Conjuntos

Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa:
António St. Aubyn, Maria Carlos Figueiredo,
Luís de Loura, Luísa Ribeiro, Francisco Viegas

Lisboa, Março de 2004

O documento presente foi obtido directamente do código TeX fornecido pelos autores com alterações de formatação. A versão corrente é de 27 de Setembro de 2005. A revisão deste texto do ponto de vista gráfico ainda não está completa. Novas versões poderão ficar disponíveis no futuro a partir de http://preprint.math.ist.utl.pt/files/ppgmutlconjuntos.pdf. O DMIST agradece ao Grupo de Matemática da UTL a possibilidade de facultar o texto aos alunos das disciplinas introdutórias de Matemática do IST.

Conteúdo

Lista de Figuras

CONJUNTOS

1 Introdução

Pertenço a um género de portugueses
Que depois de estar a Índia descoberta
Ficaram sem trabalho. A morte é certa.
Tenho pensado nisto muitas vezes.

Álvaro de Campos, *Opiário*

Pertencia em suma à classe de mulheres que, a começar pelo corpo e acabar pela alma, se tornam amantes perfeitas. Lianças com elas jamais se rompem. Quem as ama, ama-as até à morte.

Aquilino Ribeiro, *A Casa Grande de Romarigães*

Caminhando em silêncio pelo Ferregial, Carlos revolvia uma ideia que lhe viera de repente, ao receber aquele doce olhar. Porque é que Dâmaso não levaria uma manhã o Castro Gomes aos Olivais, a ver as colecções do Craft?. . .

Eça de Queiroz, *Os Maias*

Em cada um dos extractos apresentados intervém a noção de conjunto, ou de colecção de objectos. No poema de Álvaro de Campos fala-se de "género" de portugueses; no texto de Aquilino é mencionada uma "classe" de mulheres; nos Maias há referência às "colecções" do Craft. Todos nós sabemos o que é um objecto e o que é uma colecção (ou um conjunto) de objectos. Em Matemática, onde a linguagem tem de ser completamente precisa, não basta estarmos convencidos de que sabemos o que é um objecto ou um conjunto de objectos, precisamos de formalizar esses conceitos. O ideal seria defini-los! Mas... Será que se pode definir conjunto? E objecto?

Vejamos o que dizem alguns dicionários quanto a estes conceitos:

Dicionário Universal da Língua Portuguesa, Texto Editora	
conjunto:	complexo; reunião das partes que constituem um todo; agrupamento de pessoas que tocam música juntas
colecção:	conjunto, reunião de objectos; compilação; ajuntamento; série; grupo

Dicionário da Língua Portuguesa Contemporânea, Academia das Ciências de Lisboa, Editorial Verbo	
conjunto:	Reunião de vários elementos que funcionam como uma unidade; aglomeração; colecção; grupo; série
colecção:	conjunto de objectos da mesma natureza; compilação; colectânea

Os dicionários não nos ajudam; dizer que um conjunto é uma aglomeração não é mais do que substituir uma palavra por outra, sem definir o que quer que seja. Será culpa dos dicionários? Para respondermos a esta questão temos de saber o que é uma definição. Ora definir um conceito não é mais do que explicá-lo através de outros conceitos já conhecidos.

Exemplo 1. Um número par é um número natural divisível por dois.

Definimos um novo conceito (o de **número par**) utilizando dois conceitos já conhecidos (o de **número natural** e o de **número natural divisível por dois**).

Exemplo 2. Um número ímpar é um número natural que não é par.

O novo conceito definido (**número ímpar**) baseia-se no conceito de **número par** (definido anteriormente).

Em resumo: Um conceito é definido através de outros conceitos já conhecidos. Uma vez inicializado, este processo de definir novos conceitos não põe quaisquer problemas. A grande questão é o início. Como começar?

A ideia é simples: começamos com alguns conceitos (de preferência poucos), que não definimos, mas que admitimos todos sabermos o que são. Estes conceitos são chamados *conceitos primitivos* ou *noções primitivas*. A partir dos conceitos primitivos podemos ir introduzindo novos conceitos a que chamamos *conceitos derivados*.

Algo de análogo se passa com as proposições verdadeiras que queremos construir e que envolvem os diversos conceitos (quer primitivos, quer derivados). Para construir uma proposição verdadeira utilizamos regras lógicas (as chamadas regras de inferência) aplicadas a outras proposições que já sabemos serem verdadeiras. Uma demonstração não é mais do que a aplicação de regras de inferência a proposições que sabemos serem verdadeiras; o resultado obtido é uma nova proposição verdadeira, a que é usual chamar *teorema*. Mais uma vez a grande questão está na inicialização do processo. Como começar? É simples: escolhemos um certo número de proposições que decidimos (arbitrariamente) serem verdadeiras. Estas proposições são os chamados *axiomas*. A partir delas demonstramos outras proposições — os teoremas.

Em resumo: uma teoria matemática é constituída por um certo número de conceitos primitivos e por um certo número de axiomas. A partir deles são introduzidos novos conceitos — os conceitos derivados — e novas proposições verdadeiras — os teoremas.

2 Noção intuitiva de conjunto

O conceito de conjunto está na base de toda a Matemática. Antes de nos debruçarmos sobre o conceito de conjunto, começaremos por dar alguns exemplos de conjuntos.

Exemplos de conjuntos

- O conjunto das cidades de Portugal.
- O conjunto dos alunos da Universidade Técnica de Lisboa.
- O conjunto dos números naturais.
- O conjunto das equipas de futebol da divisão de honra.
- O conjunto dos cidadãos portugueses que estão presos.
- O conjunto dos deputados da Assembleia da República Portuguesa.
- O conjunto dos números reais.
- O conjunto dos países da União Europeia.
- O conjunto dos números racionais.
- O conjunto dos sócios dos Bombeiros Voluntários de Campo d'Ourique.
- O conjunto dos números pares.
- O conjunto dos números ímpares.
- O conjunto dos números naturais que são múltiplos de 4.
- O conjunto dos números primos.
- O conjunto dos números reais que são solução da equação $x^4 + x = 0$.

Conjunto é um conceito primitivo e portanto não definimos o que é um conjunto; mas a partir da noção de conjunto podemos definir muitos outros conceitos matemáticos. Claro que cada um de nós tem uma ideia intuitiva do que é um conjunto. Essa ideia pode ser explicada intuitivamente e com exemplos; o que não fazemos é definir o conceito de conjunto.

Um conjunto é constituído por objectos; o conceito de objecto é também um conceito primitivo, pelo que não o definimos.

Neste momento temos dois conceitos primitivos: o de ***conjunto*** e o de ***objecto***. Dado um objecto e um conjunto temos ainda de saber o que significa esse objecto pertencer a esse conjunto. Por outras palavras, aparece aqui um terceiro conceito: o conceito de ***pertença***. Também o tomamos como conceito primitivo e consequentemente não o definimos.

Exemplos

- Braga pertence ao conjunto das cidades de Portugal.
- Paris não pertence ao conjunto das cidades de Portugal.
- 57 pertence ao conjunto dos números naturais.
- 57 não pertence ao conjunto dos números primos.
- $\sqrt{2}$ pertence ao conjunto dos números reais.
- $\sqrt{2}$ não pertence ao conjunto dos números racionais.

Estamos agora aptos a desenvolver uma teoria baseada naqueles três conceitos primitivos (conjunto, objecto e pertença): trata-se da chamada teoria intuitiva dos conjuntos.

3 Objectos, conjuntos, pertença

Na teoria intuitiva de conjuntos partimos de três conceitos primitivos: o de *objecto*, o de *conjunto* e o de *pertença*. Conhecer um conjunto é conhecer cada um dos objectos que pertencem a esse conjunto. Para dizermos que um objecto x pertence a um conjunto A escrevemos

$$x \in A.$$

Nesse caso dizemos ainda que x é um elemento do conjunto A. Por vezes, em vez de escrevermos $x \in A$ escrevemos, com significado idêntico, $A \ni x$.

Para dizermos que um objecto y não pertence a um conjunto B escrevemos

$$y \notin B.$$

Neste caso dizemos também que y não é um elemento do conjunto B. Em vez de $y \notin B$ escreveremos algumas vezes, com significado idêntico, $B \not\ni y$.

Exemplos de proposições verdadeiras

- Leiria pertence ao conjunto das cidades de Portugal.
- O Presidente Jorge Sampaio não pertence ao conjunto dos alunos da Universidade Técnica de Lisboa.
- O número 5 pertence ao conjunto dos números naturais.
- O número -35 não pertence ao conjunto dos números naturais.
- O número π não pertence ao conjunto dos números naturais.
- O Sporting pertence ao conjunto das equipas de futebol da divisão de honra.
- O Primeiro Ministro Durão Barroso não pertence ao conjunto dos cidadãos portugueses que estão presos.
- Francisco Louçã pertence ao conjunto dos deputados da Assembleia da República Portuguesa.
- O número $\sqrt{2}$ pertence ao conjunto dos números irracionais.
- A China não pertence ao conjunto dos países da União Europeia.
- O número $\sqrt{2}$ não pertence ao conjunto dos números racionais.
- O número $\sqrt{4}$ pertence ao conjunto dos números racionais.

Exemplos de proposições falsas

- Leiria pertence ao conjunto das cidades da Ásia.
- O Benfica pertence ao conjunto das equipas de futebol da Dinamarca.
- O número 5,47 não pertence ao conjunto dos números reais.

Dois conjuntos A e B são iguais sse tiverem os mesmos elementos. Portanto, sendo A e B dois conjuntos, tem-se

$$A = B$$

sse, para todo o objecto x, forem verificadas as seguintes condições:

$$x \in A \Rightarrow x \in B \qquad \text{e} \qquad x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Para evitar paradoxos lógicos que não nos interessa aqui considerar, e também por comodidade de linguagem, suporemos que todos os conjuntos de que falaremos são subconjuntos de um conjunto U a que é usual chamar universo. Com esta hipótese (que será mantida ao longo de todo este texto), dois conjuntos A e B são iguais sse

$$\forall x \in U \quad x \in A \Rightarrow x \in B \quad \wedge \quad x \in B \Rightarrow x \in A$$

ou, de forma equivalente, sse

$$\forall x \in U \quad x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Vemos assim que a igualdade entre conjuntos é a tradução, em termos da teoria dos conjuntos, da operação lógica da equivalência. Provar que dois conjuntos A e B são iguais é provar que as proposições "$x \in A$" e "$x \in B$" são equivalentes.

Conhecer um conjunto é saber quais são os seus elementos. Então, para representarmos um conjunto, podemos convencionar escrever todos os seus elementos, delimitados por chavetas. Por exemplo, sendo A o conjunto dos números pares maiores ou iguais a 2 e menores ou iguais a 10, tem-se

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}.$$

Sendo B o conjunto das capitais dos países da União Europeia (em 2002) tem-se

$$\begin{aligned} B = \{&\text{Amsterdão, Atenas, Berlim, Bruxelas, Copenhaga,} \\ &\quad \text{cidade do Luxemburgo, Dublin, Estocolmo, Helsínquia,} \\ &\qquad\qquad \text{Lisboa, Londres, Madrid, Paris, Roma, Viena}\}. \end{aligned}$$

Dizemos que os conjuntos A e B estão definidos *extensivamente*. Claro que, por razões de ordem prática, só é possível definir um conjunto extensivamente se ele tiver poucos elementos. Caso contrário, se quisermos definir extensivamente um conjunto, teremos de convencionar o uso de abreviaturas, normalmente reticências. Por exemplo

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 97, 98, 99, 100\}$$

é o conjunto de todos os números inteiros maiores ou iguais a 1 e menores ou iguais a 100. Atenção! Quando usamos abreviaturas na definição extensiva de um determinado conjunto é imprescindível que não restem dúvidas sobre o significado dessas abreviaturas.

Uma outra forma de definir um conjunto é dizer uma propriedade a que todos os elementos desse conjunto obedeçam e a que os objectos que não pertençam a esse conjunto não obedeçam. Nesse caso dizemos que o conjunto está definido *compreensivamente*. Por exemplo

$$\{x \in \mathbb{N}; x \geq 1 \text{ e } x \leq 100\}$$

é o conjunto de todos os números naturais maiores ou iguais a 1 e menores ou iguais a 100; designando por A esse conjunto, podemos escrever

$$A = \{x \in \mathbb{N}; x \geq 1 \text{ e } x \leq 100\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 97, 98, 99, 100\}.$$

Quando escrevemos

$$A = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 97, 98, 99, 100\}$$

dizemos que o conjunto A está definido extensivamente (apesar do uso abusivo de reticências). Quando escrevemos

$$A = \{x \in \mathbb{N};\ x \geq 1 \text{ e } x \leq 100\}$$

dizemos que o conjunto A está definido compreensivamente.

Seja agora B o conjunto assim definido (compreensivamente):

$$B = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 1 \text{ e } x \leq 100\}.$$

Será que o conjunto B coincide com o conjunto A? É claro que não porque, por exemplo, o número real π pertence a B e não pertence a A. Cuidado! as expressões proposicionais (na variável x) que ocorrem nas definições de A e de B são semelhantes:

$$x \geq 1 \text{ e } x \leq 100.$$

A diferença está nos seus domínios. Na definição de A o domínio da variável x é o conjunto dos números naturais, enquanto na definição de B

esse domínio é o conjunto dos números reais. Ora acontece que há números reais que verificam a condição e que não são números naturais.

Seja X um conjunto qualquer; consideremos o seguinte conjunto, definido compreensivamente

$$\{x \in X;\ x \neq x\}.$$

Trata-se de um conjunto sem elementos, porque não existe qualquer elemento x de X tal que $x \neq x$. Dizemos tratar-se do conjunto vazio, que será designado por $\emptyset$; tem-se então

$$\emptyset = \{x \in X;\ x \neq x\}.$$

Não é de estranhar a existência de um tal conjunto sem elementos. Uma imagem que ajuda a esclarecer o conceito é, por exemplo, o conjunto de fósforos que estão dentro de uma determinada caixa de fósforos. Esse conjunto pode ter 20 elementos (se a caixa tiver 20 fósforos), 17 elementos (se a caixa tiver 17 fósforos),... E se a caixa não tiver fósforos? Então o conjunto de fósforos da caixa é o conjunto vazio.

Note-se que o conjunto vazio pode ser definido por qualquer condição impossível num qualquer conjunto X. Por exemplo tem-se

$$\emptyset = \{x \in \mathbb{N};\ x^2 = 2\}$$

porque não existe qualquer número natural cujo quadrado seja igual a 2. Mas

$$\{x \in \mathbb{R};\ x^2 = 2\}$$

já não é o conjunto vazio, porque existem números reais de quadrado igual a 2. Tem-se, como é sabido,

$$\{x \in \mathbb{R};\ x^2 = 2\} = \{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}.$$

4 Inclusão

Neste início do nosso estudo da teoria intuitiva dos conjuntos temos três conceitos primitivos: o de *objecto*, o de *conjunto* e o de *pertença*. Também já introduzimos o *conjunto vazio* que designamos por $\emptyset$. Vamos agora começar a estudar operações que se podem executar com conjuntos.

Consideremos o conjunto A de todos os alunos do Instituto Superior de Economia e Gestão (ISEG) e consideremos o conjunto B de todos os alunos da Universidade Técnica de Lisboa (UTL). Como o ISEG é uma escola da UTL, todo o aluno do ISEG é também aluno da UTL. Dito por outras palavras, todo o elemento do conjunto A é também elemento do conjunto B. Nestas condições dizemos que o conjunto A está contido no conjunto B e escrevemos

$$A \subset B.$$

Este exemplo leva-nos a introduzir a seguinte definição:

Definição 1. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer; dizemos que A está* contido *(ou* incluído*) em B, e escrevemos $A \subset B$, sse todo o elemento de A for elemento de B.*

Repare-se que a relação de *inclusão* entre conjuntos traduz, na linguagem da teoria dos conjuntos, a operação lógica de *implicação* de proposições. De facto, dizer que A está contido em B, não é mais do que dizer que a proposição "x pertence a A" implica a proposição "x pertence a B"; tem-se então

$$A \subset B \qquad \text{sse} \qquad \forall x \in U \quad x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Frequentes vezes, em vez de dizermos que A está contido em B, dizemos que B *contém* (ou inclui) A e escrevemos

$$B \supset A.$$

Dizemos também que A é um *subconjunto* de B ou que B é um *sobreconjunto* de A.

A negação de "A está contido em B" é "A não está contido em B", que se escreve

$$A \not\subset B \text{ ou ainda } B \not\supset A.$$

Para sabermos o que significa dizer que A não está contido em B devemos negar a proposição "A está contido em B". Como sabemos, dizer que A está contido em B é dizer que todo o objecto x que é elemento de A é também elemento de B. Negar esta proposição é dizer que existe pelo menos um objecto x que é elemento de A e não é elemento de B:

$$A \not\subset B \qquad \text{sse} \qquad \exists x \in U \quad x \in A \ \wedge \ x \notin B.$$

Retomemos o exemplo inicial, onde A é o conjunto dos alunos do ISEG e B é o conjunto dos alunos da UTL. Designando por C o conjunto de alunos da Faculdade de Motricidade Humana (FMH), tem-se também

$$C \subset B$$

porque a FMH é um escola da UTL e portanto todo o aluno da FMH é também aluno da UTL. Analogamente, sendo D o conjunto dos alunos do Instituto Superior de Agronomia (ISA) e E o conjunto de alunos do Instituto Superior Técnico (IST) tem-se também

$$D \subset B \qquad \text{e} \qquad E \subset B.$$

No entanto
$$A \not\subset C$$
porque há pelo menos um aluno do ISEG que não é aluno da FMH. Note-se que também há alunos comuns ao ISEG e à FMH (nomeadamente os do curso de Gestão do Desporto, organizado conjuntamente pelas duas faculdades), mas isso não tem qualquer importância para o facto de A não estar contido em C.

Seja X um conjunto qualquer e consideremos a proposição

$$X \subset X$$

Será esta proposição verdadeira ou falsa? Para o sabermos devemos basear-nos na definição de inclusão. Quando é que se diz que um conjunto A está incluído num conjunto B? Quando todo o elemento de A é também elemento de B. Apliquemos esta definição ao caso que nos interessa, ou seja, aquele em que $A = X$ e $B = X$. Será verdade que todo o elemento de X é também elemento de X? Claro que sim (pela definição de igualdade de conjuntos); logo a proposição $X \subset X$ é verdadeira. Acabámos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 1. *Qualquer que seja o conjunto A tem-se $A \subset A$.*

Definição 2. *Diremos que o conjunto A está* contido estritamente *no conjunto B sse $A \subset B$ e $A \neq B$. Nesse caso diremos ainda que A é um* subconjunto próprio *de B.*

Por exemplo, sendo $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ é ímpar e } x \leq 5\}$ é imediato ver que A é um subconjunto próprio de $\mathbb{N}$; no entanto, embora se tenha $A \subset B$, A não é um subconjunto próprio de B, visto ter-se $A = B$.

Consideremos agora a proposição $\emptyset \subset X$. Será verdade que o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto X? Voltemos a aplicar a definição de A estar incluído em B, agora com $A = \emptyset$ e $B = X$. Será que todo o elemento do conjunto vazio é também elemento do conjunto X? A questão parece mais delicada porque o conjunto vazio, como sabemos, não tem elementos. Mas repare-se que nós queremos saber o valor lógico da proposição
$$\forall x \in U \quad x \in \emptyset \Rightarrow x \in X.$$

Se esta proposição for verdadeira, então $\emptyset \subset X$; se a proposição for falsa, então $\emptyset \not\subset X$. Mas esta proposição é construída a partir das proposições "$x \in \emptyset$" e "$x \in X$", conectadas com a operação de implicação. Para sabermos se a proposição é verdadeira ou falsa basta conhecermos os valores lógicos do antecedente e do consequente que constituem a implicação. Ora o antecedente $x \in \emptyset$ é falso porque não existe qualquer objecto x que seja elemento do conjunto vazio $\emptyset$. Então, independentemente do valor lógico do consequente, a implicação é verdadeira. Demonstrámos assim que:

Teorema 2. *O conjunto vazio está incluído em qualquer conjunto A.*

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Já sabemos o que significa dizer que A está contido em B: todo o elemento de A é elemento de B. Também sabemos o que significa dizer que B está contido em A: todo o elemento de B é elemento de A. Poderá ter-se simultaneamente $A \subset B$ e $B \subset A$? Em caso afirmativo, o que quererá isso dizer? A resposta é dada no seguinte teorema:

Teorema 3. *Quaisquer que sejam os conjuntos A e B tem-se*

$$(A \subset B \ \wedge \ B \subset A) \Leftrightarrow (A = B).$$

Demonstração. Consideremos a proposição "$A \subset B \wedge B \subset A$". Isto significa que todo o elemento de A é elemento de B (porque A é um subconjunto de B) e que todo o elemento de B é elemento de A (porque B é subconjunto de A). Em conclusão os elementos de A são precisamente os elementos de B; os dois conjuntos são iguais. □

A propriedade expressa neste teorema é muito utilizada quando queremos mostrar que dois conjuntos A e B são iguais. Isso é equivalente a mostrar que $A \subset B$ e $B \subset A$. Em termos lógicos estamos simplesmente a dizer que a conjunção das proposições "$x \in A \Rightarrow x \in B$" (correspondente a $A \subset B$) e "$x \in B \Rightarrow x \in A$" (correspondente a $B \subset A$) é a proposição "$x \in A \Leftrightarrow x \in B$"; ora sabemos[1] que, sendo p e q duas proposições quaisquer, então $(p \Rightarrow q) \ \wedge \ (q \Rightarrow p)$ é equivalente a $p \Leftrightarrow q$.

Por vezes é cómodo representar de forma pictórica os conjuntos. Assim é usual representar um conjunto qualquer A pelo interior de uma curva fechada, tal como na figura 1. Dizemos tratar-se de um diagrama de Venn. Claro que um diagrama de Venn não é mais do que uma imagem que nos pode sensibilizar para a compreensão das propriedades dos conjuntos, nunca podendo servir para demonstrar essas mesmas propriedades.

[1]ver capítulo Lógica.

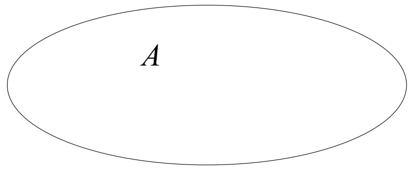

Figura 1: Diagrama de Venn.

Por vezes, sendo A um conjunto finito, podemos representar os seus elementos sob a forma de pontos dentro de uma curva fechada. Por exemplo o conjunto $A = \{1, 7, 9\}$ pode representar-se como na figura 2.

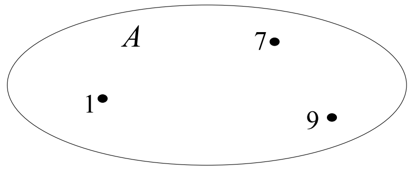

Figura 2: Diagrama de Venn.

Com recurso aos diagramas de Venn a inclusão tem uma imagem sugestiva, que apresentamos nas figuras seguintes. Na figura 3 representamos duas situações distintas: numa o conjunto A está contido no conjunto B, enquanto na outra o conjunto C não está contido no conjunto D.

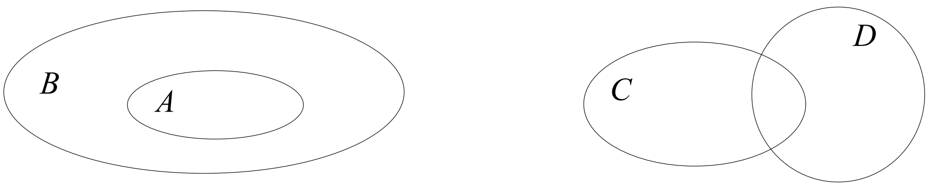

Figura 3: A contido em B; C não contido em D.

5 Reunião

Consideremos os dois conjuntos seguintes:

$$A = \{a, b, c, 1, 2, 3, 4\} \qquad \text{e} \qquad B = \{a, d, 2, 5, 7, 9\}.$$

Podemos pensar num novo conjunto C, constituído por aqueles objectos que estão em A ou estão em B. No exemplo em questão esse novo conjunto será

$$C = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}.$$

Repare-se que este novo conjunto C foi formado a partir dos conjuntos A e B; dizemos que se trata da reunião do conjunto A com o conjunto B. É usual representar a reunião (ou união) de A e de B (ou de A com B) por $A \cup B$. Com esta notação tem-se:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}.$$

Este exemplo sugere-nos a definição de reunião de conjuntos no caso geral.

Definição 3. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chamamos* reunião *de A e de B a um novo conjunto, designado por $A \cup B$, assim definido:*

$$A \cup B = \{x \in U;\ x \in A \ \vee\ x \in B\}.$$

A reunião de A e de B é então o conjunto constituído por aqueles objectos do universo U que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A ou B (podendo evidentemente pertencer aos dois). Repare-se que a operação de reunião de dois conjuntos se baseia na operação lógica da disjunção de duas proposições: dizer que "x pertence a $A \cup B$" é dizer que "x pertence a A" *ou* "x pertence a B". Por outras palavras "x pertence a $A \cup B$" tem o valor lógico verdade sempre que uma das proposições "x pertence a A", "x pertence a B", for verdadeira. Daqui resulta imediatamente o seguinte teorema

Teorema 4. *Quaisquer que sejam os subconjuntos A e B tem-se*

$$A \subset (A \cup B) \quad e \quad B \subset (A \cup B).$$

Os diagramas de Venn ajudam a visualizar a reunião de conjuntos. Na figura 4 representamos dois conjuntos A e B bem como, a sombreado, a sua reunião.

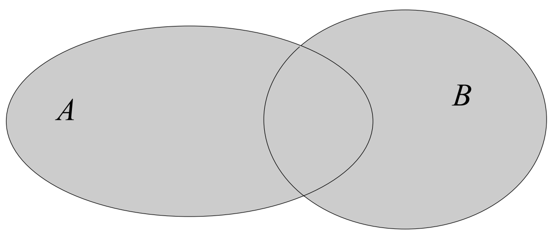

Figura 4: Reunião de A com B.

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Será que os conjuntos $A \cup B$ e $B \cup A$ são idênticos ou são distintos? Por outras palavras, será que a reunião de conjuntos goza da propriedade comutativa? A resposta está no teorema seguinte

Teorema 5. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer; então tem-se*

$$A \cup B = B \cup A.$$

Demonstração. Recorrendo à definição de reunião de dois conjuntos vemos que:

$$\begin{aligned} A \cup B =& \{x \in U;\ x \in A \text{ ou } x \in B\} \\ B \cup A =& \{x \in U;\ x \in B \text{ ou } x \in A\} \end{aligned}$$

$A \cup B$ é o conjunto dos objectos de U que, ou pertencem em A, ou pertencem a B. $B \cup A$ é o conjunto dos objectos de U que, ou pertencem em B, ou pertencem a A. Como a disjunção de proposições goza da propriedade comutativa (as proposições $p \vee q$ e $q \vee p$ têm o mesmo valor lógico), vemos que $A \cup B = B \cup A$. □

Consideremos agora três subconjuntos A, B e C. Podemos construir o conjunto

$$(A \cup B) \cup C$$

que é constituído pelos objectos de U que pertencem a $A \cup B$ ou a C. Também podemos construir o conjunto

$$A \cup (B \cup C)$$

constituído pelos objectos de U que pertencem a A ou a $B \cup C$. Que relação existirá entre estes dois conjuntos? A resposta é dada no teorema seguinte

Teorema 6. *Sejam A B e C três conjuntos quaisquer; então tem-se*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

Demonstração. O conjunto $(A \cup B) \cup C$ é constituído pelos objectos x de U tais que

$$x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C,$$

o que se pode ainda escrever, por definição de $A \cup B$,

$$(x \in A \ \vee \ x \in B) \ \vee \ x \in C.$$

Analogamente o conjunto $A \cup (B \cup C)$ é constituído pelos objectos x de U tais que

$$x \in A \text{ ou } x \in (B \cup C)$$

ou ainda, por definição de $B \cup C$,

$$x \in A \ \vee \ (x \in B \ \vee \ x \in C).$$

Tendo em conta que a proposição $(p \vee q) \vee r$ tem o mesmo valor lógico da proposição $p \vee (q \vee r)$, vemos que, tal como queríamos mostrar, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. □

Devido ao teorema anterior dizemos que a reunião de conjuntos goza da propriedade associativa. É esta propriedade que nos permite dar um sentido a uma expressão do tipo

$$A \cup B \cup C.$$

Esta expressão pode ser lida de duas maneiras distintas: como $(A \cup B) \cup C$ ou como $A \cup (B \cup C)$; não há problema porque os conjuntos $(A \cup B) \cup C$ e $A \cup (B \cup C)$ são o mesmo. Portanto $A \cup B \cup C$ é o conjunto de todos os objectos de U que pertencem pelo menos a um dos conjuntos A, B, C.

Identifiquemos agora o conjunto $A \cup \emptyset$. Trata-se do conjunto dos objectos de U que, ou pertencem a A, ou pertencem a $\emptyset$. Como não há qualquer objecto que pertença ao conjunto vazio, dizer que x pertence a $A \cup \emptyset$ é equivalente a dizer que x pertence a A. Por outro lado, tendo em conta a comutatividade da reunião de conjuntos, já sabemos que $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A$. Acabámos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 7. *Qualquer que seja o conjunto A tem-se*

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

Devido ao teorema anterior é usual dizer que o conjunto vazio é o *elemento neutro* da operação de reunião de dois conjuntos.

Deixamos a cargo do leitor a demonstração do resultado seguinte:

Teorema 8. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer; então tem-se $A \cup B = B$ sse $A \subset B$*

6 Intersecção

Seja A o conjunto de sócios dos Bombeiros Voluntários de Campo de Ourique e seja B o conjunto de sócios do Benfica. É natural que haja pessoas que são simultaneamente sócios dos Bombeiros Voluntários de Campo de Ourique e do Benfica. Somos, por isso, levados a introduzir um novo conjunto, cujos elementos são aqueles objectos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B. Esse novo conjunto, a que se chama a intersecção de A e de B, é designado por $A \cap B$. No nosso exemplo é constituído por todos aquelas pessoas que são simultaneamente sócios dos Bombeiros Voluntários de Campo de Ourique e do Benfica.

As considerações anteriores levam-nos a pensar definir, no caso geral, a intersecção de dois conjuntos.

Definição 4. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chamaremos intersecção de A e de B (ou de A com B) a um novo conjunto, designado por $A \cap B$, assim definido:*

$$A \cap B = \{x \in U;\ x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Repare-se que a intersecção de conjuntos não é mais do que a tradução, em termos da teoria dos conjuntos, da operação de conjunção de proposições. Os elementos x de $A \cap B$ são aqueles que verificam

$$x \in A \ \wedge \ x \in B$$

Os diagramas de Venn ajudam a visualizar a intersecção de conjuntos. Na figura 5 representamos dois conjuntos A e B bem como, a sombreado, a sua intersecção.

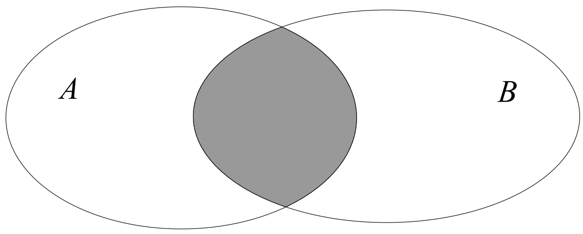

Figura 5: Intersecção de A com B.

Da definição de intersecção resulta imediatamente que, se x pertence à intersecção de A e de B, então x tem de pertencer a A e tem também de pertencer a B, ou seja:

$$\forall x \in U \quad x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A,$$
$$\forall x \in U \quad x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in B.$$

A tradução em termos de conjuntos das proposições anterior pode exprimir-se no seguinte teorema:

Teorema 9. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Então tem-se*

$$(A \cap B) \subset A \quad e \quad (A \cap B) \subset B.$$

É agora natural começar a estudar propriedades da operação de intersecção. Comecemos por ver que se trata de uma operação comutativa, tal como o teorema seguinte indica:

Teorema 10. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Então tem-se*

$$A \cap B = B \cap A.$$

Demonstração. Recorrendo à definição de intersecção de dois conjuntos, vem

$$A \cap B = \{x \in U;\ x \in A \text{ e } x \in B\},$$
$$B \cap A = \{x \in U;\ x \in B \text{ e } x \in A\}.$$

$A \cap B$ é o conjunto dos objectos de U que pertencem a A e pertencem a B. $B \cap A$ é o conjunto dos objectos de U que pertencem a B e pertencem a A. Como a conjunção de proposições goza da propriedade comutativa (as proposições $p \wedge q$ e $q \wedge p$ têm o mesmo valor lógico), vemos que $A \cap B = B \cap A$, tal como queríamos provar. □

Consideremos agora três conjuntos A, B e C. Podemos construir o conjunto

$$(A \cap B) \cap C$$

que é constituído pelos objectos de U que pertencem a $A \cap B$ e a C. Também podemos construir o conjunto

$$A \cap (B \cap C)$$

constituído pelos objectos de U que pertencem a A e a $B \cap C$. Tem-se o seguinte resultado

Teorema 11. *Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então tem-se*

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Demonstração. O conjunto $(A \cap B) \cap C$ é constituído pelos objectos x de U tais que

$$x \in (A \cap B) \quad \text{e} \quad x \in C$$

o que se pode ainda escrever, por definição de $A \cap B$,

$$(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \wedge \ x \in C.$$

Tendo em conta que a proposição $(p \wedge q) \wedge r$ tem o mesmo valor lógico da proposição $p \wedge (q \wedge r)$, vemos que $(A \cap B) \cap C$ é constituído pelos objectos x de U tais que

$$x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \wedge \ x \in C)$$

ou ainda, por definição de $B \cap C$,

$$x \in A \quad \text{e} \quad x \in (B \cap C).$$

Mas estes objectos são precisamente aqueles que constituem o conjunto $A \cap (B \cap C)$, pelo que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. $\square$

O teorema anterior mostra-nos que a reunião de conjuntos goza da propriedade associativa. É esta propriedade que nos permite dar um sentido a uma expressão do tipo

$$A \cap B \cap C.$$

Esta expressão pode ser lida de duas maneiras distintas: como $(A \cap B) \cap C$ ou como $A \cap (B \cap C)$; não há problema porque os conjuntos $(A \cap B) \cap C$ e $A \cap (B \cap C)$ são o mesmo. Portanto $A \cap B \cap C$ é o conjunto de todos os objectos de U que pertencem simultaneamente a cada um dos três conjuntos A, B, C.

Identifiquemos agora o conjunto $A \cap \emptyset$. Trata-se do conjunto dos objectos de U que pertencem simultaneamente a A e a $\emptyset$. Como não há qualquer objecto que pertença ao conjunto vazio, a condição "x pertence a $A \cap \emptyset$" é impossível, pelo que $A \cap \emptyset$ é o conjunto vazio. Como a intersecção de conjuntos é comutativa, podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 12. *Seja A um conjunto qualquer. Então tem-se:*

$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset.$$

Também é fácil provar que a intersecção de A e de B é igual a A sse o conjunto A estiver contido no conjunto B:

Teorema 13. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Então tem-se:*

$$A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = A.$$

Demonstração. Para provarmos esta proposição temos de provar a implicação nos dois sentidos. Comecemos por provar que

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad A \cap B = A.$$

Se x pertencer a A, então x também pertence a B (porque A está contido em B) e, pertencendo a A e a B, pertence a $A \cap B$ (por definição de intersecção). Se x não pertencer a A, então (por definição de intersecção) não pode pertencer a $A \cap B$.

Mostremos agora que

$$A \cap B = A \quad \Rightarrow \quad A \subset B.$$

Fazemos a demonstração por absurdo. Suponhamos que $A \not\subset B$. Então existe um elemento x de A que não é elemento de B. Não sendo elemento de B, esse elemento x não pode pertencer a $A \cap B$ (porque já vimos que $A \cap B$ está contido em B). Então x pertence a A e não pertence a $A \cap B$, o que mostra que estes dois conjuntos não são iguais. Mas isto é absurdo porque, por hipótese, $A \cap B = A$. □

Na figura 6 representamos uma intersecção de dois conjuntos A e B, em que A está contido em B.

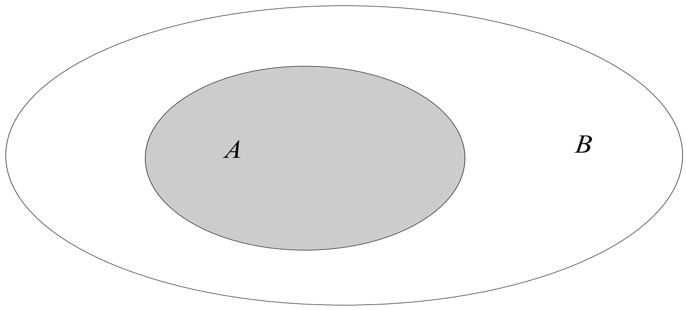

Figura 6: Intersecção de A com B, com A contido em B.

Neste momento já definimos duas operações sobre conjuntos: a reunião e a intersecção. A reunião tem um certo número de propriedades já estudadas na secção anterior; a intersecção goza de propriedades que acabámos de estudar. Torna-se agora natural estudar propriedades que façam intervir as duas operações (reunião e intersecção). Chamamos a atenção para o facto desta ser a evolução natural no estudo de uma teoria matemática. À medida que vão sendo introduzidas definições, vão sendo estudadas as propriedades de que gozam os novos conceitos, bem como as relações com conceitos já introduzidos na teoria.

Neste sentido começamos por provar a chamada distributividade da intersecção em relação à reunião, expressa no seguinte teorema:

Teorema 14. *Sejam A B e C três conjuntos quaisquer. Então tem-se:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Demonstração. Provar que dois conjuntos são iguais é, como sabemos, provar que cada um deles está contido no outro; devemos assim provar as inclusões seguintes:

$$(A \cap (B \cup C)) \subset ((A \cap B) \cup (A \cap C))\,,$$
$$((A \cap B) \cup (A \cap C)) \subset (A \cap (B \cup C))\,.$$

Comecemos com $(A \cap (B \cup C)) \subset ((A \cap B) \cup (A \cap C))$. Seja x um elemento de $A \cap (B \cup C)$; então

$$x \in A \ \wedge \ x \in (B \cup C)$$

ou ainda

$$x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C).$$

Utilizando a distributividade da conjunção em relação à disjunção (ou seja o facto das proposições $p \wedge (q \vee r)$ e $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ terem o mesmo valor lógico) vem

$$(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ x \in C).$$

Em termos da linguagem da teoria dos conjuntos esta proposição escreve-se

$$x \in (A \cap B) \ \vee \ x \in (A \cap C)$$

ou ainda

$$x \in ((A \cap B) \cup (A \cap C))\,.$$

Demonstremos agora que $((A \cap B) \cup (A \cap C)) \subset (A \cap (B \cup C))$. Seja x um elemento de $(A \cap B) \cup (A \cap C)$; então

$$x \in (A \cap B) \ \vee \ x \in (A \cap C)$$

ou ainda

$$(x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ x \in C).$$

Voltando a utilizar a distributividade da conjunção de proposições em relação à disjunção, vem

$$x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C).$$

Na linguagem da teoria dos conjuntos esta condição escreve-se $x \in (A \cap (B \cup C))$. □

Uma outra propriedade que envolve a intersecção e a reunião é a chamada distributividade da reunião em relação à intersecção:

Teorema 15. *Sejam A B e C três conjuntos quaisquer. Então tem-se:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Demonstração. Comecemos por provar que $(A \cup (B \cap C)) \subset ((A \cup B) \cap (A \cup C))$. Seja x um elemento de $A \cup (B \cap C)$. Então

$$x \in A \ \vee \ x \in (B \cap C)$$

e portanto

$$x \in A \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C).$$

Recordando que as proposições $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ têm o mesmo valor lógico, vem

$$(x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ (x \in A \ \vee \ x \in C).$$

Passando para a linguagem da teoria dos conjuntos temos

$$x \in ((A \cup B) \cap (A \cup C))\,.$$

A implicação em sentido inverso prova-se de forma análoga. Queremos mostrar que $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ está contido em $A \cup (B \cap C)$. Seja x um elemento de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$:

$$\begin{gathered}(x \in (A \cup B)) \ \wedge \ (x \in (A \cup C)) \\ (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ (x \in A \ \vee \ x \in C) \\ x \in A \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C)\end{gathered}$$

Na linguagem da teoria dos conjuntos obtemos $x \in (A \cup (B \cap C))$. □

7 Diferença

Seja A o conjunto dos sócios do Sporting e seja B o conjunto dos sócios dos Bombeiros Voluntários de Campo de Ourique. É natural pensar que há sócios do Sporting que não são sócios dos Bombeiros Voluntários de Campo de Ourique. Isso leva-nos a pensar no conjunto constituído pelos elementos de A que não são elementos de B. Designaremos esse conjunto por $A \setminus B$ e diremos tratar-se da diferença entre A e B, ou do complementar de B em A. No exemplo apresentado trata-se do conjunto dos sócios do Sporting que não são sócios dos Bombeiros Voluntários de Campo de Ourique.

Esta ideia leva-nos, tal como o leitor já deve adivinhar, a introduzir a seguinte nova definição:

Definição 5. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chamaremos complementar de B em A ao conjunto $A \setminus B$ assim definido:*

$$A \setminus B = \{x \in U;\ x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Diremos também que $A \setminus B$ é a diferença entre A e B. Na figura 7 apresentamos, num diagrama de Venn, dois conjuntos A e B e, a sombreado, a diferença $A \setminus B$.

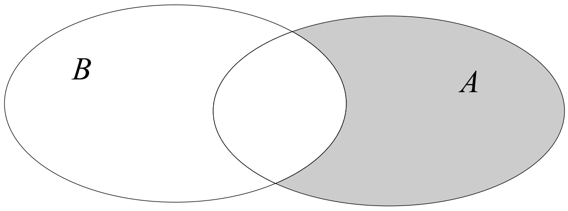

Figura 7: Complementar de B em A.

Definição 6. *Seja B um conjunto qualquer (como sempre subconjunto do universo U); chamaremos complementar de B ao conjunto $U \setminus B$.*

O conjunto $U \setminus B$ também é muitas vezes designado por B^c; trata-se evidentemente do conjunto definido por

$$U \setminus B = \{x \in U;\ x \notin B\}.$$

Na figura 8 representamos, a sombreado, o complementar de um conjunto B. Repare-se que a operação de passagem ao complementar traduz, na linguagem da teoria dos conjuntos, a operação lógica de negação.

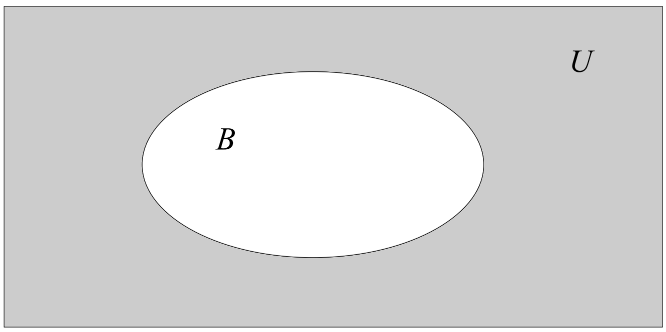

Figura 8: Complementar do conjunto B.

Há propriedades que relacionam a operação de diferença de conjuntos com as operações de reunião e de intersecção. Começamos por demonstrar que:

Teorema 16. *Sejam A, B e X três conjuntos quaisquer. Então tem-se:*

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$

Demonstração. Um objecto x pertence ao conjunto $X \setminus (A \cup B)$ sse

$$x \in X \ \wedge \ x \notin (A \cup B).$$

Mas isto é equivalente a dizer que

$$x \in X \wedge \ \sim (x \in A \ \vee \ x \in B)$$

ou ainda

$$x \in X \ \wedge \ (x \notin A \ \wedge \ x \notin B).$$

Esta proposição é equivalente a

$$(x \in X \ \wedge \ x \notin A) \ \wedge \ (x \in X \ \wedge \ x \notin B)$$

que, em termos da teoria dos conjuntos, se escreve

$$(x \in X \setminus A) \ \wedge \ (x \in X \setminus B)$$

ou ainda

$$x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$

□

Se, no teorema anterior, fizermos $X = U$, onde U é o universo, obtemos

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Esta fórmula diz-nos que o complementar de uma reunião de dois conjuntos é a intersecção dos complementares desses conjuntos.

Teorema 17. *Sejam A, B e X três conjuntos quaisquer. Então tem-se:*

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Demonstração. Um objecto x pertence ao conjunto $X \setminus (A \cap B)$ sse

$$x \in X \ \wedge \ x \notin (A \cap B).$$

Mas isto é equivalente a dizer que

$$x \in X \wedge \ \sim (x \in A \wedge x \in B)$$

ou ainda

$$x \in X \ \wedge \ (x \notin A \ \vee \ x \notin B).$$

Esta proposição é equivalente a

$$(x \in X \;\wedge\; x \notin A) \;\vee\; (x \in X \;\wedge\; x \notin B)$$

que, em termos da teoria dos conjuntos, se escreve

$$(x \in X \setminus A) \;\vee\; (x \in X \setminus B)$$

ou ainda

$$x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

$\square$

Ao fazermos, no teorema anterior, $X = U$, obtemos

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

Esta fórmula diz-nos que o complementar de uma intersecção de dois conjuntos é a reunião dos complementares desses conjuntos.

As fórmulas $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ e $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ traduzem, na linguagem da teoria dos conjuntos, as primeiras leis de De Morgan da Lógica.

Por definição de diferença de conjuntos é imediato ver que, qualquer que seja o conjunto A, se tem $A \setminus A = \emptyset$ e $A \setminus \emptyset = A$; em particular, fazendo $A = U$, vemos que

$$U^C = \emptyset \text{ e } \emptyset^C = U.$$

8 Conjuntos finitos e infinitos

Na teoria intuitiva de conjuntos que temos estado a desenvolver começámos por introduzir três conceitos primitivos: o de *objecto*, o de *conjunto* e o de *pertença*. O símbolo designado para este último é, como sabemos, $\in$. Chamamos a atenção para o facto de, ao escrevermos o símbolo $\in$, à esquerda dele ter de estar um objecto e à direita dele ter de estar um conjunto. Para que a expressão

$$\alpha \in \theta$$

tenha sentido é necessário que α seja um objecto e que θ seja um conjunto. Também quando escrevemos um conjunto extensivamente é necessário que os entes que aparecem entre as chavetas sejam objectos. Por exemplo, ao escrevermos

$$\{\alpha, \theta, \delta\}$$

cada um dos entes α, θ, δ tem de ser um objecto.

Claro que um conjunto pode também ele próprio ser um objecto. Por exemplo o conjunto

$$A = \{1, \alpha, \{1, 2\}\}$$

é constituído por três objectos: o número "1", a letra grega "α" e o conjunto "$\{1, 2\}$". Um dos objectos do conjunto A é ele próprio um conjunto, nomeadamente o conjunto constituído pelos números naturais 1 e 2. A proposição

$$1 \in A$$

é verdadeira, porque o objecto 1 pertence ao conjunto A. Mas a proposição

$$2 \in A$$

é falsa, porque o objecto 2 não pertence ao conjunto A. Claro que a proposição

$$\{1, 2\} \in A$$

é verdadeira porque $\{1, 2\}$ é um objecto que pertence a A (o facto de $\{1, 2\}$ ser ele próprio um conjunto é irrelevante para a matéria em questão).

Nesta ordem de ideias, e sendo a um objecto qualquer, é essencial distinguir os dois entes a e $\{a\}$. Enquanto a é um objecto, $\{a\}$ é um conjunto que tem um único elemento, nomeadamente o objecto a.

Podemos complicar ainda mais a questão, considerando o conjunto

$$B = \{a, \{a\}\}.$$

Trata-se de um conjunto com dois objectos, nomeadamente a e $\{a\}$. Quer dizer que o conjunto B tem dois objectos que são: 1) a; 2) o conjunto cujo único objecto é o elemento a. Assim são verdadeiras as seguintes proposições:

$$a \in B$$
$$\{a\} \in B$$

O conjunto $\{a\}$ é um objecto do conjunto B mas também é um subconjunto de B porque o único elemento de $\{a\}$, que é o objecto a, também é elemento de B. Podemos por isso afirmar que

$$\{a\} \subset B.$$

Repare-se que o símbolo de inclusão $\subset$ exige que, tanto à sua direita como à sua esquerda estejam conjuntos. A expressão

$$\alpha \subset \beta$$

só tem sentido se tanto α como β forem conjuntos. O mesmo se passa para os símbolos de reunião $\cup$, intersecção $\cap$ e diferença $\setminus$.

Consideremos o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o seguinte conjunto A:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

Há uma diferença fundamental entre estes dois conjuntos; enquanto A tem apenas quatro elementos, $\mathbb{N}$ tem infinitos elementos. Por outras palavras, há apenas quatro objectos que são elementos do conjunto A, enquanto há uma infinidade de objectos que são elementos do conjunto $\mathbb{N}$. Diremos por isso que o conjunto A é finito e que o conjunto $\mathbb{N}$ é infinito.

Diremos que um conjunto qualquer A é *finito* sse for vazio ou tiver um número finito de elementos; diremos que um conjunto é *infinito* sse não for finito, o que significa que tem um número infinito de elementos.

Frequentes vezes, para exprimir que A é finito, diremos que *A tem cardinal finito*. No caso de A ser infinito, diremos também que *A tem cardinal infinito*.

Exemplos de conjuntos finitos

- O conjunto das cidades de Portugal.
- O conjunto das letras do alfabeto português.
- O conjunto de "pixel" de um écran de cristais líquidos.
- O conjunto de cidadãos da República Portuguesa.
- O conjunto de soluções da equação $x^{100} - 24x^3 - 127 = 0$.
- O conjunto vazio.
- O conjunto dos números complexos z tais que $z^2 + 127 = 0$.
- O conjunto dos números reais x tais que $x^2 - 127 = 0$.
- O conjunto dos números reais x tais que $x^2 + 127 = 0$.
- O conjunto dos números naturais menores do que mil biliões de biliões.

Exemplos de conjuntos infinitos

- O conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.
- O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros.
- O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.
- O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.
- O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos.
- O conjunto dos números primos.
- O conjunto de números reais maiores ou iguais a zero e menores ou iguais a 1.
- O conjunto dos números reais x da forma $x = 1/n$, com n inteiro positivo.

No caso de um conjunto finito não vazio é fácil entender o que é o seu número de elementos. Por exemplo o conjunto

$$\{a, b, c, d\}$$

tem quatro elementos, enquanto o conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : \ 1 \leq n \leq 100\}$$

tem 100 elementos.

Por definição diremos que o número de elementos do conjunto vazio é 0. Ao número de elementos de um conjunto finito A chamaremos também *cardinal* desse conjunto; esse número será designado usualmente por $\#A$. Assim, por exemplo, tem-se

$$\begin{gathered}\#\{a, e, i, o, u\} = 5, \\ \#\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 700\} = 700, \\ \#\emptyset = 0.\end{gathered}$$

Claro que o cardinal do conjunto vazio é, por definição, zero. E o cardinal do conjunto $\{\emptyset\}$? Este conjunto tem um único elemento, nomeadamente o objecto $\emptyset$; logo o seu cardinal é igual a 1. Outros exemplos do mesmo tipo:

$$\#\{\{\emptyset\}\} = 1, \qquad \#\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2.$$

Repare-se que $\{\emptyset\}$ é um conjunto cujo único elemento é o conjunto vazio, pelo que são verdadeiras as proposições

$$\emptyset \in \{\emptyset\} \qquad \emptyset \subset \{\emptyset\}.$$

O conjunto $\{\{\emptyset\}\}$ é diferente: tem um único elemento que é o conjunto $\{\emptyset\}$ (ou seja o conjunto constituído pelo conjunto vazio). São verdadeiras as proposições

$$\begin{aligned} \{\emptyset\} &\in \{\{\emptyset\}\}, \qquad & \emptyset &\subset \{\{\emptyset\}\}, \\ \{\emptyset\} &\not\subset \{\{\emptyset\}\}, \qquad & \emptyset &\notin \{\{\emptyset\}\}. \end{aligned}$$

9 Produto cartesiano

Suponhamos que o Ricardo e a Inês (ambos cidadãos portugueses) são os dois únicos concorrentes do concurso televisivo XPTO. Então, designando por A o conjunto formado pelo Ricardo e pela Inês, podemos dizer que A é o conjunto dos concorrentes do referido concurso televisivo. Tem-se

$$A = \{\text{Ricardo, Inês}\}$$

ou ainda

$$A = \{\text{Inês, Ricardo}\}$$

porque, como sabemos, um conjunto fica determinado exclusivamente pelos objectos que lhe pertencem e não pela ordem em que os escrevemos. Designando por C o conjunto de todos os cidadãos portugueses podemos também escrever

$$A = \{x \in C;\ x \text{ é concorrente do concurso XPTO}\}.$$

Recordamos que, sob esta última forma, o conjunto A está definido compreensivamente, enquanto anteriormente estava definido extensivamente.

O conhecimento do conjunto A apenas nos diz quais foram os dois concorrentes do concurso XPTO, não nos esclarecendo qual deles ficou em primeiro lugar e qual ficou em segundo lugar. Para isso teríamos de, entre os dois elementos do conjunto A, escolher um que seria o primeiro e outro que seria o segundo. Podemos convencionar escrever

$$(\text{Inês}, \text{Ricardo})$$

para indicar que a Inês foi a vencedora e o Ricardo perdeu. Se quiséssemos indicar que o Ricardo tinha ganho e a Inês tinha perdido, escreveríamos

$$(\text{Ricardo}, \text{Inês}).$$

Repare-se na diferença entre os dois símbolos

$$\{\text{Inês}, \text{Ricardo}\} \qquad \text{e} \qquad (\text{Inês}, \text{Ricardo}).$$

O símbolo "{Inês, Ricardo}", que já é muito nosso conhecido, representa o conjunto constituído pela Inês e pelo Ricardo. O símbolo "(Inês, Ricardo)" representa um ente — a que chamamos *par ordenado* — que é o conjunto da Inês e do Ricardo munido de uma ordem; neste caso a Inês é o primeiro elemento do "par ordenado" e o Ricardo é o segundo elemento desse par ordenado.

Analogamente o símbolo "(Inês, Ricardo)" representa um par ordenado que é o conjunto da Inês e do Ricardo munido de uma ordem: o Ricardo é o primeiro elemento do par ordenado e a Inês o segundo.

No caso geral, sejam a e b dois objectos quaisquer. Com estes objectos podemos construir dois pares ordenados distintos (a, b) e (b, a). No par ordenado (a, b), a é o primeiro objecto e b o segundo. No par ordenado (b, a) passa-se o contrário, ou seja, b é o primeiro objecto e a o segundo. Evidentemente que se tem (exceptuando o caso $a = b$)

$$(a, b) \neq (b, a).$$

Para além da distinção que fazemos entre os pares ordenados (a, b) e (b, a), também os devemos distinguir do conjunto A constituído pelos objectos a e b:

$$A = \{a, b\} = \{b, a\} \neq (a, b) \qquad \text{e} \qquad A = \{a, b\} = \{b, a\} \neq (b, a).$$

Consideremos agora os dois conjuntos A e B assim definidos:

$$A = \{a, b, c\} \qquad \text{e} \qquad B = \{1, 2\}.$$

Podemos tentar formar pares ordenados escolhendo para primeiro elemento do par um objecto do conjunto A e para segundo elemento do par um objecto do conjunto B. Por exemplo

$$(c, 2) \qquad \text{e} \qquad (b, 1).$$

Podemos mesmo escrever todos os pares ordenados formados por este processo:

$$(a, 1) \qquad (a, 2) \qquad (b, 1) \qquad (b, 2) \qquad (c, 1) \qquad (c, 2).$$

Ao conjunto destes seis pares ordenados (que são todos os obtidos escolhendo para primeiro elemento do par um objecto de A e para segundo elemento do par um objecto de B) chamamos *produto cartesiano* de A por B. Designando por $A \times B$ o produto cartesiano de A por B temos então

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Claro que também poderíamos ter pensado nos pares ordenados em que o primeiro elemento do par é um objecto de B e o segundo um objecto de A. Teríamos então o produto cartesiano de B por A

$$B \times A = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Estamos agora em condições de passar ao caso geral, dando a seguinte definição

Definição 7. *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Chamaremos* produto cartesiano *de A por B ao conjunto $A \times B$ constituído por todos os pares ordenados (a, b) tais que a pertence a A e b pertence a B:*

$$A \times B = \{x \in U;\ x = (a, b),\ \textit{com } a \in A \textit{ e } b \in B\}.$$

Se um dos conjuntos A ou B for vazio, então o produto cartesiano $A \times B$ é também vazio:

$$A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$$

Da própria definição de produto cartesiano de dois conjuntos resulta que esse produto não verifica a propriedade comutativa. De facto $A \times B$ é um conjunto de pares ordenados em que o primeiro elemento do par é um objecto de A, enquanto $B \times A$ é um conjunto de pares ordenados em que o primeiro elemento do par é um objecto de B.

Claro que podemos pensar no produto cartesiano de um conjunto A por si próprio; nesse caso, em vez de escrevermos $A \times A$, poderemos também escrever (com o mesmo significado) A^2; dizemos ainda que A^2 é o quadrado cartesiano do conjunto A.

Por exemplo, sendo $A = \{a, 1, 5\}$, o quadrado cartesiano de A será o conjunto

$$A^2 = \{(a, a), (a, 1), (a, 5), (1, a), (1, 1), (1, 5), (5, a), (5, 1), (5, 5)\}.$$

Pensemos agora em dois conjuntos A e B finitos; é imediato que o produto cartesiano $A \times B$ também é finito. Será que conseguimos relacionar o cardinal de $A \times B$ com o cardinal m de A e o cardinal n de B? Pensemos na forma de construir o produto cartesiano: a cada elemento a de A associamos um elemento b de B para formar o par (a, b). Portanto, cada elemento a de A, vai originar tantos pares ordenados quantos os elementos de B. Por outras palavras, fixado um elemento a de A, existem tantos pares ordenados em que a é o primeiro elemento do par quantos os elementos de B. O número de pares ordenados em que o primeiro elemento do par é a é portanto n, que é o número de elementos de B. Cada elemento de A origina n pares ordenados; como A tem m elementos, o número total de pares ordenados é $m \times n$. Mostrámos assim que, no caso de A e B serem conjuntos finitos, se tem

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B.$$

Claro que, se um dos conjuntos A ou B for infinito e nenhum deles for vazio, então o produto cartesiano $A \times B$ também é infinito.

Tal como definimos a noção de par ordenado, podemos agora introduzir a noção de terno ordenado. Dados três objectos a, b e c, chamaremos terno ordenado

$$(a, b, c)$$

ao conjunto $\{a, b, c\}$ munido de uma ordenação, por forma a que o primeiro elemento seja a, o segundo seja b e o terceiro seja c. Claro que a ordenação poderia ter sido outra. Por exemplo (c, a, b) é um também um terno ordenado, mas agora o primeiro elemento é c, o segundo é a e o terceiro é b. Mais uma vez chamamos a atenção para o facto de se ter

$$(a, b, c) \neq (c, a, b)$$

Por outro lado, tal como os pares ordenados, há que distinguir um terno ordenado de um conjunto com três elementos.

Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Podemos pensar em todos os ternos ordenados que se obtém escolhendo para primeiro elemento do terno um objecto de A, para segundo elemento um objecto de B e para terceiro elemento um objecto de C. Designaremos o conjunto de todos esses ternos ordenados por $A \times B \times C$ e diremos tratar-se do produto cartesiano de A por B e por C.

Vejamos um exemplo. Seja $A = \{\text{Luís, Júlia }\}$, $B = \{5\}$ e $C = \{s, t, u\}$. Um terno ordenado pertencente a $A \times B \times C$ é, por exemplo, $(\text{Luís}, 5, u)$. É fácil determinar o produto cartesiano de A por B e por C:

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \{&(\text{Luís}, 5, s), (\text{Luís}, 5, t), (\text{Luís}, 5, u), \\ &(\text{Júlia}, 5, s), (\text{Júlia}, 5, t), (\text{Júlia}, 5, u)\}. \end{aligned}$$

Dados três conjuntos A, B e C, já sabemos o que se entende por $A \times B \times C$: é o conjunto de todos os ternos ordenados em que o primeiro elemento do terno pertence a A, o segundo a B e o terceiro a C.

Por outro lado também sabemos o que significa $(A \times B) \times C$: é um conjunto de pares ordenados em que o primeiro elemento do par é um objecto de $A \times B$ e o segundo um objecto do conjunto C. Aquele primeiro elemento do par, por ser um objecto de $A \times B$, é ele próprio um par ordenado, em que o primeiro elemento é um objecto de A e o segundo um objecto de B. Temos dois entes distintos:

$$(a, b, c) \text{ elemento de } A \times B \times C,$$
$$((a, b), c) \text{ elemento de } (A \times B) \times C.$$

Os entes (a, b, c) e $((a, b), c)$, embora distintos, têm parecenças óbvias. Isso leva-nos a adoptar um procedimento muito comum em Matemática: identificar dois entes que, embora distintos, podem ser interpretados como um único ente. Assim identificamos o objecto $((a, b), c)$ (elemento do conjunto $(A \times B) \times C$) com o terno ordenado (a, b, c) (elemento do conjunto $A \times B \times C$).

Ainda podemos pensar num outro conjunto intimamente relacionado com os anteriores; trata-se de $A \times (B \times C)$. Este conjunto é formado por elementos da forma
$$(a, (b, c))$$
que são pares ordenados onde o primeiro elemento do par é um objecto de A e o segundo elemento do par é um objecto de $B \times C$. É evidente que nos dá jeito identificar o objecto $(a, (b, c))$ com o terno ordenado (a, b, c), e, por consequência, também com $((a, b), c)$.

No fundo o que fizemos foi identificar os três conjuntos seguintes: $(A \times B) \times C$, $A \times (B \times C)$ e $A \times B \times C$. Com esta identificação podemos escrever (embora seja um abuso de linguagem)

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C = A \times (B \times C).$$

A igualdade $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ exprime a associatividade do produto cartesiano. Cuidado! Esta associatividade só é válida mediante as identificações entre os conjuntos $(A \times B) \times C$, $A \times (B \times C)$ e $A \times B \times C$ referidas anteriormente.