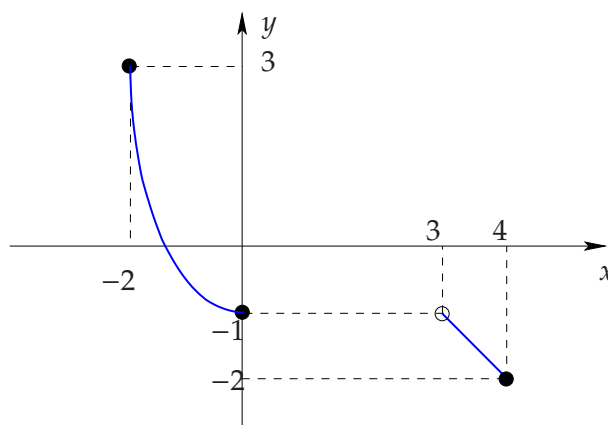


Figura 17: Gráfico de  $f$ .

Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{x}{2}$$

(isto é,  $\alpha = \frac{1}{2}$  e  $\beta = 0$ ).

Designando por  $A$  o domínio de  $f \circ g$ , vem

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{x}{2} \in D \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}; -2 \leq \frac{x}{2} \leq 0 \vee 3 < \frac{x}{2} \leq 4 \right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; -4 \leq x \leq 0 \vee 6 < x \leq 8\} = [-4, 0] \cup ]6, 8]. \end{aligned}$$

Sem dificuldade, poderíamos agora determinar a expressão designatória que define a função  $f \circ g$ ; mas é precisamente este trabalho que se pretende evitar e, mesmo assim, pretendemos esboçar o gráfico de

$$\begin{aligned} f \circ g &: A \rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in A \quad (f \circ g)(x) &= f\left(\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Observemos então que, de forma equivalente, o conjunto  $A$  é dado por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}; \exists y \in D \quad \frac{x}{2} = y \right\} = \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in D \quad x = 2y\} = \{2y; y \in D\},$$

o que mostra que se tem

$$a \in D \quad \Leftrightarrow \quad 2a \in A$$

e, portanto,

$$\forall a \in D \quad (f \circ g)(2a) = f(a).$$

Concluimos deste modo que, dado  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(a, b)$  pertence ao gráfico de  $f$  sse  $(2a, b)$  pertence ao gráfico de  $f \circ g$ .

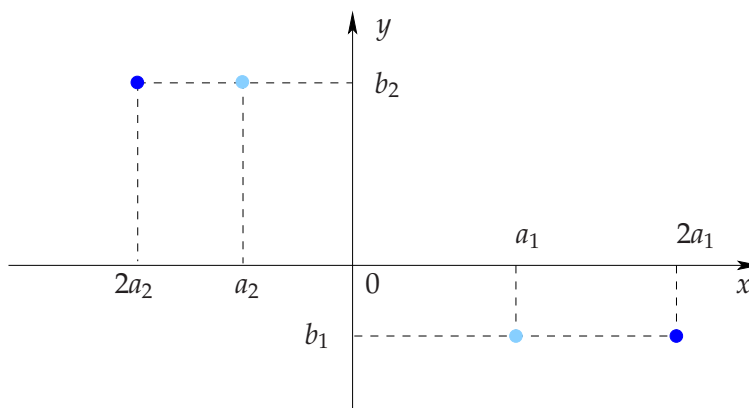


Figura 18: Pontos  $(a, b)$  e  $(2a, b)$ .

e, finalmente,

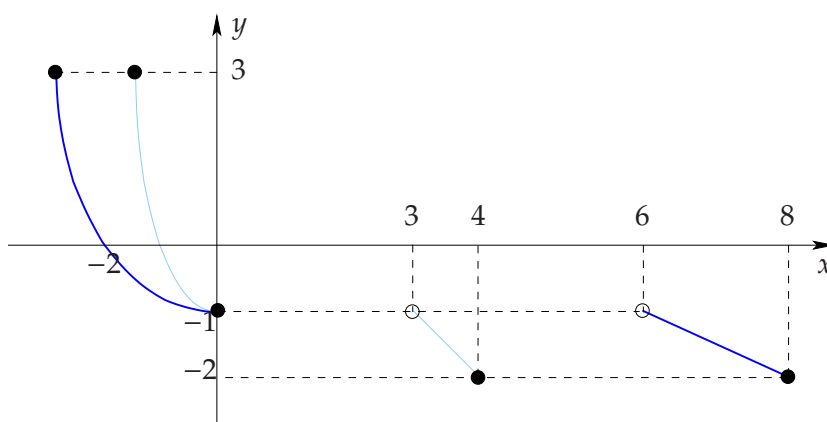


Figura 19: Gráficos de  $x \mapsto f(x)$  e  $x \mapsto f \circ g(x) = f(2x)$ .

Para maior clareza do raciocínio, seja  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada ( $a, b \in \mathbb{R}; a < b$ ) cujo gráfico é dado como anteriormente na figura 6.

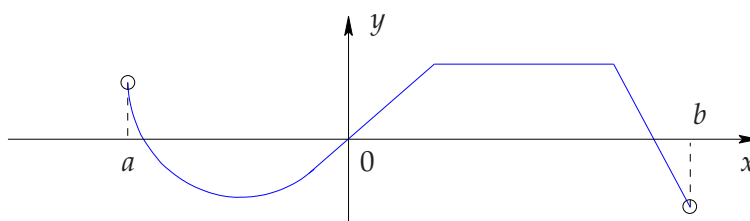


Figura 20: Gráfico de  $f$ .

Consideremos, em primeiro lugar,  $\alpha > 0$  e  $\beta = 0$ ; por outras palavras, seja

$$f \circ g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in A \quad (f \circ g)(x) = f(\alpha x).$$

Tem-se

$$A = \{x \in \mathbb{R}; \alpha x \in ]a, b[ \} = \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in ]a, b[ \quad \alpha x = y \}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}; \exists y \in ]a, b[ \quad x = \frac{y}{\alpha} \right\} = \left\{ \frac{y}{\alpha}; y \in ]a, b[ \right\}$$

ou ainda, e visto que  $\alpha > 0$ ,

$$A = \{x \in \mathbb{R}; a < \alpha x < b\} = \left] \frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\alpha} \right[.$$



Então, sabemos que

$$c \in ]a, b[ \Leftrightarrow \frac{c}{\alpha} \in A$$

e, conseqüentemente,

$$(c, d) \text{ pertence ao gráfico de } f \Leftrightarrow \left(\frac{c}{\alpha}, d\right) \text{ pertence ao gráfico de } f \circ g.$$

Observemos ainda que, tomando  $c > 0$ , se tem

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow c < \frac{c}{\alpha}$$

e

$$\alpha > 1 \Rightarrow c > \frac{c}{\alpha}.$$

De forma incorrecta mas sugestiva, isto significa que, se  $0 < \alpha < 1$ , o domínio  $A$  de  $f \circ g$  corresponde a uma “dilatação” do domínio  $D$  de  $f$ ; pelo contrário, se  $\alpha > 1$ , o domínio  $A$  de  $f \circ g$  corresponde a um “encolhimento” de  $D$ .

Atendendo a estas considerações, concluímos

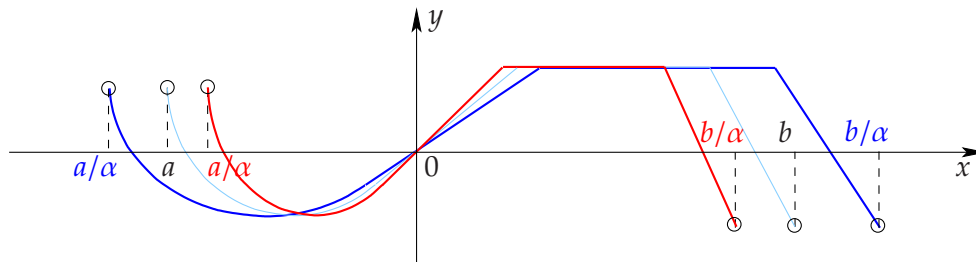


Figura 21: Gráficos de  $x \mapsto f \circ g(x) = f(ax)$  ( $0 < \alpha < 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha > 1$ ).

É evidente que no caso  $\alpha = 1$  se tem  $f \circ g = f$ .

Para estudarmos o caso  $\alpha < 0$  (mantendo  $\beta = 0$ ), comecemos por considerar  $\alpha = -1$ , isto é, consideremos a função

$$\begin{aligned} f \circ g : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in A \quad (f \circ g)(x) &= f(-x). \end{aligned}$$

Neste caso, vem

$$A = \{x \in \mathbb{R}; -x \in ]a, b[ \} = ]-b, -a[$$

e sabemos que

$$(c, d) \text{ pertence ao gráfico de } f \Leftrightarrow (-c, d) \text{ pertence ao gráfico de } f \circ g.$$

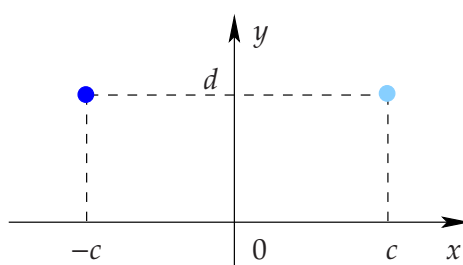


Figura 22: Pontos  $(c, d)$  e  $(-c, d)$ .

Então, a restrição de  $f \circ g$  ao intervalo  $] - b, 0]$ ,  $(f \circ g)|_{]-b,0]}$ , obtém-se da restrição de  $f$  ao intervalo  $[0, b[$ ,  $f|_{[0,b[}$ , como sugerido na figura seguinte

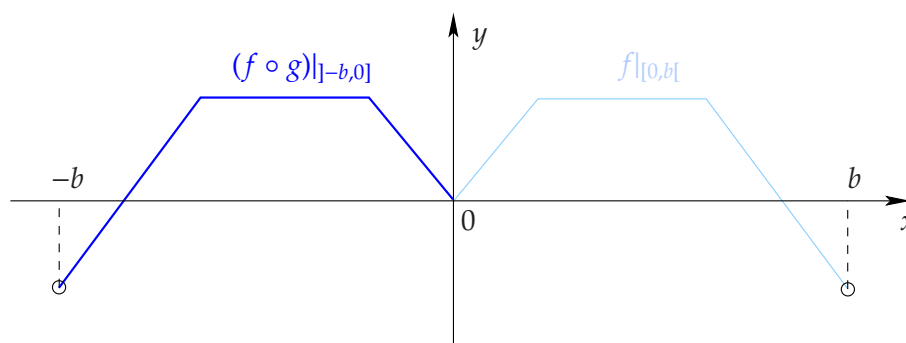


Figura 23: Gráficos de  $f|_{[0,b[}$  e  $(f \circ g)|_{]-b,0]}$ .

De forma análoga, obtém-se a restrição de  $f \circ g$  ao intervalo  $[0, -a[$  a partir da restrição de  $f$  ao intervalo  $]a, 0]$ , como sugerido na figura seguinte

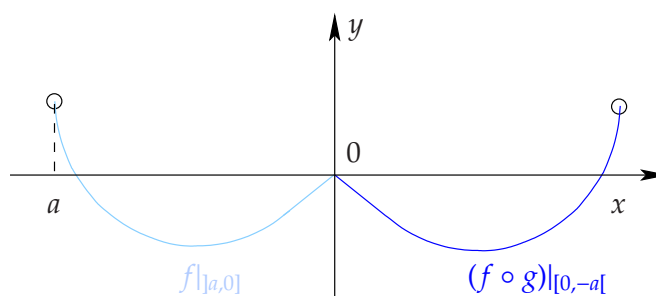


Figura 24: Gráfico de  $f|_{]a,0]}$  e  $(f \circ g)|_{[0,-a[}$ .

Por fim, o gráfico da função  $f \circ g$  vem

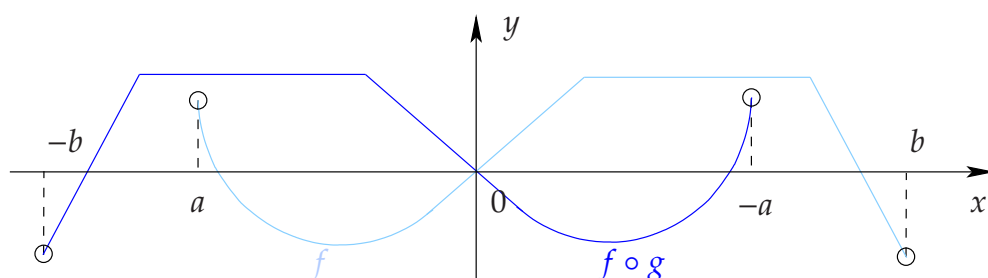


Figura 25: Gráfico de  $f$  e  $f \circ g$ .

Geometricamente, podemos afirmar que o gráfico da função  $f \circ g$  é o simétrico em relação ao eixo dos  $yy$  do gráfico de  $f$ .

Como em 3.1, o caso em que  $\alpha < 0$  reduz-se aos dois casos estudados acima, tendo em conta a igualdade

$$\forall \alpha < 0 \quad \alpha = -|\alpha|.$$

Assim, e tomando (por exemplo)  $\alpha < -1$ , temos e, então,

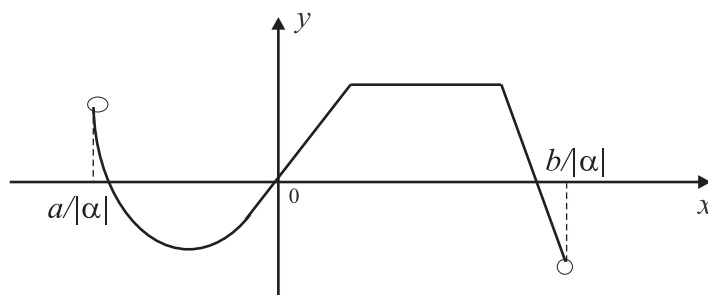


Figura 26: Gráfico de  $f(|\alpha|x)$  ( $|\alpha| > 1$ ).

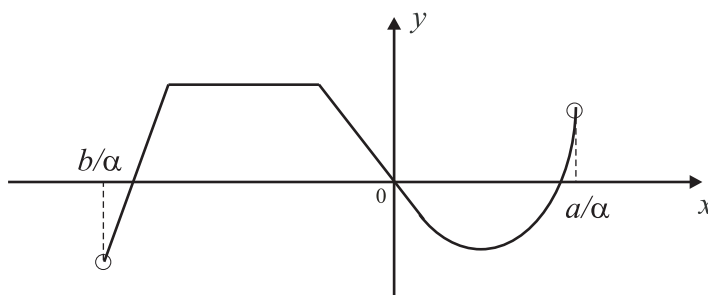


Figura 27: Gráfico de  $f \circ g$  ( $\alpha < -1$ ).

Analisemos agora o caso em que  $\alpha = 1$  e  $\beta$  é um número real qualquer; sem perda de generalidade (visto que  $\beta$  é arbitrário), suponhamos que a função  $g$  é dada por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x - \beta.$$

*Exemplo 3.2.* Seja  $f : D = [-1, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in [-1, 1], \\ x - 2 & \text{se } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

o gráfico de  $f$  vem dado por

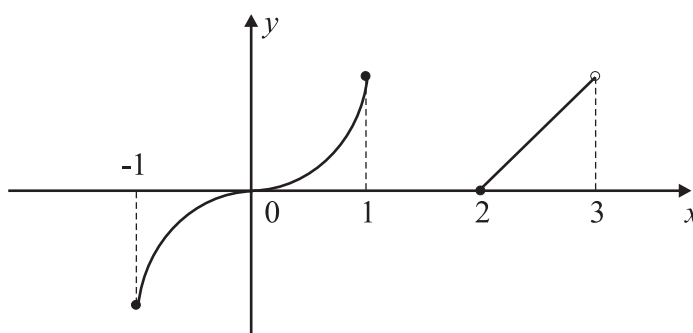


Figura 28: Gráfico de  $f$ .

Considerando  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x - \frac{1}{2},$$

o objectivo é esboçar o gráfico da função composta  $f \circ g$ , sem explicitar a respectiva expressão designatória.

Se designarmos por  $A$  o domínio da função  $f \circ g$ , temos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}; g(x) \in D\} = \left\{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x - \frac{1}{2} \leq 1 \vee 2 \leq x - \frac{1}{2} < 3\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}; -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \vee \frac{5}{2} \leq x < \frac{7}{2}\right\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]. \end{aligned}$$

Geometricamente, diremos que o conjunto  $A$  é obtido de  $D$  pela translação (em  $\mathbb{R}$ ) segundo o vector  $\frac{1}{2}$ :

Analicamente, tem-se,

$$\forall x \in A \quad (f \circ g)(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

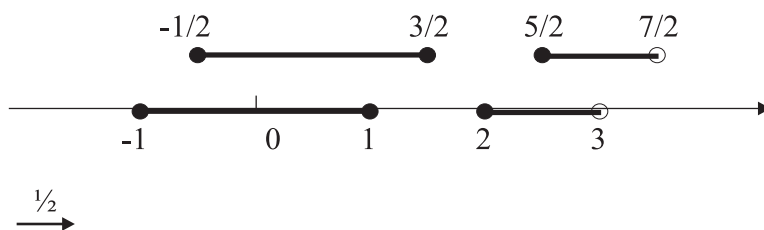


Figura 29: Conjuntos  $A$  e  $D$ .

e  $f \circ g$  diz-se a função translada de  $f$  segundo o vector  $\frac{1}{2}$ .

Voltando ao conjunto  $A$ , podemos escrever de forma equivalente,

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}; \exists y \in D \quad x - \frac{1}{2} = y \right\} = \left\{ y + \frac{1}{2}; y \in D \right\}$$

e conseqüentemente

$(a, b)$  pertence ao gráfico de  $f \Leftrightarrow (a + \frac{1}{2}, b)$  pertence ao gráfico de  $f \circ g$ .

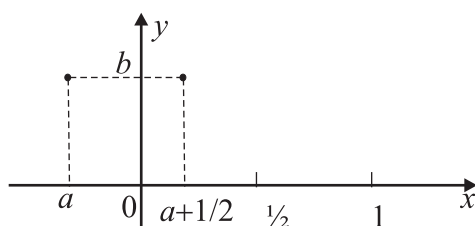


Figura 30: Pontos  $(a, b)$  e  $(a + \frac{1}{2}, b)$ .

Tem-se então

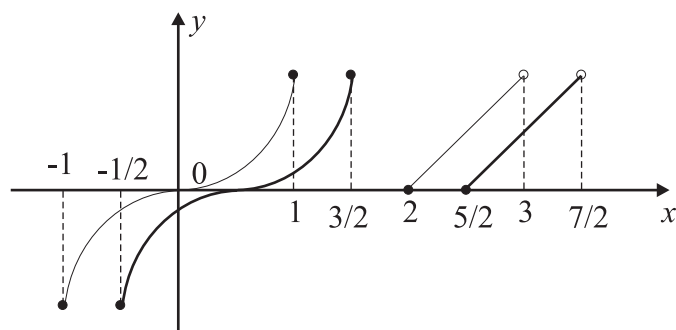


Figura 31: Gráfico de  $f \circ g$ .

o que significa que o gráfico de  $f \circ g$  é obtido pela translação (em  $\mathbb{R}^2$ ) segundo o vector  $(\frac{1}{2}, 0)$  do gráfico de  $f$ .

Mais geralmente,

Sejam  $\beta \in \mathbb{R}$  e duas funções  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x - \beta.$$

A função composta  $f \circ g$  tem por domínio o conjunto  $A$ , onde

$$A = \{x \in \mathbb{R}; \quad x - \beta \in D\} = \{y + \beta; \quad y \in D\}$$

e é dada por

$$\forall x \in A \quad (f \circ g)(x) = f(x - \beta).$$

A  $f \circ g$  damos o nome de *função translada de  $f$  segundo o vector  $\beta$* . Nestas condições, e atendendo a que se tem

$$x \in D \quad \Leftrightarrow \quad x + \beta \in A$$

e

$$\forall x \in D \quad f(x) = (f \circ g)(x + \beta),$$

concluimos que

$(a, b)$  pertence ao gráfico de  $f$   $\Leftrightarrow$   $(a + \beta, b)$  pertence ao gráfico de  $f \circ g$

pelo que o gráfico de  $f \circ g$  é obtido do gráfico de  $f$  pela translação segundo o vector  $(\beta, 0)$ .

Consideremos novamente a função  $f$  que nos tem vindo a servir de exemplo

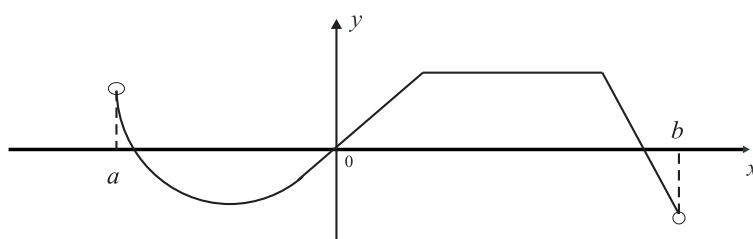


Figura 32: Gráfico de  $f$ .

Nas figuras 33 e 34 apresentamos o esboço do gráfico da função translada de  $f$  segundo o vector  $\beta$ , nos casos em que  $\beta > 0$  e  $\beta < 0$ , respectivamente

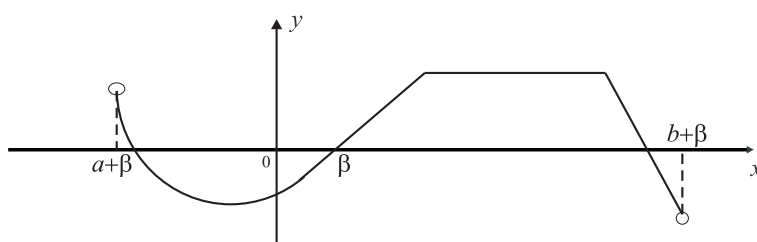


Figura 33: Translatada de  $f$  segundo  $\beta$  ( $\beta > 0$ ).

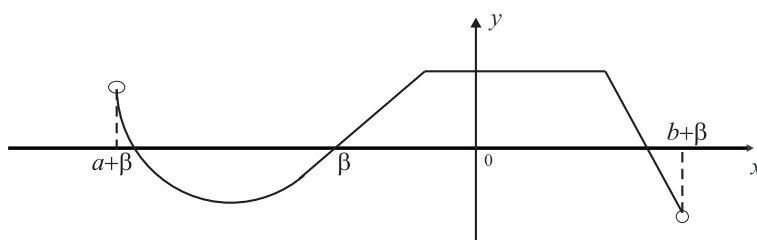


Figura 34: Translatada de  $f$  segundo  $\beta$  ( $\beta < 0$ ).

É evidente que, se  $\beta = 0$ , então  $f \circ g = f$ .

Por fim, tomemos para  $g$  a função definida em  $\mathbb{R}$  por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = ax + \beta,$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Escrevendo

$$ax + \beta = \alpha \left( x + \frac{\beta}{\alpha} \right) = \alpha \left[ x - \left( -\frac{\beta}{\alpha} \right) \right]$$

e com  $\gamma = -\frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{R}$ , vem

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \alpha(x - \gamma).$$

Então, supondo conhecidos quer uma função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , quer o respectivo gráfico, as considerações anteriores permitem, sem dificuldade, esboçar o gráfico de função composta  $f \circ g$ .

Tem-se

$$\begin{aligned} f \circ g : A \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ g)(x) &= f[\alpha(x - \gamma)] \end{aligned}$$

cujo domínio  $A$  é o conjunto definido por

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}; \alpha(x - \gamma) \in D\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in D \alpha(x - \gamma) = y\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in D x = \frac{y}{\alpha} + \gamma\} = \\ &= \{\frac{y}{\alpha} + \gamma; y \in D\} \end{aligned}$$

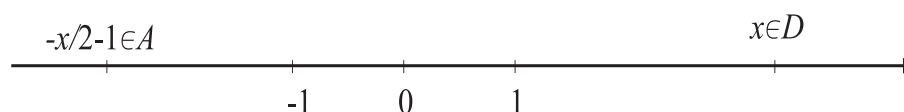


Figura 35: Pontos  $x \in D$  e  $-\frac{x}{2} - 1 \in A$  ( $\alpha = 2, \gamma = -1$ ).

Nestas condições, para qualquer  $x_0 \in D$  e  $y_0 = f(x_0)$ , tem-se

$$(x_0, y_0) \text{ pertence ao gráfico de } f \Leftrightarrow \left(\frac{x_0}{\alpha} + \gamma, y_0\right) \text{ pertence ao gráfico de } f \circ g$$

Consideremos a função real  $f$ , definida no intervalo  $]a, b[$ , cujo gráfico nos é já familiar, e que representamos na figura 36.

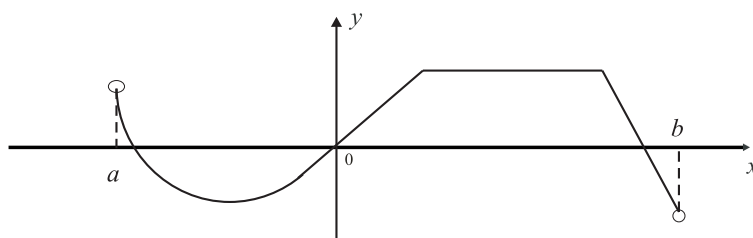


Figura 36: Gráfico de  $f$ .

Seja agora a função  $h$  definida por

$$\begin{aligned} h : A \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in A \quad h(x) &= f(-2x + 3) \end{aligned}$$

Tem-se

$$A = \{x \in \mathbb{R}; -2x + 3 \in ]a, b[ \}$$

ou, na forma mais conveniente para o nosso raciocínio,

$$A = \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in ]a, b[ y = -2x + 3\} = \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in ]a, b[ x = \frac{y - 3}{-2}\} =$$



$$= \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in ]a, b[ \quad x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}\}$$

e, então,

$$A = \{-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}; \quad x \in ]a, b[ \};$$

além disso,

$$\forall x \in ]a, b[ \quad f(x) = h\left(-\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right) \quad (1)$$

Pensando apenas em domínios de  $f$  e de  $h$ , temos

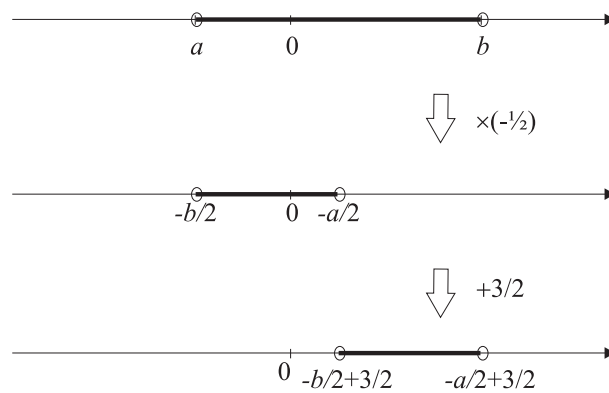


Figura 37: Domínios de  $f$  e  $h$ .

Tendo em conta a proposição (1), podemos finalmente esboçar o gráfico de  $h$ , que representamos na figura 42.

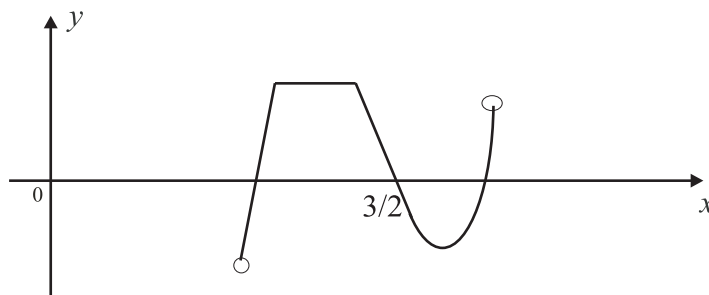


Figura 38: Gráfico de  $h$ .

*Observação*

Ao longo deste parágrafo 3.2 supusemos sempre que  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; vamos explicar a razão de tal procedimento:

Se  $\alpha = 0$ ,  $g$  é a função definida em  $\mathbb{R}$ , constante e igual a  $\beta \in \mathbb{R}$ , pelo que o conjunto  $A$  vem definido por

$$A = \{x \in \mathbb{R}; g(x) = \beta \in D\} .$$

Temos apenas dois casos possíveis:  $\beta$  pertence ao domínio de  $D$  da função  $f$  ou  $\beta$  não pertence a  $D$ !

Se  $\beta \notin D$  então  $A = \emptyset$  e, de acordo com a convenção feita sobre o domínio de uma qualquer função, não tem sentido falar de  $f \circ g$ .

Por outro lado, se  $\beta \in D$  então  $A = \mathbb{R}$  e

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (f \circ g)(x) = f(\beta) ,$$

isto é,  $f \circ g$  é a função constante e igual a  $f(\beta)$ . Neste caso, o gráfico de  $f \circ g$  vem e depende apenas de um único ponto do gráfico de  $f$ : o ponto

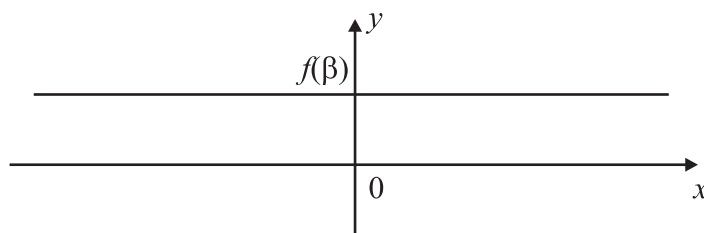


Figura 39: Gráfico de  $f \circ g$ .

$(\beta, f(\beta))$ .

### 3.3 Exemplo

Dados  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $b, c \in \mathbb{R}$ , consideremos a função polinomial  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c .$$

O polinómio que define a função  $f$  tem grau 2 (porque  $a \neq 0$ ), pelo que o gráfico de  $f$  é uma parábola; a questão é saber de que parábola se trata.

Supondo conhecido o gráfico da função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x^2 ,$$

vamos ver como as considerações feitas nos parágrafos 3.1 e 3.2 anteriores permitem facilmente resolver o problema.

Para maior clareza de exposição, comecemos por fixar os valores dos coeficientes  $a, b$  e  $c$ ; seja então, por exemplo,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -2x^2 + 6x - 1 .$$

É imediato que

$$-2x^2 + 6x - 1 = -2\left(x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right)$$

e, por sua vez,

$$x^2 - 3x + \frac{1}{2} = \left[x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} ;$$

finalmente, podemos escrever

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right]$$

e atender ao exposto anteriormente.

Com efeito, designando por  $\varphi$  a função

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) &= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 , \end{aligned}$$

tem-se, de forma equivalente,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = g\left(x - \frac{3}{2}\right) ;$$

por 3.2, sabemos que o gráfico de  $\varphi$  é o translado do gráfico de  $g$  segundo o vector  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ , isto é,

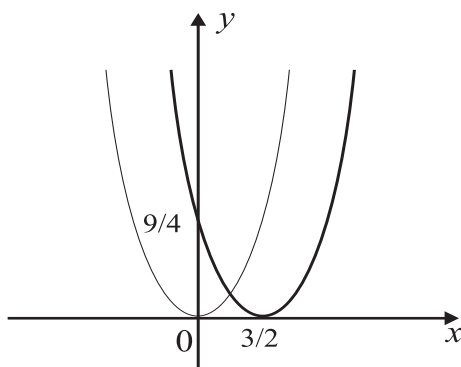


Figura 40: Gráfico de  $\varphi$ .

Continuando, seja agora  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$$

e, em termos de  $\varphi$  (cujo gráfico já conhecemos),

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = \varphi(x) - \frac{7}{4} ;$$

atendendo a 3.1, sabemos que o gráfico de  $\psi$  é o translado do gráfico de  $\varphi$  segundo o vector  $(0, -\frac{7}{4})$ , logo

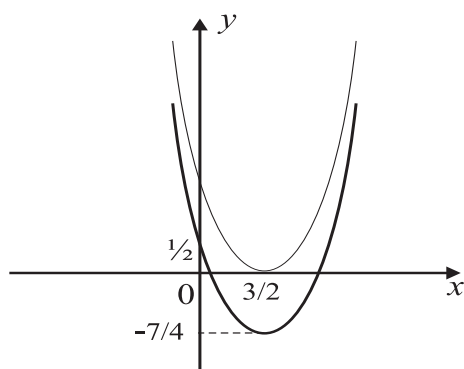


Figura 41: Gráfico de  $\psi$ .

Por fim, temos

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -2\psi(x)$$

e, atendendo novamente a 3.1, podemos esboçar o gráfico de  $f$ .

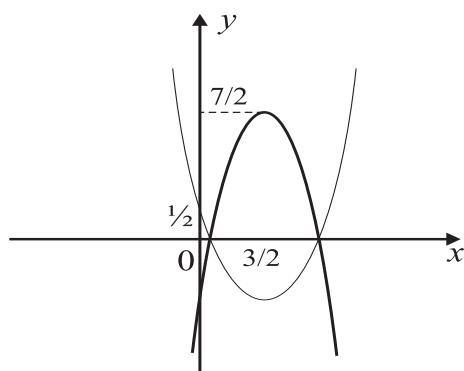


Figura 42: Gráfico de  $f$ .

No caso geral, o procedimento é inteiramente análogo: como  $a \neq 0$ , basta atender às igualdades

$$ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[ \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 \right) + \frac{c}{a} - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 \right] =$$

$$= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] .$$

*Observação*

O problema de esboçar o gráfico de  $f$  está resolvido, mas observemos ainda como a expressão antes obtida nos permite, facilmente, determinar os zeros da função.

Tomando, em primeiro lugar,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -2x^2 + 6x - 1$$

obtivemos

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -2 \left[ \left( x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{7}{4} \right] ;$$

atendendo à diferença de quadrados no segundo membro,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -2 \left( x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \left( x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) .$$

Nestas condições,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x - \frac{3 + \sqrt{7}}{2} = 0 \quad \vee \quad x - \frac{3 - \sqrt{7}}{2} = 0 &\iff \\ &\iff x = \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

o que mostra que a nossa função tem exactamente dois zeros distintos, ou seja,

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} = \left\{ \frac{3 + \sqrt{7}}{2}, \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \right\} .$$

No caso geral, supondo  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  e  $b, c \in \mathbb{R}$ , seja agora

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$$

ou, como acima,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] ,$$

evidentemente equivalente a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] .$$

Para podermos considerar no segundo membro uma diferença de quadrados, impõe-se que se tenha

$$\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$$

ou, visto que  $4a^2 > 0$ ,

$$b^2 - 4ac > 0 .$$

Somos assim conduzidos a considerar os três casos possíveis seguintes:

Caso 1:  $b^2 - 4ac < 0$  .

Então

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$$

e portanto,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0 .$$

De forma equivalente,  $f$  não tem zeros:

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} = \emptyset .$$

Caso 2:  $b^2 - 4ac = 0$  .

Temos

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 ,$$

o que mostra que a função  $f$  tem um zero:

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\} .$$

De forma equivalente, diremos que o polinómio  $ax^2 + bx + c$  tem uma raiz de multiplicidade 2 (ou raiz dupla).

Caso 3:  $b^2 - 4ac > 0$  .

Como anteriormente, podemos escrever

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) \left(x + \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\right) .$$

Há agora um passo mais delicado que é consequência da igualdade

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \sqrt{a^2} = |a| ;$$

assim,

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} \vee x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2|a|} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left( a > 0 \wedge x = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \vee \left( a < 0 \wedge x = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a} \right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .
 \end{aligned}$$

Concluimos que a função  $f$  tem dois zeros distintos, isto é,

$$\{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} = \left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} .$$

Deste modo, demonstrámos a conhecida fórmula resolvente da equação algébrica do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ .

## 4 Funções pares e ímpares

### 4.1 Definição e exemplos

Comecemos por tomar duas funções,  $\varphi$  e  $\psi$ , ambas definidas em  $\mathbb{R}$  e dadas por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} ;$$

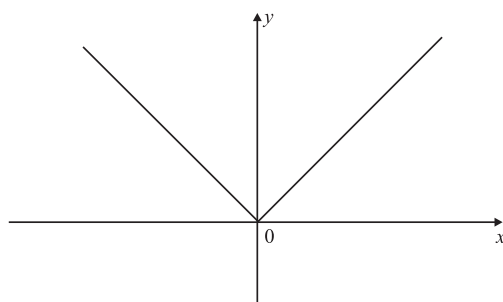
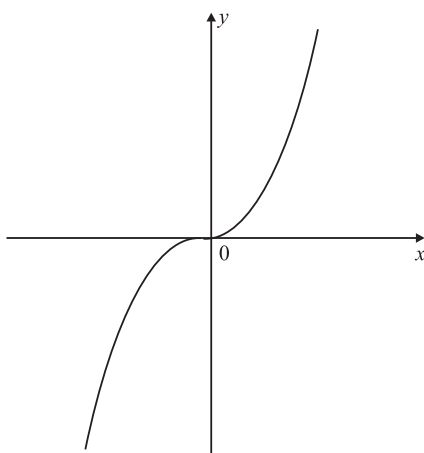
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = x^3 .$$

A mera observação dos gráficos leva-nos a salientar a existência de uma simetria em qualquer um dos casos. Designadamente, o gráfico de  $\varphi$  é simétrico em relação ao eixo dos  $yy$ , o que quer dizer que

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a, b) \in G_\varphi \Rightarrow (-a, b) \in G_\varphi ,$$

enquanto que o gráfico de  $\psi$  é simétrico em relação à origem  $(0,0)$ , isto é,

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad (a, b) \in G_\psi \Rightarrow (-a, -b) \in G_\psi .$$

Figura 43: Gráfico de  $\varphi$ .Figura 44: Gráfico de  $\psi$ .

De forma equivalente, tem-se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(-x) = \varphi(x)$$

e diremos que  $\varphi$  é uma função par, enquanto que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(-x) = -\psi(x)$$

e  $\psi$  diz-se função ímpar.

Mais geralmente, seja  $D \neq \emptyset$  um subconjunto de  $\mathbb{R}$  e  $f$  uma função real definida em  $D$ . De acordo com o que foi dito acima, parece-nos natural dizer que  $f$  é uma função par [resp. ímpar] se e só se

$$\forall x \in D \quad f(-x) = f(x)$$

$$[\text{ resp., } \quad \forall x \in D \quad f(-x) = -f(x)].$$



Ora, em ambas as proposições, está implícito que existe  $f(-x)$  se  $x \in D$ , isto é, que também  $-x$  é elemento do domínio  $D$ . Então, o conjunto  $D$  não pode ser qualquer (não vazio):  $D$  deve verificar a propriedade

$$x \in D \quad \Rightarrow \quad -x \in D \quad .$$

Como contraexemplo, tomemos a função

$$\theta : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x|}{x + 1} & \text{se } x > -1 \\ \frac{x(|x| - 1)}{x + 1} & \text{se } x < -1 \end{cases} .$$

Se  $x > -1$ , tem-se

$$\theta(x) = \frac{|x^2 + x|}{x + 1} = \frac{|x||x + 1|}{x + 1} = \frac{|x|(x + 1)}{x + 1} = |x|$$

e, se  $x < -1$ ,

$$\theta(x) = \frac{x(|x| - 1)}{x + 1} = \frac{x(-x - 1)}{x + 1} = -x = |x| \quad ;$$

mais simplesmente, temos portanto

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \theta(x) = |x| \quad ,$$

o que significa que  $\theta$  é a restrição de  $\varphi$  a  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . É evidente que a proposição

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \quad \theta(-x) = \theta(x)$$

é uma proposição verdadeira; no entanto,

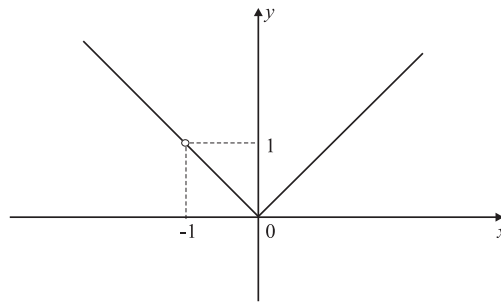
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \theta(-x) = \theta(x)$$

é uma proposição *falsa*:  $x = 1 \in D_\theta$  mas  $-x = -1 \notin D_\theta$ !

O gráfico de  $\theta$  não é simétrico em relação ao eixo dos  $yy$ . A função  $\theta$  não é par.

Em resumo, para que uma dada função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seja par ou ímpar, é necessário que o seu domínio  $D$  contenha o simétrico de cada um dos seus elementos, isto é, que o conjunto  $D$  satisfaça a condição

$$x \in D \quad \Rightarrow \quad -x \in D \quad .$$

Figura 45: Gráfico de  $\theta$ .

Mas, e uma vez que  $-(-x) = x$ , também

$$x \in D \quad \implies \quad -x \in D \quad \implies \quad -(-x) \in D$$

e, de forma equivalente,  $D$  deve satisfazer a condição

$$x \in D \quad \iff \quad -x \in D \quad ;$$

por outras palavras, o conjunto  $D$  deve ser simétrico em relação ao ponto zero.

Antes de formalizarmos as definições, consideremos ainda mais dois exemplos.

*Exemplo 4.1*

Seja  $F : \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \quad F(x) = \frac{|x| - 2}{x^2 - 4} .$$

O domínio de  $F$  é um conjunto simétrico em relação ao ponto zero, pelo que faz sentido indagar se  $F$  é função par ou ímpar. Ora

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \quad F(-x) = \frac{|-x| - 2}{(-x)^2 - 4} = \frac{|x| - 2}{x^2 - 4} = F(x)$$

e  $F$  é uma função par.

Sabemos então que o gráfico de  $F$  é simétrico em relação ao eixo dos  $yy$  e pode ser esboçado do seguinte modo: comecemos por considerar a restrição de  $F$  ao conjunto  $D_F \cap \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[\setminus\{2\}$ ; tem-se

$$\forall x \in [0, +\infty[\setminus\{2\} \quad F(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)}$$

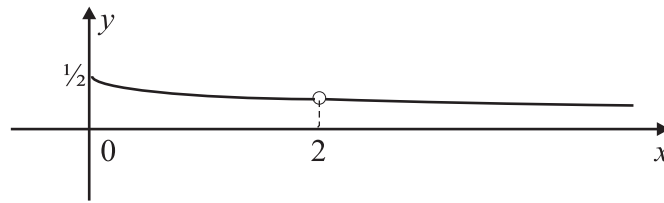


Figura 46: Gráfico de  $F_{[0,+\infty[\setminus\{2\}}$ .

e, porque  $x \neq 2$ , tem-se  $x - 2 \neq 0$  logo,

$$\forall x \in [0, +\infty[\setminus\{2\} \quad F(x) = \frac{1}{x+2}$$

Atendendo agora a que  $F$  é uma função par, concluímos

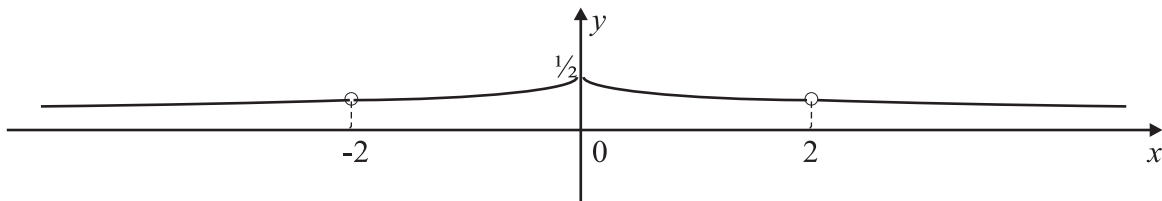


Figura 47: Gráfico de  $F$ .

*Exemplo 4.2*

$$G : \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \quad G(x) = \frac{x}{|x| - 3}$$

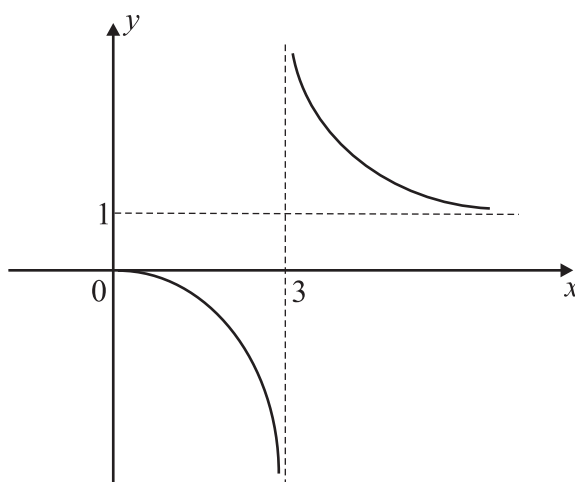
Tem-se

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\} \quad G(-x) = \frac{-x}{|-x| - 3} = -\frac{x}{|x| - 3} = -G(x) \quad ,$$

o que significa que  $G$  é uma função ímpar.

Para esboçarmos o gráfico de  $G$ , vamos proceder como no exemplo anterior e começar por considerar a restrição de  $G$  ao conjunto  $D_G \cap [0, +\infty[ = [0, +\infty[\setminus\{3\}$ . Vem

$$\forall x \in [0, +\infty[\setminus\{3\} \quad G(x) = \frac{x}{x-3} = \frac{(x-3)+3}{x-3} = 1 + \frac{3}{x-3}$$

Figura 48: Gráfico de  $G_{[0,+\infty[\setminus\{3\}}$ .

e, assim<sup>5</sup>,

Uma vez que  $G$  é função ímpar, o seu gráfico é simétrico em relação ao ponto  $(0,0)$  e concluímos de imediato que

*Definição*

Seja  $D \neq \emptyset$  um subconjunto de  $\mathbb{R}$  tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in D \Rightarrow -x \in D$$

e seja uma função  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Nestas condições,

(1) A função  $f$  diz-se *par* sse

$$\forall x \in D \quad f(-x) = f(x) \quad .$$

(2) A função  $f$  diz-se *ímpar* sse

$$\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x) \quad .$$

É claro que existem funções reais de variável real que não são pares nem ímpares; sem qualquer dificuldade, encontramos múltiplos exemplos.

Por outro lado, se  $D$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$  simétrico em relação ao ponto zero (isto é, verificando a condição acima) e  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função par e ímpar, então  $f$  é identicamente nula.

Com efeito, seja  $a$  um qualquer elemento de  $D$ ; como  $f$  é par, sabemos que

$$f(a) = f(-a) \quad .$$

<sup>5</sup>Atenda ao gráfico de  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  e ao parágrafo 3.

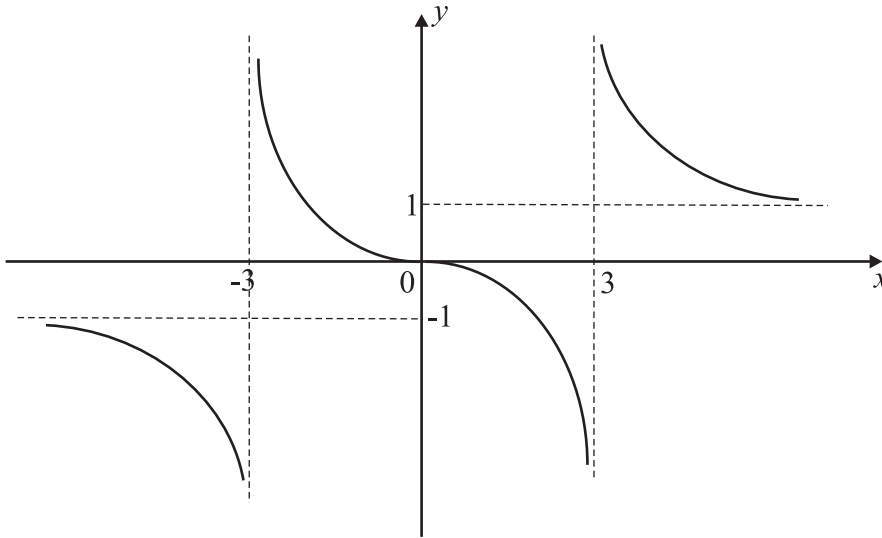


Figura 49: Gráfico de G.

Mas  $f$  também é ímpar e, portanto,

$$f(-a) = -f(a) \text{ .}$$

Então, tem-se

$$f(a) = -f(a) \Leftrightarrow 2f(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0 \text{ .}$$

Atendendo à arbitrariedade do ponto  $a$ , conclui-se, como pretendíamos,

$$\forall a \in D \quad f(a) = 0 \text{ .}$$

*Exemplo 4.3*

Seja  $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

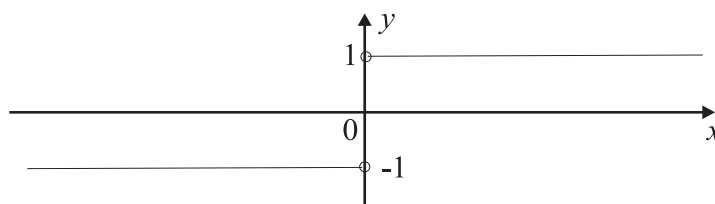
$$\forall x \neq 0 \quad h(x) = \frac{|x|}{x} \text{ .}$$

De forma equivalente,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \text{ ,}$$

logo

$$\forall x \neq 0 \quad h(-x) = -h(x)$$

Figura 50: Gráfico de  $h$ .

e  $h$  é uma função ímpar.

*Exemplo 4.4*

Sejam  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}_0$ . Toda a função polinomial  $\phi$  tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi(x) = \alpha x^{2n}$$

é uma função par.

Em particular, com  $n = 0$ , conclui-se que toda a função definida em  $\mathbb{R}$  e constante é par.

Por outro lado, toda a função polinomial  $\psi$  dada por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = \alpha x^{2n+1}$$

é uma função ímpar (e, se  $\alpha = 0$ , também é par!).

É evidentemente *falso* que toda a função polinomial de grau par [resp., ímpar] seja uma função par [resp., ímpar].

Por exemplo, a função  $f$  definida por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 2x$$

não é par (nem ímpar):  $f(1) = 3 \neq f(-1) = -1$ .

*Exemplo 4.5*

A função seno

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \sin x \end{aligned}$$

é uma função ímpar visto que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(-x) = -\sin x ;$$

já a função coseno

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \cos x \end{aligned}$$

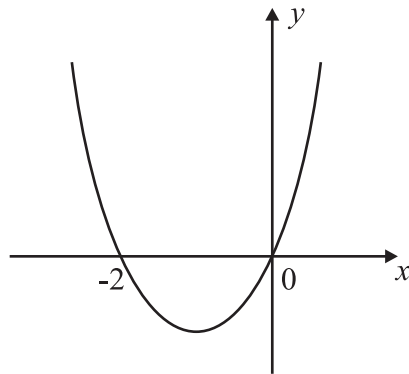


Figura 51: Gráfico de  $f$ .

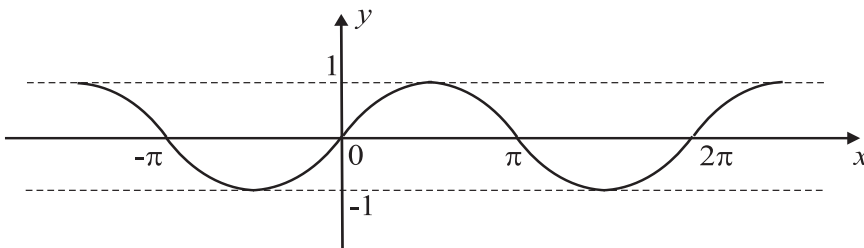


Figura 52: Gráfico da função seno.

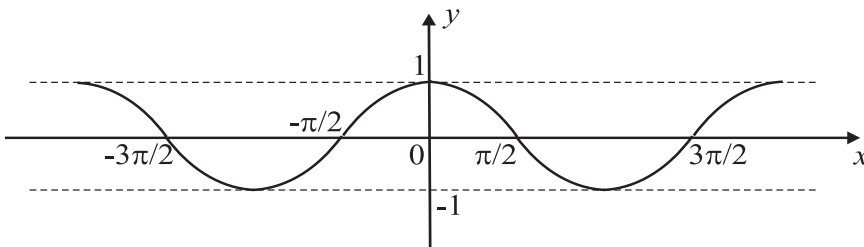


Figura 53: Gráfico da função cosseno.

satisfaz a propriedade

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x \quad ,$$

pelo que é uma função par.

Considerando agora o conjunto  $D$  definido por

$$D = \{x \in \mathbb{R}; \cos x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}; \forall m \in \mathbb{Z} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi\} =$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; \exists m \in \mathbb{Z} \ x = \frac{\pi}{2} + m\pi\} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + (m+1)\pi \right[ ,$$

definimos em  $D$  a função tangente por

$$\forall x \in D \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} .$$

Uma vez que  $D$  é um conjunto simétrico em relação ao ponto zero e se tem

$$\forall x \in D \quad \operatorname{tg}(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\operatorname{cos}(-x)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = -\operatorname{tg} x ,$$

concluimos que a função tangente é ímpar.

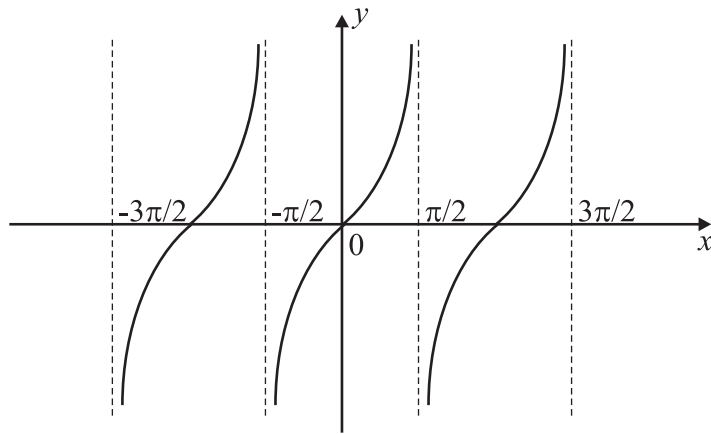


Figura 54: Gráfico da função tangente.

## 4.2 Prolongamento e Paridade

Como se sabe, o prolongamento de uma dada função a um sobreconjunto do seu domínio não é, em geral, único.

Consideremos, por exemplo, a função  $f$  definida em  $D = [1, 2[ \cup [3, 4]$  e cujo gráfico é dado pela figura seguinte:

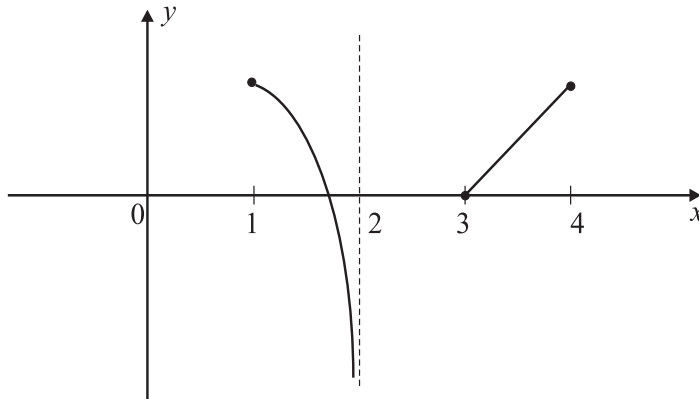
Seja agora o conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  definido por

$$A = D \cup \{-x; \ x \in D\} = [-4, -3] \cup [-2, -1] \cup [1, 2[ \cup [3, 4] .$$

Para reconhecer a existência de infinitos prolongamentos de  $f$  a  $A$ , é suficiente considerar os seguintes prolongamentos particulares: tomando um qualquer número real  $\alpha$ , seja  $F_\alpha$  a função definida em  $A$  por

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \\ \alpha & \text{se } x \in A \setminus D \end{cases} .$$



Figura 55: Gráfico de  $f$ .

Sejamos mais precisos. dado que o conjunto  $A$  é simétrico em relação ao ponto zero, coloquemos a seguinte questão: de entre todos os prolongamentos de  $f$  a  $A$ , existirá algum que seja uma função par? (note-se que o conjunto  $A$  é simétrico em relação ao ponto zero.)

É evidente que sim: uma vez que

$$\forall x \in A \setminus D \quad -x \in D ,$$

podemos definir a função  $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \\ f(-x) & \text{se } x \in A \setminus D \end{cases} ;$$

$\phi$  é um prolongamento de  $f$  a  $A$  e  $\phi$  é uma função par.

Além disso, se  $F$  designa um qualquer prolongamento par de  $f$  a  $A$ , tem-se

$$\begin{aligned} x \in D & \Rightarrow F(x) = f(x) = \phi(x) \\ x \in A \setminus D & \Rightarrow F(x) = F(-x) = f(-x) = \phi(x) , \end{aligned}$$

o que mostra que  $F = \phi$ ; por outras palavras,  $\phi$  é o *único* prolongamento par de  $f$  a  $A$ .

De forma inteiramente análoga, concluímos que também existe um prolongamento ímpar de  $f$  a  $A$  e que é único. Trata-se da função  $\psi : A \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \\ -f(-x) & \text{se } x \in A \setminus D \end{cases} ;$$

(Recorde que  $x \in A \setminus D \Leftrightarrow -x \in D$ .)

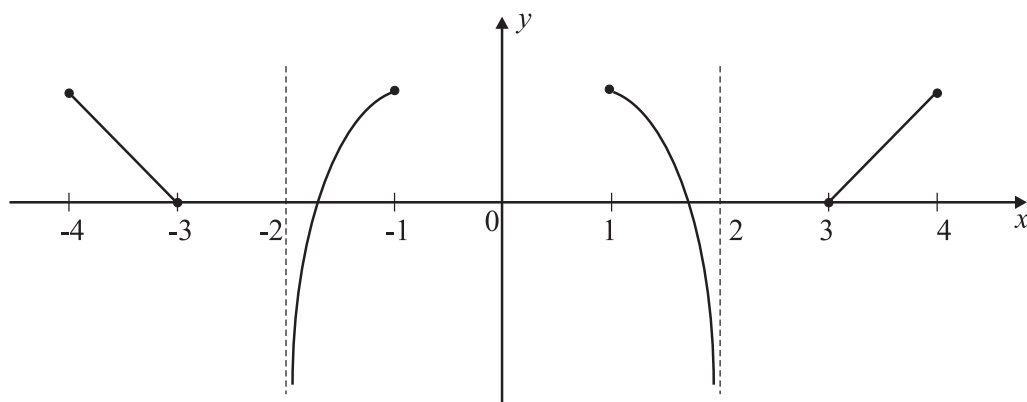


Figura 56: Gráfico de  $\phi$ .

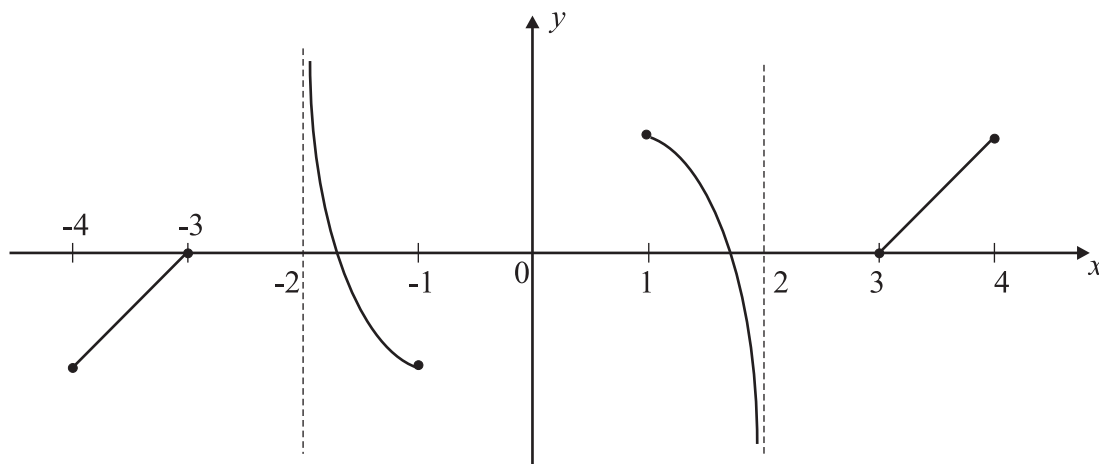


Figura 57: Gráfico de  $\psi$ .

Mais geralmente, suponhamos que  $D \subset \mathbb{R}$  é um conjunto simétrico em relação à origem, isto é,

$$x \in D \quad \Rightarrow \quad -x \in D ,$$

e designemos por  $D^+$  o subconjunto de  $D$  definido por

$$D^+ = D \cap [0, +\infty[ = \{x \in D; x \geq 0\} ;$$

seja ainda dada uma função  $f : D^+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Observando que

$$x \in D \setminus D^+ \Leftrightarrow x \in D \wedge x < 0 \Leftrightarrow x \in D \wedge -x > 0 \Leftrightarrow -x \in D^+ \setminus \{0\} ,$$

podemos definir em  $D$  a função  $F$  tal que

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D^+ \\ f(-x) & \text{se } x \in D \setminus D^+ \end{cases} .$$

Reconhece-se imediatamente que  $F$  é uma função par. Como  $F|_{D^+} = f$ ,  $F$  é um prolongamento (par) de  $f$  ao conjunto  $D$ . Além disso, e raciocinando como atrás, concluímos que  $F$  é o único prolongamento de  $f$  ao conjunto  $D$ .

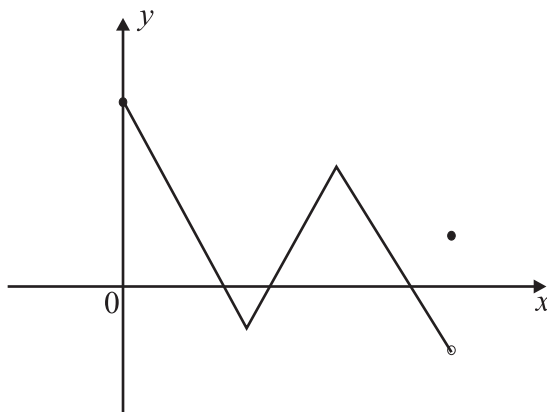


Figura 58: Gráfico de  $f$ .

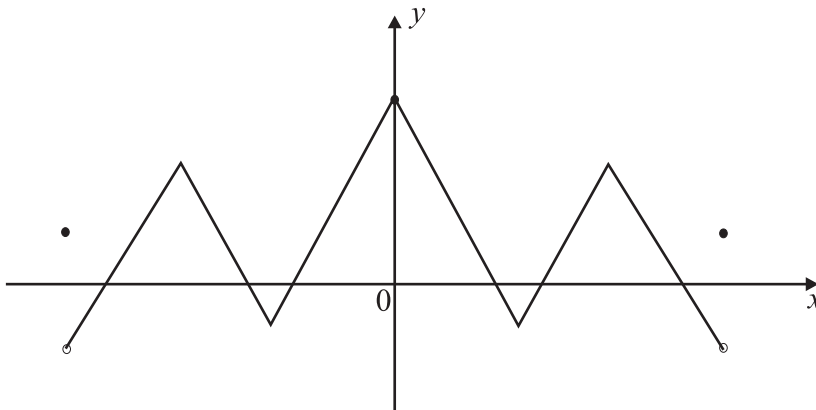


Figura 59: Gráfico de  $F$ .

Nas mesmas condições, perguntamo-nos agora se existe algum prolongamento ímpar ao conjunto  $D$ . A questão é um pouco mais delicada, uma vez que pode surgir um problema com o ponto zero.

Com efeito, se  $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$  é uma qualquer função ímpar tem-se, por definição,

$$\forall x \in D \quad \theta(-x) = -\theta(x)$$

e, se  $0 \in D$ , vem

$$\theta(0) = -\theta(0) \quad \Leftrightarrow \quad \theta(0) = 0 \quad .$$

Quer isto dizer que, se  $0 \in D$ , toda a função definida em  $D$  e ímpar, é nula no ponto zero.

Então, se  $0 \in D^+$  e  $f(0) \neq 0$ , não existe qualquer prolongamento ímpar de  $f$  ao conjunto  $D$ .

Caso contrário, isto é,

$$0 \notin D^+ \quad \vee \quad f(0) = 0$$

podemos considerar a função  $G : D \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$G(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D^+ \\ -f(-x) & \text{se } x \in D \setminus D^+ \end{cases} ;$$

$G$  é função ímpar,  $G$  é prolongamento de  $f$  a  $D$  e, como antes,  $G$  é o único prolongamento ímpar de  $f$  a  $D$ .

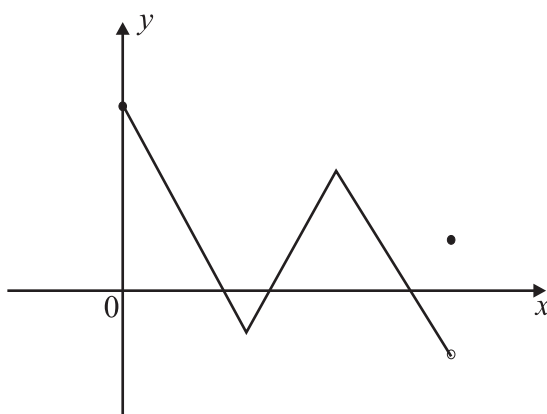


Figura 60: Gráfico de  $f$ .

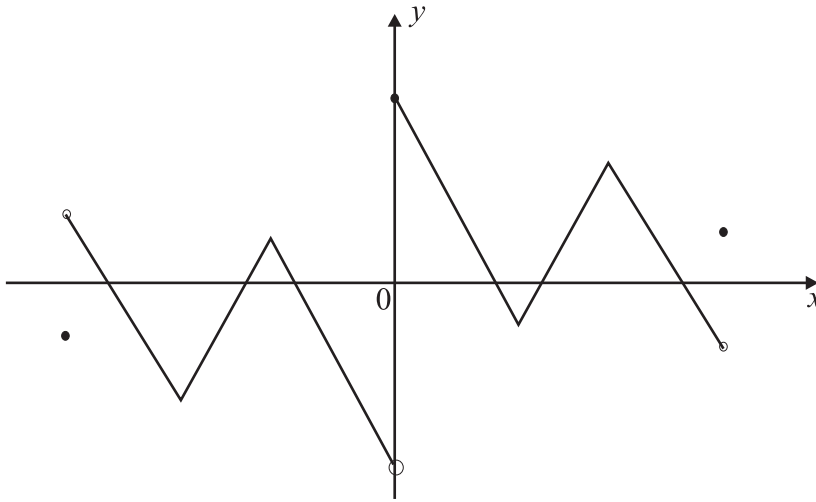


Figura 61: Função que não é ímpar.

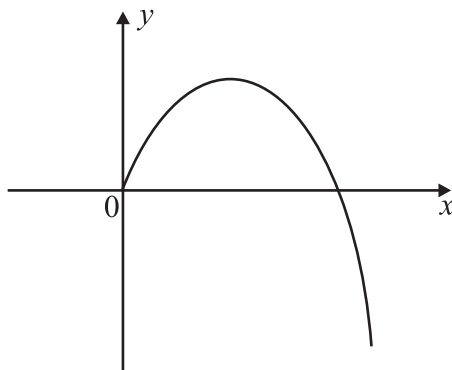


Figura 62: Gráfico de  $f$ .

## 5 Funções periódicas

### 5.1 Definição e exemplos

Como vem sendo usual, comecemos por considerar um exemplo.

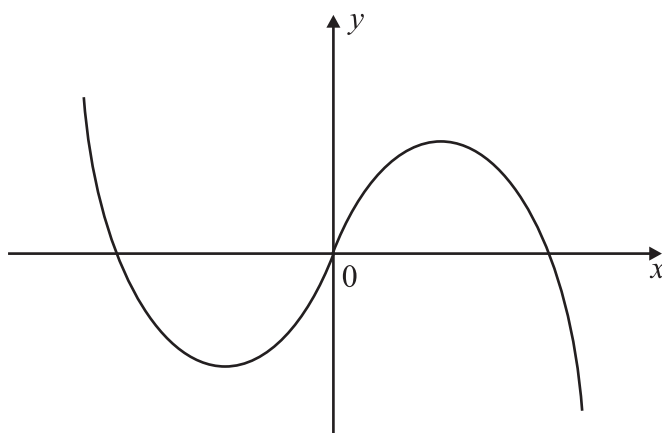


Figura 63: Gráfico de G.

Seja  $F : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists m \in \mathbb{Z} \quad x \in ]2m, 2m + 1[ \\ -2 & \text{se } \exists m \in \mathbb{Z} \quad x \in ]2m + 1, 2m + 2[ \end{cases} .$$

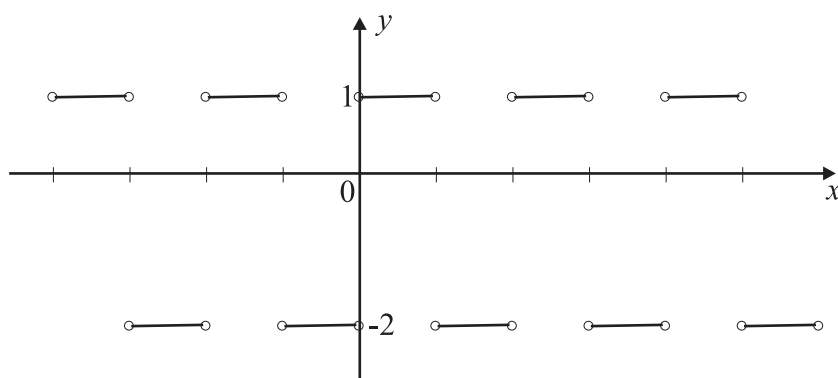


Figura 64: Gráfico de F.

Do ponto de vista intuitivo e de forma muito pouco rigorosa, diríamos que o gráfico de  $F$  “se vai repetindo”; usando a linguagem corrente, diremos que a função  $F$  é *periódica*.

Mais precisamente, diríamos que essa “repetição ocorre de duas em duas unidades” e, uma vez mais de acordo com a linguagem corrente, diremos que a função (periódica)  $F$  tem um período igual a dois.

É claro que temos que ser rigorosos e traduzir estas ideias em linguagem formal, o que está longe de ser difícil: acontece que, em qualquer ponto  $x$  do seu domínio, a função  $F$  assume o mesmo valor em  $x$ , em  $x + 2$  e em  $x - 2$ , ou seja,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad F(x) = F(x + 2) = F(x - 2) \quad .$$

Mais geralmente, dados um subconjunto não vazio  $D$  de  $\mathbb{R}$ , uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e um número real  $\alpha \neq 0$ , pretendemos dar sentido (isto é, definir) à afirmação “ $f$  é função periódica com um período igual a  $\alpha$ ”.

Pelo exemplo anterior, parece-nos natural dizer que  $f$  deve satisfazer a propriedade seguinte:

$$\forall x \in D \quad f(x) = f(x + \alpha) = f(x - \alpha) \quad ;$$

mas, para que esta proposição tenha sentido é necessário que as expressões designatórias intervenientes,  $f(x)$ ,  $f(x + \alpha)$  e  $f(x - \alpha)$ , tenham sentido. Ora, dado  $x \in D$ , o real  $f(x)$  está bem definido, mas para que  $f(x + \alpha)$  e  $f(x - \alpha)$  designem números reais deve ter-se, respectivamente,  $x + \alpha \in D$  e  $x - \alpha \in D$ , o que não está garantido. Por conseguinte, se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é função periódica com um período  $\alpha$ , o seu domínio  $D$  não pode ser um conjunto não vazio qualquer;  $D$  deve verificar a seguinte propriedade:

$$(x \in D \Rightarrow x + \alpha \in D) \quad \wedge \quad (x \in D \Rightarrow x - \alpha \in D) \quad (2)$$

Atendendo à primeira implicação e tomando “ $x + \alpha \in D$ ” como antecedente da segunda, vem

$$x \in D \Rightarrow x + \alpha \in D \Rightarrow (x + \alpha) - \alpha \in D$$

e

$$x \in D \Leftrightarrow x + \alpha \in D \quad (3)$$

É fácil ver que (2) e (3) são condições equivalentes. Analogamente, conclui-se ainda que (2) e

$$x \in D \Leftrightarrow x - \alpha \in D \quad (4)$$

são condições equivalentes.

Supondo então que o conjunto  $D$  satisfaz (2) (isto é, (3); isto é, (4)), também a proposição

$$\forall x \in D \quad f(x) = f(x + \alpha) = f(x - \alpha)$$

é equivalente quer a

$$\forall x \in D \quad f(x) = f(x + \alpha) \quad (5)$$

quer a

$$\forall x \in D \quad f(x) = f(x - \alpha) \quad (6)$$

Se traduzirmos a proposição (5) por “ $f$  é periódica com um período  $\alpha$ ” e a proposição (6) por “ $f$  é periódica com um período  $-\alpha$ ”, as considerações acima levam-nos a concluir que

“ $f$  é periódica com um período  $\alpha$ ”sse

“ $f$  é periódica com um período  $-\alpha$ ”sse

“ $f$  é periódica com um período  $|\alpha| > 0$ ”,

o que está, aliás, de acordo com o termo “período”na linguagem comum, associado sempre a um número positivo.

Assim, quando nos referirmos a  $\alpha$  como um período de uma função, suporemos sempre que  $\alpha > 0$ .

Mas, e se  $\alpha = 0$ ? Neste caso, o conjunto  $D \neq \emptyset$  deveria verificar

$$x \in D \quad \Leftrightarrow \quad x = x + 0 \in D$$

isto é,  $D$  é qualquer não vazio; uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  dir-se-ia “periódica com um período  $\alpha = 0$ ”se e só se

$$\forall x \in D \quad f(x) = f(x + 0) \quad .$$

Por outras palavras, qualquer função real de variável real seria periódica (com um período zero) e, conseqüentemente, o conceito de “função periódica”não teria qualquer interesse.

Finalmente,

*Definição*

Seja  $\alpha \in ]0, +\infty[$  e  $D$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$  verificando

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \in D \quad \Leftrightarrow \quad x + \alpha \in D \quad .$$

Uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se *periódica com um período  $\alpha$*  sse

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x + \alpha) \quad .$$

*Exemplo 5.1*



Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , as funções dadas por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{sen} x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \operatorname{cos} x .$$

Uma vez que se tem

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi) \quad \wedge \quad \operatorname{cos} x = \operatorname{cos}(x + 2\pi)$$

concluimos que ambas as funções  $f$  e  $g$  são periódicas com um período  $2\pi$ .

Consideremos agora a função quociente  $\frac{f}{g} = h$ ; com

$$D = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + m\pi, \frac{\pi}{2} + (m+1)\pi \right[ ,$$

tem-se

$$h : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in D \quad h(x) = \operatorname{tg} x .$$

Como

$$\forall x \in D \quad h(x + 2\pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + 2\pi)}{\operatorname{cos}(x + 2\pi)} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = h(x) ,$$

concluimos que a função tangente é periódica com um período  $2\pi$ .

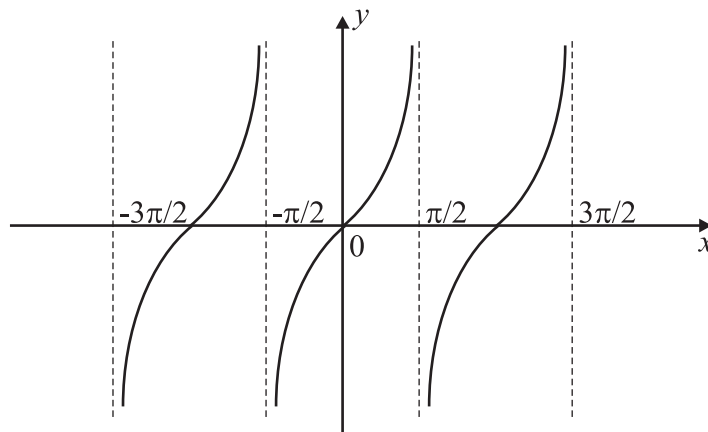


Figura 65: Gráfico da função tangente.

Mas a observação do gráfico sugere que a função  $h$ , que já sabemos ser periódica, tenha um período igual a  $\pi$ . Ora, analiticamente,

$$x \in D \quad \Leftrightarrow \quad x + \pi \in D$$

e

$$\forall x \in D \quad \operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\operatorname{cos}(x + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen} x}{-\operatorname{cos} x} = \operatorname{tg} x .$$

Com efeito,  $h$  é também uma função periódica com um período  $\pi$ .

### Exemplo 5.2

Intuitivamente, não há funções "mais repetitivas" do que as constantes; com rigor, seja  $c$  um qualquer número real e designemos por  $\varphi$  a função definida em  $\mathbb{R}$ , constante e igual a  $c$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = c .$$

Seja agora  $\alpha > 0$ , qualquer; tem-se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x + \alpha) = c = \varphi(x)$$

e, portanto,  $\varphi$  é função periódica com um período  $\alpha$ .

Concluimos assim que qualquer função definida e constante em  $\mathbb{R}$  é periódica; além disso, todo o número real positivo é um seu período.

Nos dois exemplos anteriores constatamos que uma função periódica pode admitir mais do que um período, possibilidade esta de que já poderíamos ter suspeitado, devido ao uso do artigo indefinido na expressão " $f$  tem *um* período  $\alpha$ ".

Mais precisamente, demonstramos que qualquer função periódica admite uma infinidade de períodos.

Com efeito, dados  $\alpha > 0$  e um conjunto  $D \subset \mathbb{R}$  verificando (3), se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é função periódica com um período  $\alpha$ , tem-se por definição,

$$\forall x \in D \quad f(x) = f(x + \alpha) ;$$

mas, se  $x \in D$  também  $x + \alpha \in D$  e, portanto,

$$f(x + \alpha) = f((x + \alpha) + \alpha) = f(x + 2\alpha) .$$

Então

$$\forall x \in D \quad f(x) = f(x + 2\alpha) ,$$

o que significa que  $f$  tem um período  $2\alpha$ .

Por indução, conclui-se que

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \quad n\alpha \text{ é um período de } f \text{ .}$$

Em particular, podemos dizer que:

— Qualquer número natural par  $2n$  ( $n \in \mathbb{N}_1$ ) é um período da função  $F$  considerada no início.

— Se  $n \in \mathbb{N}_1$ ,  $2n\pi$  é um período quer da função seno, quer da função coseno.

— Se  $n \in \mathbb{N}_1$ ,  $n\pi$  é um período da função tangente.

— Todo o número real  $\alpha > 0$  é um período de qualquer função definida e constante em  $\mathbb{R}$ .

Este último facto é, aliás, característico de uma função definida e constante em  $\mathbb{R}$ ; quer dizer,

Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função periódica e todo o número real positivo é um seu período, então  $f$  é constante.

Demonstremos: Seja  $x > 0$ , arbitrário; por hipótese,  $x$  é um período de  $f$  logo

$$f(0) = f(0 + x) = f(x) \text{ .}$$

Por outro lado, se  $x < 0$ , o seu simétrico  $-x$  é um período de  $f$  e portanto,

$$f(0) = f(x + (-x)) = f(x) \text{ .}$$

Uma vez que se tem, trivialmente,

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = f(x) \text{ ,}$$

concluimos finalmente que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(0)$$

e  $f$  é constante e igual a  $f(0)$ , como pretendíamos provar.

### Exemplo 5.3

Dado  $x \in \mathbb{R}$ , chamamos *característica de  $x$* , que designamos por  $C(x)$ , ao maior número inteiro inferior ou igual a  $x$ ; em linguagem simbólica:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad C(x) = \max\{m \in \mathbb{Z}; \quad m \leq x\} \text{ .}$$

Deste modo, definimos em  $\mathbb{R}$  uma função

$$C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow C(x)$$

a que damos o nome de *função característica* e cujo gráfico é representado pela figura 66

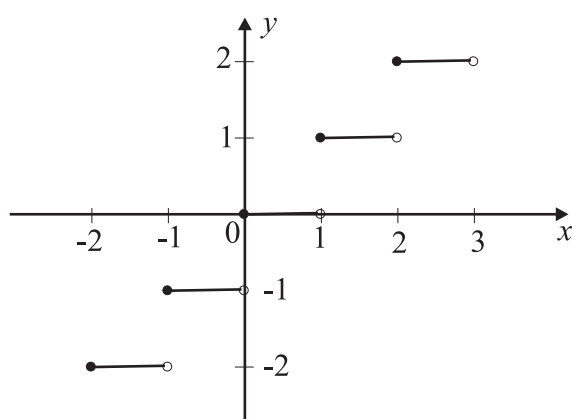


Figura 66: Gráfico da função característica.

É fácil ver que a função característica satisfaz a propriedade

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad C(x+1) = 1 + C(x) \quad .$$

Definimos agora a função  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = x - C(x) \quad ,$$

a que se dá o nome de *função mantissa*. Tendo em conta a proposição acima, concluímos

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x+1) = x+1 - C(x+1) = x+1 - (1 + C(x)) = x - C(x) = \psi(x) \quad ,$$

o que significa que  $\psi$  é uma função periódica com um período igual a 1. Aliás, todo o número inteiro positivo é um período de  $\psi$ .

A questão da não unicidade do período de uma função (periódica) pode, em certos casos, ser resolvida com uma nova definição: a de período principal. Vejamos como:

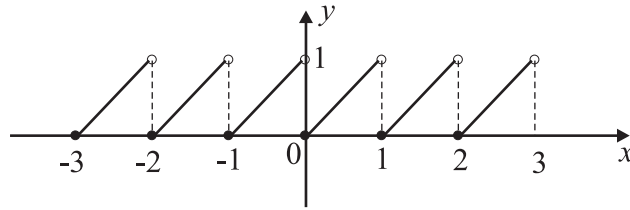


Figura 67: Gráfico da função característica.

Seja  $\alpha > 0$ ,  $D \subset \mathbb{R}$  um conjunto tal que

$$x \in D \quad \Leftrightarrow \quad x + \alpha \in D ,$$

e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica com período  $\alpha$ .

Nestas condições, o conjunto

$$A = \{\beta > 0; \beta \text{ é um período de } f\}$$

é não vazio e minorado, logo tem ínfimo.

Além disso, se existir o mínimo de  $A$  (isto é, se o ínfimo for elemento de  $A$ ),  
designando-o por  $\alpha_0$ , tem-se

$$\alpha_0 \text{ é um período de } f \quad (\alpha_0 \in A)$$

$$\alpha_0 \text{ é o menor período de } f \quad (\alpha_0 = \min A) .$$

A  $\alpha_0$  damos o nome de *período principal de  $f$* .

É evidente que, se existir, o período principal de  $f$  é único.

Por exemplo:

- $\alpha_0 = 2$  é o período principal da função  $F$  no início do parágrafo.
- A função seno (bem como a função coseno) tem período principal  $2\pi$ .
- A função tangente tem período principal igual a  $\pi$ .
- Se  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função constante, vimos que

$$\{\alpha > 0; \alpha \text{ é período de } \varphi\} = ]0, +\infty[ ;$$

este conjunto tem ínfimo igual a zero, mas não tem mínimo. Então,  $\varphi$  não tem período principal.

*Exemplo 5.4*

Chamamos *função de Dirichlet* à função definida por

$$d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

Dado  $r \in \mathbb{Q}^+ = ]0, +\infty[ \cap \mathbb{Q}$  (isto é,  $r$  é um número racional positivo), é fácil provar (exercício) que se tem

$$x \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad x + r \in \mathbb{Q}$$

e de forma equivalente,

$$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad x + r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} .$$

Concluimos então que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad d(x) = d(x + r)$$

o que significa que  $d$  é uma função periódica e  $r$  é um seu período.

Atendendo à arbitrariedade de  $r \in \mathbb{Q}^+$ , todo o número racional positivo é um período da função de Dirichlet, isto é,

$$\mathbb{Q}^+ \subset \{\alpha > 0; \alpha \text{ é um período da função } d\}$$

e prova-se mesmo que (exercício)

$$\mathbb{Q}^+ = \{\alpha > 0; \alpha \text{ é um período da função } d\} .$$

Uma vez que se tem

$$\inf \mathbb{Q}^+ = 0 \notin \mathbb{Q}^+ ,$$

podemos dizer que a função de Dirichlet *não* tem período principal.

*Observações*

1. Dado um subconjunto  $D$  de  $\mathbb{R}$  nas condições usuais, seja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica. Se  $\alpha$  e  $\beta$  são períodos de  $f$  e  $\alpha > \beta > 0$ , então também  $\alpha - \beta$  é um período de  $f$ .

Com efeito, para qualquer  $x \in D$  tem-se

$$\begin{aligned} f(x + (\alpha - \beta)) &= f((x + \alpha) - \beta) = \\ \text{(porque } \beta \text{ é um período)} &= f(x + \alpha) = \\ \text{(porque } \alpha \text{ é um período)} &= f(x) \end{aligned}$$

como pretendíamos.

Procedendo de forma análoga no caso em que  $\beta > \alpha > 0$ , podemos enunciar o seguinte teorema:

*Teorema:*

Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica e sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$  dois períodos distintos de  $f$ . Então,  $|\beta - \alpha|$  é um período de  $f$ .

2. Mostrámos anteriormente que nem a função de Dirichlet, nem qualquer função definida e constante em  $\mathbb{R}$  têm período principal. Em qualquer dos casos, o problema residia no facto do conjunto dos períodos da função ter ínfimo igual a zero. Ora, como vamos ver, é este o único motivo que impede que uma dada função periódica tenha período principal.

Concretamente,

*Teorema:*

Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica e

$$A = \{\alpha > 0; \alpha \text{ é um período de } f\} .$$

Então,  $f$  tem período principal sse  $\inf A > 0$ .

*Demonstração.* De forma equivalente, vamos provar que

$$f \text{ não tem período principal sse } \inf A = 0 .$$

A condição é suficiente: se  $\inf A = 0$ , então  $\inf A \notin A$  e  $f$  não admite período principal.

Para provar a condição necessária, suponhamos, por hipótese, que  $f$  não admite período principal e seja  $i = \inf A$ . É evidente que  $i \geq 0$ .

Tomando o número real  $i + 1$ , da definição de ínfimo sabemos que

$$\exists \alpha_1 \in A \quad i \leq \alpha_1 < i + 1$$

e uma vez que  $i \notin A$ , tem-se  $i < \alpha_1$ .

Considerando agora o número real  $\alpha_1$  e atendendo novamente à definição de ínfimo,

$$\exists \alpha_2 \in A \quad i \leq \alpha_2 < \alpha_1 ;$$

porque  $i \notin A$ , tem-se  $i < \alpha_2$ .

Dado  $n \in \mathbb{N}_1$  e supondo determinados  $n$  elementos de  $A$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , tais que

$$i < \alpha_n < \alpha_{n-1} < \dots < \alpha_1 \quad ,$$

da definição de ínfimo e dado que  $i \notin A$ , concluímos então que

$$\exists \alpha_{n+1} \in A \quad i < \alpha_{n+1} < \alpha_n \quad .$$

Deste modo (isto é, por indução), definimos uma sucessão  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de termos em  $A$  (uma sucessão de períodos da função  $f$ ) verificando

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \quad i < \alpha_{n+1} < \alpha_n \quad (7)$$

Como também  $\alpha_n - \alpha_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}_1$ ) é um período de  $f$  (logo elemento do conjunto  $A$ ),

$$\forall n \in \mathbb{N}_1 \quad i < \alpha_n - \alpha_{n+1} \quad (8)$$

De (7), concluímos que a sucessão  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é (estritamente) decrescente e minorada, pelo que é convergente; uma vez que  $(\alpha_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  é subsucessão de  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , também a sucessão  $(\alpha_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  é convergente, tendo-se

$$\lim \alpha_{n+1} = \lim \alpha_n$$

donde,

$$\lim(\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0 \quad .$$

Mas de (8) resulta que

$$i \leq \lim(\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 0 \quad .$$

Então

$$i \geq 0 \quad \wedge \quad i \leq 0 \quad ,$$

logo

$$i = 0$$

o que termina a demonstração.  $\square$

## 5.2 Prolongamento e periodicidade

Dados dois números reais  $a$  e  $b$ , com  $a < b$ , consideremos o intervalo  $[a, b]$ .

Se  $f$  é uma função real definida em  $[a, b]$ , sabemos que existe uma infinidade de funções definidas em  $\mathbb{R}$  e que são prolongamento de  $f$ ; por



outras palavras, o problema de prolongamento a  $\mathbb{R}$  de  $f$  tem solução, mas não existe uma única solução.

Atendendo ao conceito de função periódica introduzido no parágrafo anterior, coloquemos agora um problema de prolongamento mais preciso; perguntamos: existe algum prolongamento de  $f$  a  $\mathbb{R}$  que seja uma função periódica? E, caso exista, será único um tal prolongamento?

Para respondermos a estas questões, comecemos por tomar uma função particularmente simples: a função nula definida no intervalo  $[a, b]$ ; designando-a por  $\varphi$ , tem-se

$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) &= 0. \end{aligned}$$

Como prolongamento a  $\mathbb{R}$  de  $\varphi$ , ocorre de imediato considerar a função  $\phi$  tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \phi(x) = 0 ;$$

sendo constante,  $\phi$  é periódica e, conseqüentemente,  $\phi$  é solução do problema.

Será  $\phi$  a única solução? É óbvio que não! Por exemplo, a função  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cujo gráfico é esboçado na figura seguinte é também solução do problema.

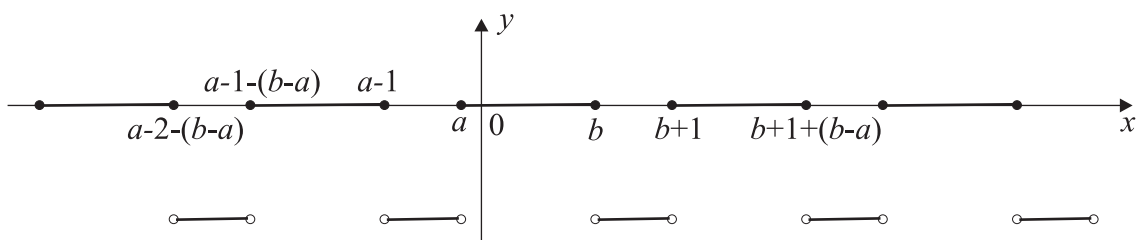


Figura 68: Gráfico de  $\psi$ .

Podemos mesmo garantir que existe uma infinidade de funções definidas em  $\mathbb{R}$  e periódicas que são nulas no intervalo  $[a, b]$ .

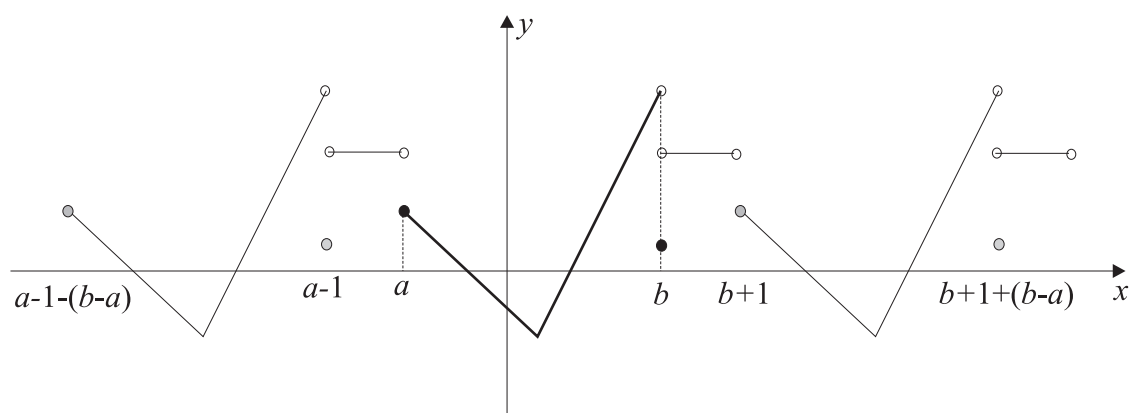


Figura 69: Gráfico de  $f$  e de um seu prolongamento.

Analogamente, também qualquer função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tem uma infinidade de prolongamentos periódicos a  $\mathbb{R}$ .

Ao pretendermos garantir a existência de um prolongamento periódico a  $\mathbb{R}$  mas *único*, devemos, pois, ser mais exigentes, impondo condições adicionais.

Retomando o caso da função  $\varphi$  acima, observamos que  $\psi$  é função periódica com período principal igual a  $b-a+1$ , enquanto que o comprimento do intervalo  $[a, b]$  é igual a  $b-a$ .

Este facto sugere que reformulemos o problema do seguinte modo: existe algum prolongamento a  $\mathbb{R}$  de  $\varphi$  que seja uma função periódica com um período igual a  $b-a$ ? Claro que sim: a função  $\phi$ , definida em  $\mathbb{R}$  e constante e igual a zero, satisfaz estas condições.

Ora, além disso,  $\phi$  é o único prolongamento periódico a  $\mathbb{R}$  de  $\varphi$ , com um período  $b-a$ !

Com efeito, suponhamos que  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(x) = \theta(x + b - a)$$

e

$$\forall x \in [a, b] \quad \theta(x) = 0 \quad .$$

Se  $m \in \mathbb{Z}$ , e considerando o intervalo  $[a + m(b - a), b + m(b - a)]$ , tem-se

$$x \in [a + m(b - a), b + m(b - a)] \quad \Leftrightarrow \quad x - m(b - a) \in [a, b]$$

e portanto, deve ter-se

$$\theta(x) = \theta(x - m(b - a)) = 0 \quad .$$

Dado que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [a + m(b - a), b + m(b - a)] ,$$

vem

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(x) = 0 ,$$

ou seja,  $\theta = \phi$ , como pretendíamos.

Voltando ao caso geral e supondo dada uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , consideremos então o seguinte problema:

Existe algum prolongamento a  $\mathbb{R}$  de  $f$  (9)  
que seja uma função periódica com um período igual a  $b - a$ ?

Se existir, designando um tal prolongamento por  $F$ , tem-se que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = F(x + b - a) ;$$

tomando em particular  $x = a$ , deve pois ter-se

$$F(a) = F(b)$$

e, dado que a restrição de  $F$  a  $[a, b]$  coincide com  $f$ , de forma equivalente, deve ter-se

$$f(a) = f(b) .$$

Por outras palavras, se a função dada  $f$  é tal que  $f(a) \neq f(b)$ , a resposta à questão em (9) é: não existe.

Por exemplo, dada

$$g : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in [-1, 2] \quad g(x) = x^2 ,$$

uma vez que

$$g(-1) = 1 \neq g(2) = 4 ,$$

concluimos que *não* existe qualquer função definida em  $\mathbb{R}$ , periódica com um período 3 e cuja restrição ao intervalo  $[-1, 2]$  coincida com  $g$ .

Vimos então que a igualdade

$$f(a) = f(b)$$

é condição necessária para a existência de solução para o problema (9); facilmente se reconhece que se trata também de uma condição suficiente.

Não faremos a demonstração deste último facto, deixando-a como exercício. No entanto, vamos considerar um exemplo que, de forma bastante clara, sugere como proceder no caso geral.

Seja então,

$$f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1, 2[ \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases} ;$$

note-se que

$$f(1) = 1 = f(2) .$$

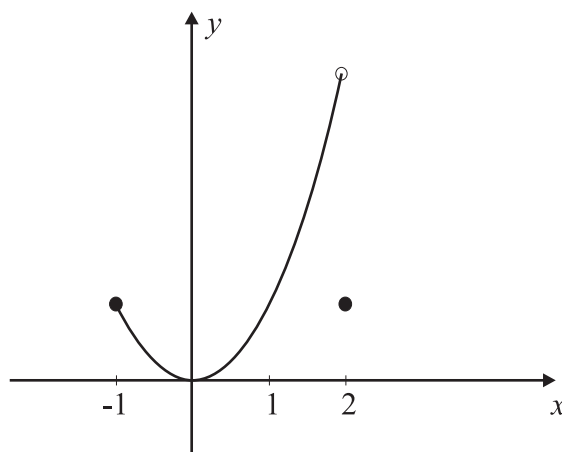


Figura 70: Gráfico de  $f$ .

O problema (9) tem solução: a função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cujo gráfico é indicado na figura seguinte, é um prolongamento a  $\mathbb{R}$  de  $f$  e é uma função periódica com um período igual a 3.

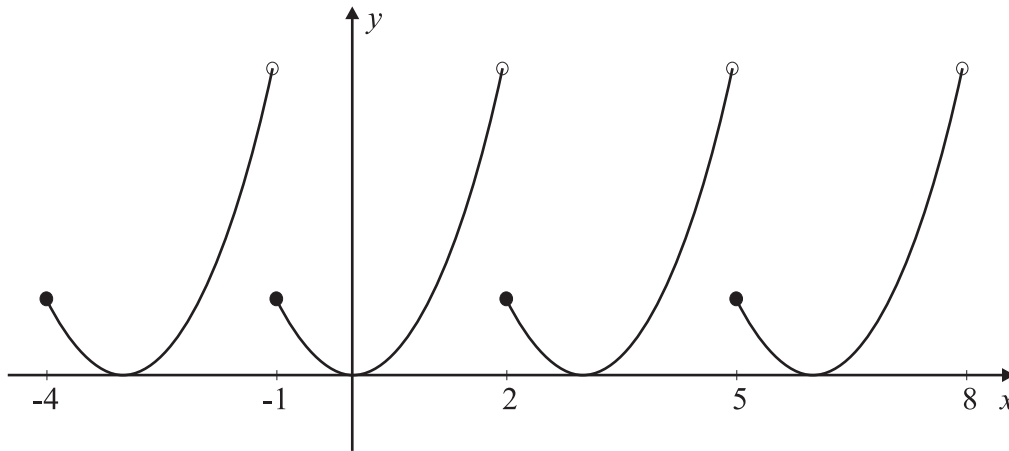
Mas, além disso,  $F$  é o *único* prolongamento a  $\mathbb{R}$  de  $f$ , periódico com um período igual a 3.

Provemos: suponhamos que  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função nas condições acima e consideremos a função  $\theta = G - F$ .  $\theta$  é, pois, uma função definida em  $\mathbb{R}$  verificando

$$\forall x \in [-1, 2] \quad \theta(x) = G(x) - F(x) = f(x) - f(x) = 0$$

e

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(x) = G(x) - F(x) = G(x+3) - F(x+3) = \theta(x+3) .$$

Figura 71: Gráfico de  $F$ .

Por outras palavras,  $\theta$  é o prolongamento a  $\mathbb{R}$  da função nula definida em  $[-1, 2]$  e  $\theta$  é periódica com um período igual a 3. Mostrámos anteriormente que existe uma única função  $\theta$  nestas condições, tendo-se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(x) = 0 \quad .$$

Então

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = F(x)$$

e  $G = F$ .

Finalmente, estas considerações podem resumir-se enunciando o teorema seguinte:

*Teorema.* Com  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Então, existe uma função  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando

$$(i) \quad \forall x \in [a, b] \quad F(x) = f(x)$$

e

$$(ii) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = F(x + b - a)$$

se e só se

$$f(a) = f(b) \tag{10}$$

Verificada a condição (10), uma tal função  $F$  é única.

## 6 Função inversa: exemplos.

Dados um subconjunto não vazio  $A$  de  $\mathbb{R}$  e uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , sabemos que  $f$  é função invertível sse  $f$  é injectiva.

No que segue, suponhamos que  $f$  é injectiva. Chamamos *função inversa de  $f$* , que designamos por  $f^{-1}$ , à função que tem por domínio  $f(A)$  e é dada por

$$f^{-1} : f(A) \rightarrow A$$

$$\forall y \in A \quad \forall z \in f(A) \quad y = f^{-1}(z) \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = z$$

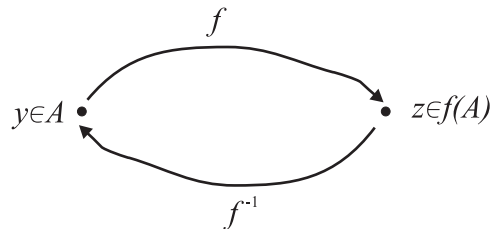


Figura 72: Função inversa.

Então, se  $x_0$  é um qualquer elemento do conjunto  $A$  e  $y_0 = f(x_0)$ , o ponto  $(x_0, y_0)$  é ponto do gráfico de  $f$  e, conseqüentemente,  $(y_0, x_0)$  é ponto do gráfico de  $f^{-1}$ .

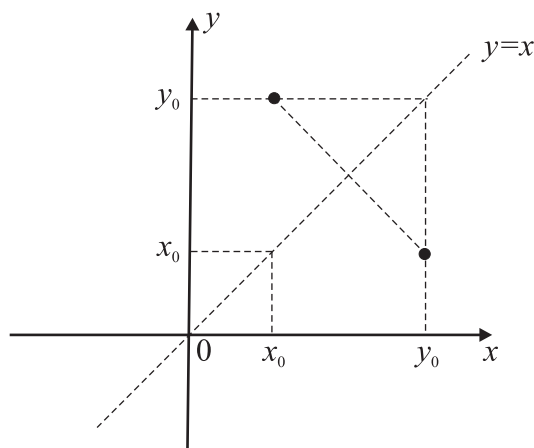


Figura 73: Pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(y_0, x_0)$ .

Uma vez que os pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(y_0, x_0)$  são simétricos em relação à recta de equação  $y = x$  e atendendo à arbitrariedade de  $x_0$  em  $A$ , concluímos que o gráfico de  $f^{-1}$  é o simétrico do gráfico de  $f$  em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares.

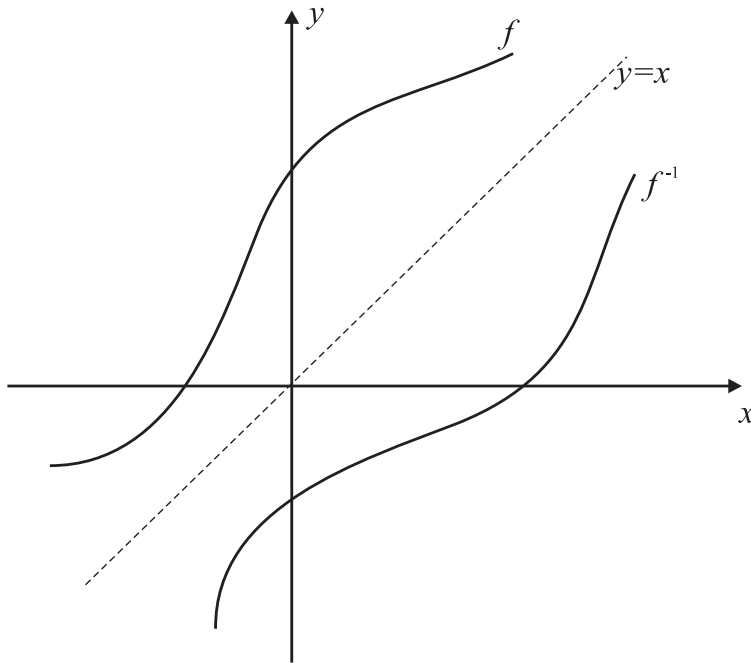


Figura 74: Gráfico da inversa.

De forma equivalente (e talvez mais sugestiva), conhecido o gráfico de  $f$ , o gráfico de  $f^{-1}$  pode ser obtido do seguinte modo:

Começemos por esboçar o gráfico de  $f$  numa folha de papel transparente

Rodemos a folha segundo um ângulo recto no sentido positivo do eixo dos  $yy$

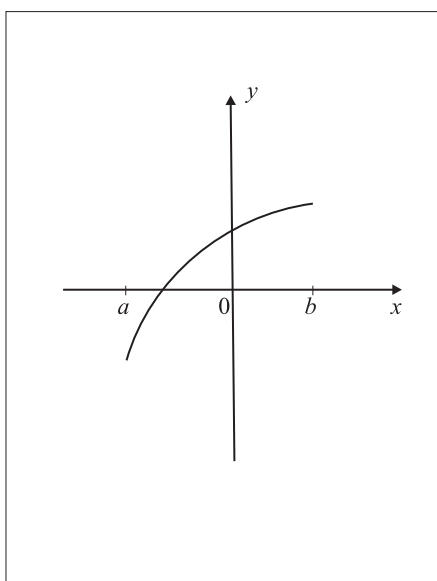
Viremos agora a folha como a página de um livro; obtemos o esboço do gráfico de  $f^{-1}$ .

Recordemos ainda que, se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função injectiva, ou seja, se  $f : A \rightarrow f(A)$  é uma função bijectiva, então

$$f^{-1} \circ f = I_A$$

e

$$f \circ f^{-1} = I_{f(A)}$$
(11)

Figura 75: Gráfico de  $f$ .

onde  $I_A$  [resp.,  $I_{f(A)}$ ] designa a função identidade definida em  $A$  [resp.,  $f(A)$ ].

Seguidamente, consideremos alguns exemplos importantes.

*Exemplo 6.1*

Seja

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = e^x .$$

Trata-se de uma função definida e injectiva em  $\mathbb{R}$  com contradomínio igual a  $]0, +\infty[$ ; a sua inversa,  $\varphi^{-1}$ , é portanto uma função definida no intervalo  $]0, +\infty[$  e com contradomínio igual a  $\mathbb{R}$ .

Para cada  $x > 0$ , ao número real  $\varphi^{-1}(x)$  damos o nome de *logaritmo de  $x$*  e escrevemos

$$\forall x > 0 \quad \varphi^{-1}(x) = \log x = \ln x .$$

A função  $\varphi^{-1}$ , dita *função logarítmica*, é pois uma função bijectiva de  $]0, +\infty[$  em  $\mathbb{R}$ , cujo gráfico é esboçado na figura seguinte

Neste caso, as igualdades em (11) vêm

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \log e^x = x \tag{12}$$

e

$$\forall x > 0 \quad e^{\log x} = x \tag{13}$$



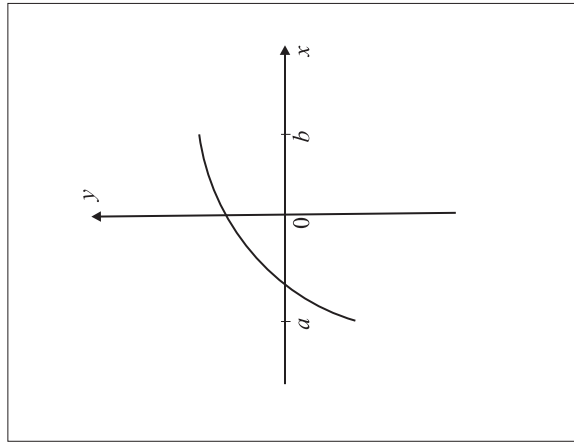


Figura 76: Folha rodada.

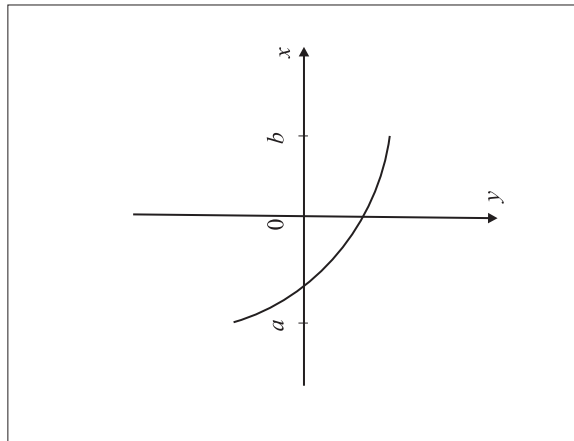


Figura 77: Folha virada.

Recordemos agora que se tem

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$$

o que, em linguagem corrente, se pode ler: a função exponencial transforma a soma dos objectos no produto das respectivas imagens. Intuitivamente, e dado que se trata da função inversa da exponencial, a função logarítmica deve transformar o produto dos objectos na soma das imagens, isto é,

*Teorema 6.1*

$$\forall a, b \in ]0, +\infty[ \quad \log(ab) = \log a + \log b \quad .$$

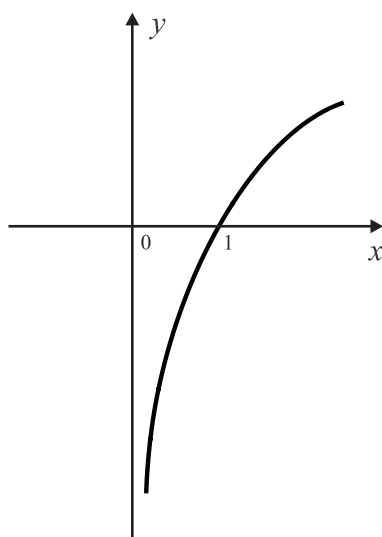


Figura 78: Função logarítmica.

*Demonstração.* Dados números reais  $a$  e  $b$  em  $]0, +\infty[$ , e tendo em conta a sobrejectividade da função exponencial, sabemos que

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad a = e^\alpha \quad \wedge \quad b = e^\beta \quad ;$$

nestas condições, ter-se-á

$$ab = e^\alpha e^\beta = e^{\alpha+\beta}$$

e, conseqüentemente, de (12),

$$\log(ab) = \log(e^{\alpha+\beta}) = \alpha + \beta \quad .$$

Por definição,

$$a = e^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \log a = \alpha$$

e, do mesmo modo, também  $\beta = \log b$ . Concluimos assim, como pretendíamos,

$$\log(ab) = \log a + \log b \quad .$$

□

*Corolário.*

$$\forall a > 0 \quad \log \frac{1}{a} = -\log a \quad .$$

*Demonstração.* Dado  $a > 0$ , tem-se

$$1 = a \cdot \frac{1}{a}$$

e do teorema anterior,

$$0 = \log 1 = \log \left( a \cdot \frac{1}{a} \right) = \log a + \log \frac{1}{a}$$

pelo que

$$\log \frac{1}{a} = -\log a \quad ,$$

o que termina a demonstração.  $\square$

*Exemplo 6.2*

Fixado  $a \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$ , consideremos a função exponencial de base  $a$ :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} &\rightarrow ]0, +\infty[ \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) &= a^x \quad ; \end{aligned}$$

é uma função bijetiva.

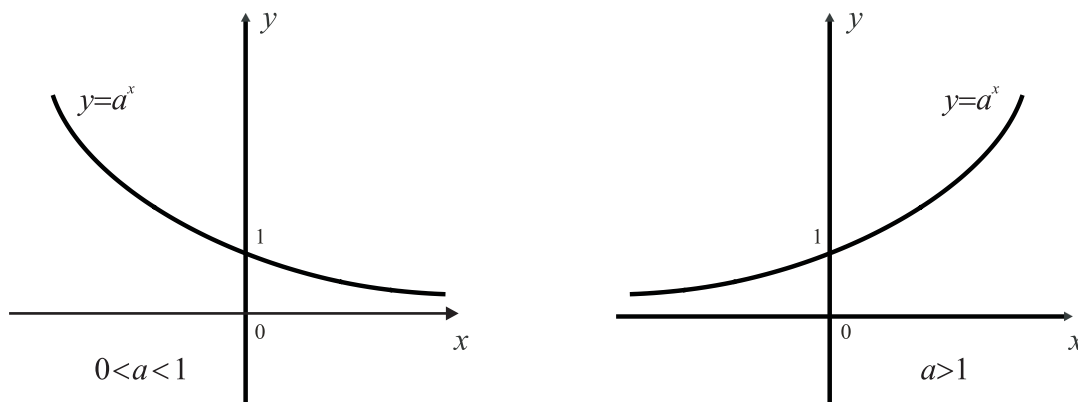
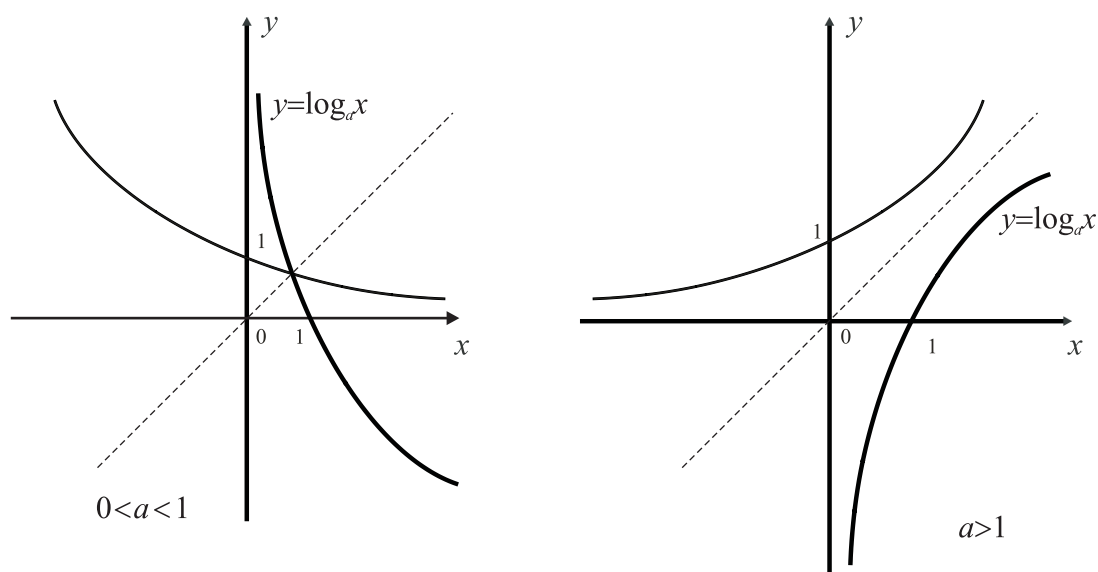


Figura 79: Gráfico da exponencial de base  $a$ .

Trata-se pois de uma função invertível, a cuja inversa se dá o nome de *função logarítmica de base  $a$* :

$$\begin{aligned} \psi^{-1} : ]0, +\infty[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x > 0 \quad \psi^{-1}(x) &= \log_a x \quad . \end{aligned}$$

Figura 80: Gráfico da função logarítmica de base  $a$ .

Procedendo como no exemplo anterior, concluímos agora que se têm as igualdades seguintes:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \log_a(a^x) = x$$

$$\forall x > 0 \quad a^{\log_a x} = x$$

$$\forall x, y > 0 \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Além disso, e uma vez que  $a$  designa um número real positivo, tem-se

$$a = e^{\log a}$$

e conseqüentemente

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a} \quad (14)$$

o que exprime a função exponencial de base  $a$  em termos da função exponencial (de base  $e$ ).

De forma equivalente, se designarmos por  $h$  a função polinomial

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = x \log a \quad ,$$

tem-se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = a^x = e^{h(x)} = \varphi(h(x)) \quad ,$$

onde  $\varphi$  é a função do exemplo 6.1; ou seja,

$$\psi = \varphi \circ h .$$

A igualdade (14) conduz-nos, naturalmente, à suspeita de que deva também existir alguma relação entre as respectivas funções inversas. Com efeito,

*Teorema 6.2*

Para todo o  $a \in ]0, +\infty[\setminus\{1\}$  tem-se

$$\forall x > 0 \quad \log_a x = \frac{\log x}{\log a} .$$

*Demonstração.* Dado  $x > 0$  e tendo em conta que a função exponencial de base  $a$  tem por contradomínio o intervalo  $]0, +\infty[$ ,

$$\exists y \in \mathbb{R} \quad x = a^y$$

e de (14),

$$x = a^y = e^{y \log a} ;$$

como a função logarítmica é injectiva, também

$$\log x = \log(e^{y \log a}) = y \log a .$$

Mas

$$x = a^y \Leftrightarrow \log_a x = y$$

e portanto,

$$\log x = (\log_a x)(\log a) .$$

Porque  $a \neq 1$ ,  $\log a$  é um número real diferente de zero e finalmente,

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} ,$$

o que termina a demonstração.  $\square$

*Exemplo 6.3*

A função polinomial

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$$

não é injectiva, logo não é invertível. No entanto, a sua restrição ao intervalo  $[0, +\infty[$  é já uma função injectiva e tem contradomínio igual ao de  $f$ ; designando por  $F$  esta restrição tem-se que

$$F : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$$

$$\forall x \geq 0 \quad F(x) = x^2$$

e  $F$  é bijectiva.

Conforme definimos anteriormente,

$$F^{-1} : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$$

$$\forall x \geq 0 \quad F^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

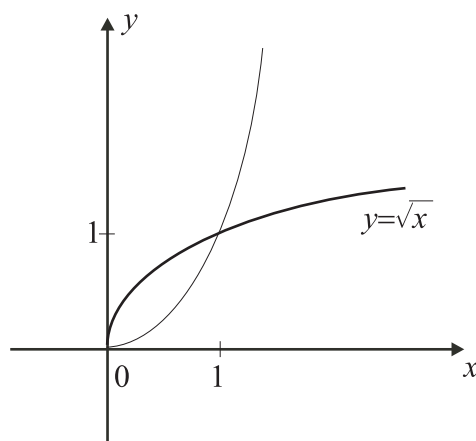


Figura 81: Gráfico da função  $x \rightarrow \sqrt{x}$ .

#### Exemplo 6.4

Consideremos a função seno; trata-se de uma função definida em  $\mathbb{R}$ , com contradomínio  $[-1, 1]$  e periódica com período principal igual a  $2\pi$ . Não se trata, portanto, de uma função injectiva (logo, não é invertível).

Como no exemplo anterior, vamos determinar um subconjunto não vazio  $A$  de  $\mathbb{R}$  por forma a que a restrição a  $A$  da função seno seja uma função injectiva e tenha por contradomínio o intervalo  $[-1, 1]$ .

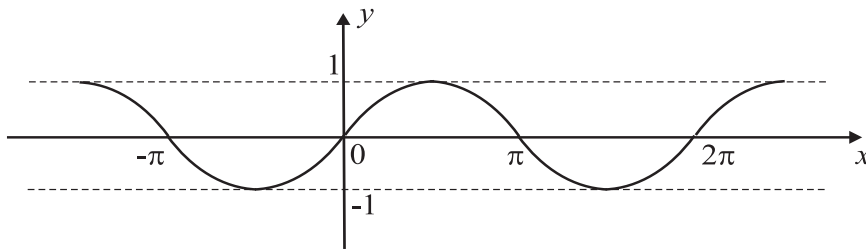
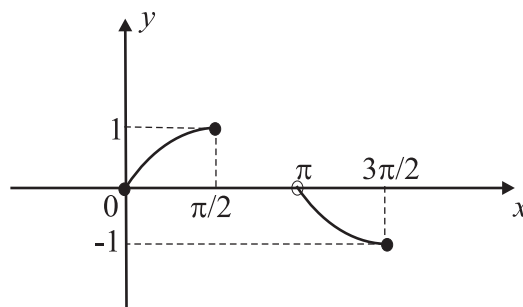


Figura 82: Gráfico da função seno.

Figura 83: Gráfico da restrição do seno a  $[0, \frac{\pi}{2}] \cup \pi, \frac{3\pi}{2}]$ .

Como é evidente, temos uma infinidade de escolhas possíveis para  $A$ ; por exemplo, o conjunto  $[0, \frac{\pi}{2}] \cup \pi, \frac{3\pi}{2}]$  satisfaz as condições impostas

Trata-se obviamente de uma escolha algo "artificial"; mais natural seria escolher para  $A$  o intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , o que faremos.

Designando esta restrição da função seno por  $\phi$ , tem-se

$$\begin{aligned} \phi &: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1] \\ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \phi(x) &= \text{sen } x \end{aligned}$$

e  $\phi$  é uma função bijectiva.

A sua inversa é uma função definida no intervalo  $[-1, 1]$  com contra-domínio igual a  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  a que, por *definição*, damos o nome de *função arco seno*:

$$\begin{aligned} \phi^{-1} &: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \forall x \in [-1, 1] \quad \phi^{-1}(x) &= \text{arcsen } x \quad ; \end{aligned}$$

tem-se evidentemente,

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad y = \text{arcsen } x \quad \Leftrightarrow \quad \text{sen } y = x \quad .$$

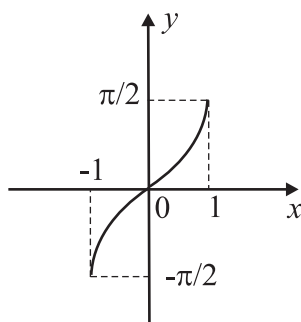


Figura 84: Gráfico da função arco seno.

O gráfico da função arco seno é dado por  
 Observe-se que "arcsen  $x$ " é uma função ímpar:

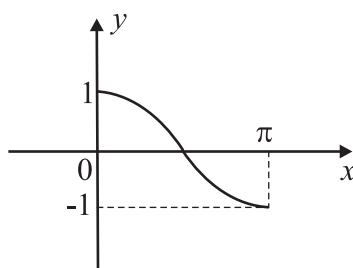
$$\forall x \in [-1, 1] \quad \text{arcsen}(-x) = -\text{arcsen } x \quad .$$

Tomando agora a função cosseno, também ela, sendo periódica, não é injectiva. Como no caso anterior, começamos por restringir a função a um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  por forma a que esta nova função seja injectiva e tenha por contradomínio o intervalo  $[-1, 1]$ .

Tomamos  $A = [0, \pi]$  e seja

$$\Psi : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \Psi(x) = \cos x$$

Figura 85: Gráfico de  $\Psi$ .

Trata-se de uma função invertível cuja inversa  $\Psi^{-1}$  tem por domínio o intervalo  $[-1, 1]$  e por contradomínio o intervalo  $[0, \pi]$ . Por definição, a  $\Psi^{-1}$  chamamos *função arco cosseno* e escrevemos

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \Psi^{-1}(x) = \arccos x \quad .$$



De forma equivalente,

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \forall y \in [0, \pi] \quad y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x .$$

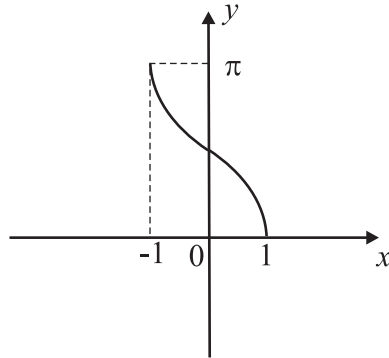


Figura 86: Gráfico de arco coseno.

No que respeita à função tangente (também ela não injectiva), começamos por considerar a sua restrição ao intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

Designando esta nova função por  $\theta$ , vem

$$\theta : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \quad \theta(x) = \operatorname{tg} x$$

e  $\theta$  é uma função bijectiva.

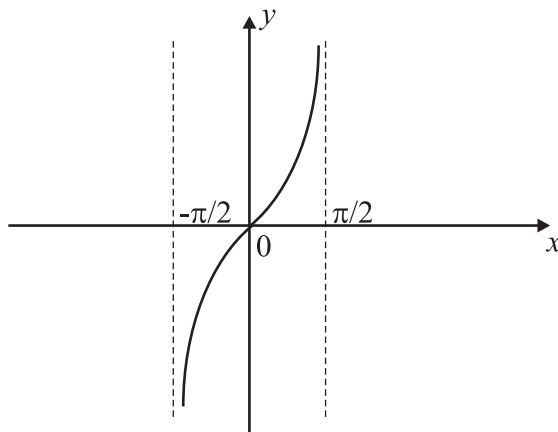


Figura 87: Gráfico de  $\theta$ .

Por definição, à sua inversa  $\theta^{-1}$  damos o nome de *função arco tangente* e escrevemos

$$\theta^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x .$$

Tem-se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \quad y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x .$$

A função arco tangente é ímpar; o seu gráfico vem dado por

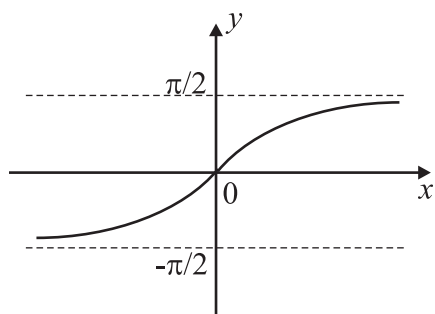


Figura 88: Gráfico de arco tangente.

## 7 Funções monótonas

Consideremos os seguintes exemplos de funções reais de variável real, cujos gráficos são esboçados nas figuras seguintes:

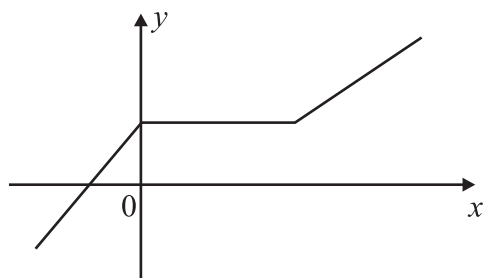
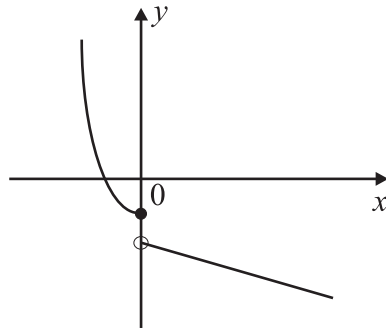
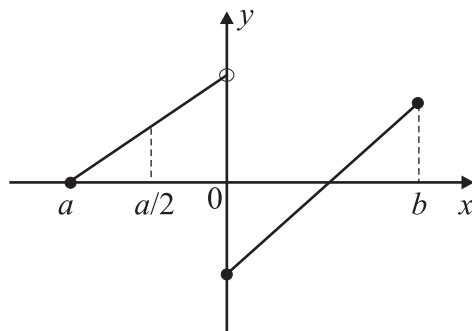


Figura 89: Gráfico de  $f$ .

Do ponto de vista intuitivo, o gráfico da função  $f$  sugere-nos “crescimento quando avançamos no sentido positivo do eixo dos  $xx$ ”. Mais precisamente, esta impressão resulta do seguinte facto: tomando dois quaisquer

Figura 90: Gráfico de  $g$ .Figura 91: Gráfico de  $h$ .

pontos  $x$  e  $y$  do domínio de  $f$  tais que  $x \leq y$ , também as respectivas imagens verificam  $f(x) \leq f(y)$ . Por outras palavras, a função  $f$  mantém no contradomínio a relação de ordem do domínio.

Já o gráfico de  $g$  sugere “decréscimo”, no sentido em que “à medida que  $x$  aumenta, a imagem  $g(x)$  diminui”; com mais rigor, sempre que  $x$  e  $y$  são pontos do domínio de  $g$  e  $x \leq y$ , tem-se  $g(x) \geq g(y)$ . A função  $g$  inverte no contradomínio a relação de ordem do domínio.

Finalmente, no caso da função  $h$  não observamos qualquer um dos “bons comportamentos” exibidos por  $f$  e  $g$ . Com efeito, temos

$$a < b \quad \text{e} \quad h(a) < h(b) \quad ,$$

mas

$$\frac{a}{2} > 0 \quad \text{e} \quad h\left(\frac{a}{2}\right) > h(0) \quad .$$

Diremos então que  $f$  e  $g$  são funções monótonas, mas que  $h$  não é monótona;  $f$  dir-se-á monótona crescente, enquanto que  $g$  é função monótona decrescente.

*Definição.*

Seja  $A$  um subconjunto não vazio de  $\mathbb{R}$  e uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ .

(1)  $f$  diz-se *função crescente* sse

$$\forall x, y \in A \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y)$$

(2)  $f$  diz-se *função decrescente* sse

$$\forall x, y \in A \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y)$$

(3)  $f$  diz-se *função monótona* sse

$f$  é crescente ou decrescente.

A função  $h$  anterior mostra que existem funções reais de variável real que não são monótonas.

Por outro lado, qualquer função definida e constante em  $A \neq \emptyset$  é monótona crescente, mas também é monótona decrescente. Sem dificuldade prova-se ainda que, se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é monótona crescente e decrescente, então  $f$  é constante.

Nas definições acima, utilizámos a relação de ordem lata em  $\mathbb{R}$ ; considerando a correspondente relação de ordem estrita, diremos que

*Definição.*

Dados  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$  e uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,

(1)  $f$  é *função estritamente crescente* sse

$$\forall x, y \in A \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y)$$

(2)  $f$  é *função estritamente decrescente* sse

$$\forall x, y \in A \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y)$$

(3)  $f$  é *função estritamente monótona* sse

$f$  é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Dos três exemplos dados no início, apenas  $g$  é função estritamente monótona (decrescente). É ainda evidente que, se  $A \neq \emptyset$  é subconjunto de  $\mathbb{R}$  não singular, qualquer função definida e constante em  $A$  não é estritamente monótona.

*Exemplo 7.1*

Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ , seja

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = ax + b \quad .$$

Então,

Se  $a \geq 0$ , a função  $F$  é crescente

Se  $a \leq 0$ , a função  $F$  é decrescente

$F$  é função estritamente monótona sse  $a \neq 0$

*Exemplo 7.2*

Dado  $a \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$ , seja  $G$  a função exponencial de base  $a$ :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) = a^x \quad .$$

Então,

$a > 1 \Rightarrow G$  é função estritamente crescente

$0 < a < 1 \Rightarrow G$  é função estritamente decrescente

*Exemplo 7.3*

Chamamos *função de Heaviside* à função  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

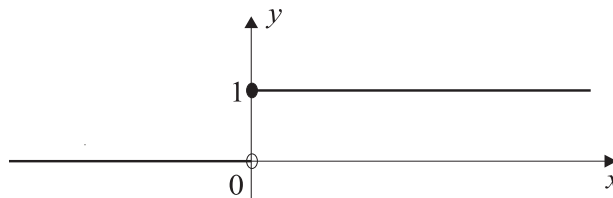


Figura 92: Gráfico de  $H$ .

$H$  é uma função crescente; não é estritamente monótona.

*Exemplo 7.4*

Se  $\varphi$  é uma função estritamente monótona,  $\varphi$  é invertível e tem inversa  $\varphi^{-1}$  estritamente monótona. Mais precisamente, se  $\varphi$  é estritamente crescente [resp., decrescente], então  $\varphi^{-1}$  é função estritamente crescente (!) [resp., decrescente].

Demonstremos: designando por  $A$  o domínio de  $\varphi$  e supondo que  $\varphi$  é estritamente crescente (a demonstração é inteiramente análoga se supusermos que  $\varphi$  é estritamente decrescente), sabemos que

$$\forall x, y \in A \quad x < y \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) < \varphi(y) \quad ;$$

proposição que é equivalente a

$$\forall x, y \in A \quad \varphi(x) \geq \varphi(y) \quad \Rightarrow \quad x \geq y \quad (15)$$

Uma vez que  $\varphi$  é uma aplicação bijectiva de  $A$  sobre  $\varphi(A) = B \subset \mathbb{R}$ , tem-se que

$$\forall z \in B \quad \exists^1 x \in A \quad z = \varphi(x)$$

e, por consequência, a proposição (15) pode escrever-se

$$\forall z, w \in B \quad z \geq w \quad \Rightarrow \quad \varphi^{-1}(z) \geq \varphi^{-1}(w) \quad ,$$

o que mostra que  $\varphi^{-1}$  é função crescente. Mas  $\varphi^{-1}$  é injectiva, logo  $\varphi^{-1}$  é estritamente crescente, como pretendíamos provar.

Nestas condições, do exemplo 7.2 decorre que:

Se  $a > 1$ ,  $\log_a x$  é função estritamente crescente

Se  $0 < a < 1$ ,  $\log_a x$  é função estritamente decrescente.

## 8 Funções limitadas

### 8.1 Definição e propriedades.

Uma função real de variável real diz-se *majorada* [resp., *minorada*; *limitada*] sse o seu contradomínio é um conjunto majorado [resp., minorado; limitado].

As correspondentes definições para subconjuntos de  $\mathbb{R}$  permitem-nos ser mais explícitos; assim:

*Definição*

Seja  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$  e uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a)  $f$  diz-se função *majorada* sse  

$$\exists \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq \beta$$
- (b)  $f$  diz-se função *minorada* sse  

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad \alpha \leq f(x)$$
- (c) A função  $f$  diz-se *limitada* sse  

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad \alpha \leq f(x) \leq \beta \quad .$$

### Exemplo 8.1

Toda a função definida e constante num subconjunto  $D \neq \emptyset$  de  $\mathbb{R}$  é limitada.

A função de Heaviside, cujo contradomínio é o conjunto  $\{0, 1\}$ , é uma função limitada.

### Exemplo 8.2

As funções seno e cosseno são limitadas; tem-se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$

$$-1 \leq \operatorname{cos} x \leq 1 \quad .$$

A função

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \operatorname{arctg} x$$

é também uma função limitada; tem-se

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{2} \quad .$$

### Exemplo 8.3

Fixado  $a \in ]0, +\infty[ \setminus \{1\}$ , a função exponencial de base  $a$  é minorada:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x > 0 \quad ,$$

mas não é majorada (e, portanto, não é limitada). Com efeito, dado um qualquer número real positivo  $\beta$ , tomemos (por exemplo) o real  $\log_a(\beta + 1)$ ; então

$$a^{\log_a(\beta+1)} = \beta + 1 \quad .$$

Mostrámos assim que

$$\forall \beta \in \mathbb{R}^+ \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad a^x > \beta .$$

*Exemplo 8.4*

Seja

$$\varphi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x) = 2 - \frac{1}{x} .$$

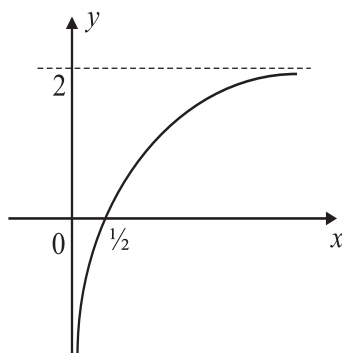


Figura 93: Gráfico de  $\varphi$ .

$\varphi$  é uma função majorada já que se tem

$$\forall x > 0 \quad 2 - \frac{1}{x} < 2 ;$$

no entanto não é minorada, logo  $\varphi$  não é limitada.

*Teorema 8.1*

Seja  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$  e uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Então,

$f$  é limitada sse  $|f|$  é limitada.

*Demonstração.* Suponhamos, em primeiro lugar, que  $f$  é uma função limitada e sejam números reais  $\alpha < 0$  e  $\beta > 0$  tais que

$$\forall x \in D \quad \alpha \leq f(x) \leq \beta .$$

Uma vez que  $|f|$  é sempre uma função minorada:

$$\forall x \in D \quad |f|(x) = |f(x)| \geq 0 ,$$



falta provar que  $|f|$  é majorada. Ora, por hipótese, sabemos que:

Se  $x \in D$  é tal que  $f(x) \geq 0$ , tem-se

$$|f(x)| = f(x) \leq \beta = |\beta|$$

enquanto que, se  $x \in D$  é tal que  $f(x) < 0$ ,

$$f(x) \geq \alpha \Rightarrow |f(x)| = -f(x) \leq -\alpha = |\alpha| .$$

Tomando então um número real  $L > 0$  tal que

$$L \geq |\alpha| \quad \wedge \quad L \geq |\beta|$$

concluimos, como pretendíamos, que se tem

$$\forall x \in D \quad |f(x)| \leq L .$$

Reciprocamente, suponhamos agora que  $|f|$  é uma função limitada e seja  $L > 0$  tal que

$$\forall x \in D \quad 0 \leq |f(x)| \leq L$$

ou, de forma equivalente,

$$\forall x \in D \quad -L \leq f(x) \leq L ,$$

e  $f$  é limitada. □

De forma equivalente, o teorema anterior assegura que

$f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é função limitada

sse

$$\exists L > 0 \quad \forall x \in D \quad |f(x)| \leq L ,$$

caracterização que é frequentemente utilizada.

O mesmo teorema permite ainda provar o seguinte resultado, cuja demonstração (bastante simples) deixamos como exercício.

### Teorema 8.2

Seja  $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$  e  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções limitadas.

Então, as funções  $f + g$ ,  $f - g$  e  $fg$  são limitadas.

Observemos que, se *nenhuma* das funções  $f$  e  $g$  é limitada, qualquer uma das funções  $f + g$ ,  $f - g$  ou  $fg$  *pode* ser limitada. Por exemplo,

*Exemplo 8.5*

Sejam  $f$  e  $g$  as funções definidas em  $\mathbb{R}$  por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x \quad \wedge \quad g(x) = C(x)$$

( $g$  é a função característica)

Como  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  e  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ ,  $f$  e  $g$  não são limitadas. Qualquer uma destas funções é, até, não majorada e não minorada.

No entanto, a função mantissa

$$\begin{aligned} f - g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow x - C(x) \end{aligned}$$

é tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq (f - g)(x) < 1$$

logo é uma função limitada (ver figura 67).

Por outro lado, se uma das funções (digamos  $f$ ) é limitada e a outra não o for, qualquer uma das funções  $f + g$ ,  $f - g$  ou  $fg$  é não limitada.

Com efeito, e por exemplo, consideremos a função  $f + g$  e, por absurdo, suponhamos que  $f + g$  é função limitada. Como  $g$  também é limitada, do teorema 8.2 concluímos que

$$(f + g) - g = f$$

é função limitada, o que contradiz a hipótese.

Nas condições do teorema 8.2, se

$$A = \{x \in D; \quad g(x) \neq 0\} \neq \emptyset,$$

podemos ainda definir em  $A$  a função  $\frac{f}{g}$ . No entanto já não podemos garantir que o quociente seja uma função limitada. Assim:

*Exemplo 8.6*

Sejam  $f, g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que

$$\forall x \in [-2, 2] \quad f(x) = x^2 - 1 \quad \wedge \quad g(x) = x + 1 ;$$

é fácil reconhecer que ambas são funções limitadas. Quanto à função quociente, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : [-2, 2] \setminus \{-1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow x - 1 \end{aligned}$$

e  $\frac{f}{g}$  é uma função limitada.

Tomemos agora as funções  $F$  e  $G$  definidas em  $\mathbb{R}$  por

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \operatorname{sen} x \quad \wedge \quad G(x) = \operatorname{cos} x ,$$

ambas limitadas.

A função quociente tem por domínio o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R}; \operatorname{cos} x \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi \right[$$

e é dada por

$$\forall x \in A \quad \frac{f}{g}(x) = \operatorname{tg} x ;$$

a função tangente não é majorada nem minorada.

No que diz respeito à composição, podemos afirmar o seguinte:

*Teorema 8.3*

Sejam funções  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  tais que

$$D = \{x \in B; g(x) \in A\} \neq \emptyset$$

e seja  $f \circ g : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Se  $f$  é função limitada então  $f \circ g$  é limitada.

*Demonstração.* Por hipótese, existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$\forall x \in A \quad \alpha \leq f(x) \leq \beta .$$

Para todo o  $x \in D$ , tem-se  $g(x) \in A$  e, portanto também,

$$\forall x \in D \quad \alpha \leq f(g(x)) = (f \circ g)(x) \leq \beta ,$$

o que significa que  $f \circ g$  é função limitada. □

*Exemplo 8.8*

Decorre imediatamente do teorema 8.3 que a função  $h$  definida por

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \quad h(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x^2-4}$$

é uma função limitada. Além disso,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \quad -\frac{\pi}{2} < h(x) < \frac{\pi}{2} .$$

## 8.2 Supremo e ínfimo de uma função limitada

Seja  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função majorada. Um número real  $\alpha$  diz-se um *majorante da função  $f$*  sse

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq \alpha \quad .$$

O contradomínio  $f(D)$  é subconjunto não vazio e majorado de  $\mathbb{R}$  e o axioma do supremo garante então que  $f(D)$  tem supremo  $s \in \mathbb{R}$ . A  $s$  damos o nome de *supremo de  $f$*  e designamo-lo por qualquer um dos símbolos seguintes

$$\sup_D f = \sup f = \sup_{x \in D} f(x) = \sup\{f(x); x \in D\} \quad .$$

Além disso, se o contradomínio  $f(D)$  tiver máximo, isto é, se  $\sup f$  for um ponto do contradomínio, diremos que a função  $f$  tem *máximo* e utilizamos qualquer uma das designações seguintes

$$\max f = \max_D f = \sup_{x \in D} f(x) = \max f(D) \quad .$$

É claro que se  $f$  é uma função majorada, existe sempre o supremo de  $f$ , mas  $f$  pode não ter máximo.

Supondo que  $f$  tem máximo, isto significa que

$$\exists x_0 \in D \quad f(x_0) = \max_D f \quad ,$$

ou

$$\exists x_0 \in D \quad \forall x \in D \quad f(x) \leq f(x_0) \quad ;$$

nestas condições, diremos que  $x_0$  é um *ponto de máximo* de  $f$ .

De forma inteiramente análoga, se  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função minorada então  $f$  tem *ínfimo* e

$$\inf f = \inf_D f = \inf_{x \in D} f(x) = \inf f(D) \quad .$$

A função  $f$  tem *mínimo* sse o ínfimo de  $f$  é ponto do contradomínio sse

$$\exists x_1 \in D \quad f(x_1) = \inf f \quad ;$$

nestas condições, tem-se

$$f(x_1) = \min_D f = \min_{x \in D} f(x)$$

e  $x_1$  diz-se um *ponto de mínimo de  $f$* .

*Exemplo 8.9*

Seja

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) &= \text{sen } x \quad .\end{aligned}$$

A função  $\varphi$  tem máximo e mínimo e

$$\max \varphi = 1 \quad \text{e} \quad \min \varphi = -1 \quad .$$

Além disso,  $x_0 \in \mathbb{R}$  é ponto de máximo de  $\varphi$  sse

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad x_0 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ;$$

$x_0 \in \mathbb{R}$  é ponto de mínimo de  $\varphi$  sse

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad x_0 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad .$$

*Exemplo 8.10*

Seja

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) &= \text{arctg } x \quad .\end{aligned}$$

$\psi$  é função limitada, logo tem supremo e ínfimo:

$$\sup \psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \inf \psi = -\frac{\pi}{2} \quad .$$

No entanto,  $\psi$  não tem máximo nem mínimo.

*Exemplo 8.11*

Seja  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função mantissa; isto é,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(x) = x - C(x) \quad .$$

$\theta$  é função limitada e

$$\sup \theta = 1 \quad , \quad \inf \theta = 0 \quad .$$

$\theta$  não tem máximo, uma vez que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \theta(x) < 1 \quad ,$$

mas tem mínimo (necessariamente) igual a zero. Além disso,

$x_0$  é ponto de mínimo de  $\theta$  sse  $x_0 \in \mathbb{Z}$  .

*Exemplo 8.12*

Seja

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = e^{-|x|} .$$

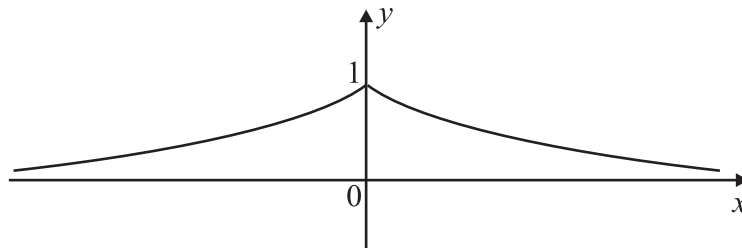


Figura 94: Gráfico de  $h$ .

$h$  é função limitada, tendo-se

$$\sup h = 1 \quad , \quad \inf h = 0 \quad .$$

A função  $h$  não tem mínimo, mas tem máximo. Tem até um único ponto de máximo:  $x_0 = 0$ .

## Índice remissivo

diferença, 13

função

    diferença, 7

    exponencial, 10

    de base  $a$ , 11

    injectiva, 5

    polinomial, 14

    produto, 7

    racional, 15

    soma, 6

produto, 13

soma, 13