Escola de Inverno 2015

Teoria da Indução

José Félix Costa[1]

[1] Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico
fgc@math.tecnico.ulisboa.pt

Fevereiro de 2015

Primeiro Conceito de Cientista

Primeiro conceito de cientista

Definição

Um cientista *(ou* método científico*) é uma aplicação*

$$\mathcal{M} : HYP \times DATA \to ([0,1] \cap \mathbb{Q} \cup \{!\}) \times ACT \ ,$$

onde $DATA$ (prefixos de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ou, nos exemplos desta sessão, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$), HYP e ACT são conjuntos finitos não vazios (de hipóteses e de ações, respetivamente).

Demanda do Cisne Preto ([Kem59])

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ \cdots$$

A aventura de Kon-Tiki ([Kem59])

$$1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;1\;0\;\cdots \qquad ?$$

Leis de Newton ([Kem59])

Conceito: Masseleração

$$M = m + a$$

Conceito: Acelerassa

$$A = m - a$$

3^a Lei de Newton

$$F = \frac{1}{4}(M^2 - A^2)$$

Leis de Newton ([Kem59])

Conceito: Masseleração

$$M = m + a$$

Conceito: Acelerassa

$$A = m - a$$

3^a Lei de Newton

$$F = \frac{1}{4}(M^2 - A^2)$$

Leis de Newton ([Kem59])

Conceito: Masseleração

$$M = m + a$$

Conceito: Acelerassa

$$A = m - a$$

3^a Lei de Newton

$$F = \frac{1}{4}(M^2 - A^2)$$

Epistemologia Formal

Decisão em tempo determinado

Definição [Conjetura]

Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ *conjetura* $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ no momento n, dada a hipótese h e o texto T, se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = b$.

Definição [Verificação no momento]

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. O cientista $\mathcal{M}$ *$\mathcal{C}$-verifica no momento n* a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = 1$ se e só se $\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.
2. O cientista $\mathcal{M}$ *$\mathcal{C}$-refuta no momento n* a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = 0$ se e só se $\mathcal{C}(T, h)$ não é o caso.
3. ...

Decisão em tempo determinado

Definição [Conjetura]

Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ *conjetura* $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ no momento n, dada a hipótese h e o texto T, se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = b$.

Definição [Verificação no momento]

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. O cientista $\mathcal{M}$ *$\mathcal{C}$-verifica no momento* n a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = 1$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.
2. O cientista $\mathcal{M}$ *$\mathcal{C}$-refuta no momento* n a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = 0$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ não é o caso.
3. ...

Decisão em tempo determinado

Definição [Conjetura]

Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ *conjetura* $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ no momento n, dada a hipótese h e o texto T, se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = b$.

Definição [Verificação no momento]

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. O cientista $\mathcal{M}$ *$\mathcal{C}$-verifica no momento* n a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = 1$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.
2. O cientista $\mathcal{M}$ *$\mathcal{C}$-refuta no momento* n a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = 0$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ não é o caso.
3. ...

Decisão em tempo determinado

Definição [Conjetura]

Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ *conjetura* $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ no momento n, dada a hipótese h e o texto T, se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = b$.

Definição [Verificação no momento]

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. O cientista $\mathcal{M}$ *$\mathcal{C}$-verifica no momento* n a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = 1$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.
2. O cientista $\mathcal{M}$ *$\mathcal{C}$-refuta no momento* n a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = 0$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ não é o caso.
3. ...

Decisão em tempo determinado

Definição [Conjetura]

Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ *conjetura* $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ no momento n, dada a hipótese h e o texto T, se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = b$.

Definição [Verificação no momento]

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. O cientista $\mathcal{M}$ *$\mathcal{C}$-verifica no momento* n a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = 1$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.
2. O cientista $\mathcal{M}$ *$\mathcal{C}$-refuta no momento* n a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n+1]) = 0$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ não é o caso.
3. ...

Decisão em tempo determinado

Definição [Verificação em tempo certo]

$\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica h em tempo n dado $\mathcal{K}$ se, existe $m \leq n$ tal que $\mathcal{C}$-verifica h no momento m dado $\mathcal{K}$.

Definição [Verificação em tempo certo]

$\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica H em tempo n dado $\mathcal{K}$ se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}$-verifica h em tempo n dado $\mathcal{K}$.

Decisão em tempo determinado

Definição [Verificação em tempo certo]

$\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica h em tempo n dado $\mathcal{K}$ se, existe $m \leq n$ tal que $\mathcal{C}$-verifica h no momento m dado $\mathcal{K}$.

Definição [Verificação em tempo certo]

$\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica H em tempo n dado $\mathcal{K}$ se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}$-verifica h em tempo n dado $\mathcal{K}$.

Decisão em tempo determinado

Teorema:

1. As seguintes afirmações são equivalentes: (a) H é $\mathcal{C}$-decidível em tempo n dado $\mathcal{K}$, (b) H é $\mathcal{C}$-verificável em tempo n dado $\mathcal{K}$ e (c) H é $\mathcal{C}$-refutável em tempo n dado $\mathcal{K}$.
2. Se H é $\mathcal{C}$-decidível em tempo n dado $\mathcal{K}$, então H é $\mathcal{C}$-decidível em tempo $m \geq n$ dado $\mathcal{K}$.

Decisão em tempo determinado

Exemplo: Divisibilidade da matéria

O debate sobre a divisibilidade da matéria é muito antigo. Nos séculos XVII e XVIII reacendeu-se entre os adeptos da teoria corpuscular de Descartes que defendia a continuidade da matéria e os adeptos de Newton que defendiam a teoria atómica. Kant, por outro lado, advogava a ideia de que a resposta a esta questão está para além de toda a experiência possível.

Decisão em tempo determinado

Exemplo: Divisibilidade da matéria

Vejamos uma primeira formalização naïve destas hipóteses. Pretende-se decidir, verificar, ou refutar em tempo n as hipóteses $h_{n\text{-cindível}}$, dado $\mathcal{K} = 2^{\mathbb{N}}$. Como experiência crucial, em cada estágio, pode construir-se um acelerador de partículas capaz de duplicar a energia atingida com o acelerador do estágio precedente. Num determinado estágio, pode não conseguir-se qualquer cisão, pelo que o *output* do estágio é 0 e a partícula a cindir é colocada no fim da lista de espera de partículas a examinar; o laboratório passa ao estágio seguinte, procurando cindir a partícula que está no topo dessa lista usando o dobro da energia. Sempre que num estágio se obtém cisão, as partículas obtidas são colocadas no fim da lista de espera.

Resolução: Divisibilidade da matéria

Vejamos o possível comportamento do demónio ("natureza"). O demónio apresenta uma sequência de 0's até ao momento $n-1$. No instante $n-1$, o cientista terá de apresentar a conjetura relevante relativamente ao instante n...

Decisão em tempo determinado

Exemplo: Divisibilidade da matéria

Vejamos uma primeira formalização naïve destas hipóteses. Pretende-se decidir, verificar, ou refutar em tempo n as hipóteses $h_{n\text{-cindível}}$, dado $\mathcal{K} = 2^{\mathbb{N}}$. Como experiência crucial, em cada estágio, pode construir-se um acelerador de partículas capaz de duplicar a energia atingida com o acelerador do estágio precedente. Num determinado estágio, pode não conseguir-se qualquer cisão, pelo que o *output* do estágio é 0 e a partícula a cindir é colocada no fim da lista de espera de partículas a examinar; o laboratório passa ao estágio seguinte, procurando cindir a partícula que está no topo dessa lista usando o dobro da energia. Sempre que num estágio se obtém cisão, as partículas obtidas são colocadas no fim da lista de espera.

Resolução: Divisibilidade da matéria

Vejamos o possível comportamento do demónio ("natureza").
O demónio apresenta uma sequência de 0's até ao momento $n-1$.
No instante $n-1$, o cientista terá de apresentar a conjetura relevante relativamente ao instante n...

Hume

$\boxed{\text{HUME}}$:

As questões de facto, o segundo tipo de objectos da razão, ao contrário das relações de ideias, não são do tipo dedutivas (demonstrativamente certas), dado que dependem de uma base empírica, ou seja, as questões de facto não são objectos meramente mentais ou conceptuais, são objectos — no sentido filosófico — que não são imaginados, mas sim, que existem ou ocorrem de facto. Como escreve Hume, "o contrário de toda e qualquer questão de facto permanece sendo possível, porque não pode jamais implicar contradição (...). Que o sol não vai nascer amanhã não é uma proposição menos inteligível nem implica maior contradição do que a afirmação de que ele vai nascer". E nesta passagem torna-se claro o critério usado por Hume para determinar os objectos da razão: aqueles objectos cuja hipótese do seu contrário implica contradição (relações de ideias) e aqueles objectos cuja hipótese contrária não implica contradição (questões de facto). Destes dois tipos de objectos da razão, Hume vai debruçar-se sobre a investigação dos objectos do segundo tipo, as questões de facto. (In *Inquérito sobre a Compreensão Humana*.)

Decisão, verificação e refutação com segurança

Definição

Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ conjetura com segurança $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \cup \{!\}$ *dada a hipótese* h *e texto* T*, se existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que (a)* $\mathcal{M}(h, T[n+1]) =$ *"!", (b)* $\mathcal{M}(h, T[n+2]) = b$*, e (c) para todo o* $m < n$*,* $\mathcal{M}(h, T[m+1]) \neq$ *"!".*

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. *O cientista* $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$*-verifica com segurança a hipótese* h *no texto* T *se* $\mathcal{M}$ *conjetura com segurança* 1 *dados a hipótese* h *e o texto* T se e só se $\mathcal{C}(T, h)$ *é o caso.*
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação com segurança

Definição

Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ conjetura com segurança $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \cup \{!\}$ *dada a hipótese h e texto T, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que (a) $\mathcal{M}(h, T[n+1]) =$ "!", (b) $\mathcal{M}(h, T[n+2]) = b$, e (c) para todo o $m < n$, $\mathcal{M}(h, T[m+1]) \neq$ "!".*

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. *O cientista $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica com segurança a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}$ conjetura com segurança 1 dados a hipótese h e o texto T* **se e só se** *$\mathcal{C}(T,h)$ é o caso.*
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação com segurança

Definição

Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ conjetura com segurança $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \cup \{!\}$ *dada a hipótese* h *e texto* T*, se existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que (a)* $\mathcal{M}(h, T[n+1]) =$ *"!", (b)* $\mathcal{M}(h, T[n+2]) = b$*, e (c) para todo o* $m < n$*,* $\mathcal{M}(h, T[m+1]) \neq$ *"!".*

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. *O cientista* $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$*-verifica com segurança a hipótese* h *no texto* T *se* $\mathcal{M}$ *conjetura com segurança* 1 *dados a hipótese* h *e o texto* T **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ *é o caso.*
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação com segurança

Definição

Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ conjetura com segurança $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \cup \{!\}$ *dada a hipótese* h *e texto* T*, se existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que (a)* $\mathcal{M}(h, T[n+1]) =$ *"!", (b)* $\mathcal{M}(h, T[n+2]) = b$*, e (c) para todo o* $m < n$*,* $\mathcal{M}(h, T[m+1]) \neq$ *"!".*

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. *O cientista* $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$*-verifica com segurança a hipótese* h *no texto* T *se* $\mathcal{M}$ *conjetura com segurança* 1 *dados a hipótese* h *e o texto* T **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ *é o caso.*
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação com segurança

Definição

Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ conjetura com segurança $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \cup \{!\}$ *dada a hipótese* h *e texto* T*, se existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que (a)* $\mathcal{M}(h, T[n+1]) =$ *"!", (b)* $\mathcal{M}(h, T[n+2]) = b$*, e (c) para todo o* $m < n$*,* $\mathcal{M}(h, T[m+1]) \neq$ *"!".*

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. *O cientista* $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$*-verifica com segurança a hipótese* h *no texto* T *se* $\mathcal{M}$ *conjetura com segurança* 1 *dados a hipótese* h *e o texto* T **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ *é o caso.*
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação com segurança

Definição

Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ conjetura com segurança $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \cup \{!\}$ *dada a hipótese* h *e texto* T*, se existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que (a)* $\mathcal{M}(h, T[n+1]) =$ *"!", (b)* $\mathcal{M}(h, T[n+2]) = b$*, e (c) para todo o* $m < n$*,* $\mathcal{M}(h, T[m+1]) \neq$ *"!".*

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. *O cientista* $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$*-verifica com segurança a hipótese* h *no texto* T *se* $\mathcal{M}$ *conjetura com segurança* 1 *dados a hipótese* h *e o texto* T **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ *é o caso.*
2. *...*
3. *...*

Decisão, verificação e refutação com segurança

Teorema

1. H é $\mathcal{C}$-decidível com segurança dado $\mathcal{K}$ se e só se H é simultaneamente $\mathcal{C}$-verificável com segurança dado $\mathcal{K}$ e $\mathcal{C}$-refutável com segurança dado $\mathcal{K}$.
2. Para todo o n, se H é $\mathcal{C}$-decidível em tempo n dado $\mathcal{K}$, então H é $\mathcal{C}$-decidível com segurança dado $\mathcal{K}$.

Decisão, verificação e refutação com segurança

Exemplo: Divisibilidade da matéria

Pretende-se decidir, verificar, ou refutar com segurança as hipóteses $h_{\text{cindível}} =$ "a partícula é cindível" e $h_{\text{elementar}} = \neg h_{\text{cindível}}$, dado $\mathcal{K} = 2^{\mathbb{N}}$.

Resolução: Divisibilidade da matéria

Vejamos que a hipótese $h_{elementar} =$ "a partícula é elementar" não é verificável com segurança dado $2^{\mathbb{N}}$. Eis o possível comportamento do demónio relativo à atitude de qualquer cientista $\mathcal{M}$. O demónio "escreve 0's no livro da natureza" até ao momento em que o cientista conjetura "!"...

Analisemos agora a hipótese $h_{cindível}$. Vejamos que é verificável com segurança. O cientista $\mathcal{M}$ conjetura 0 até que a cisão seja bem sucedida. Então, conjetura "!" seguido de uma corrente de 1's. Do modo idêntico, a hipótese $h_{elementar}$ é refutável com segurança.

Decisão, verificação e refutação com segurança

Exemplo: Divisibilidade da matéria

Pretende-se decidir, verificar, ou refutar com segurança as hipóteses $h_{\text{cindível}} =$"a partícula é cindível" e $h_{\text{elementar}} = \neg h_{\text{cindível}}$, dado $\mathcal{K} = 2^{\mathbb{N}}$.

Resolução: Divisibilidade da matéria

Vejamos que a hipótese $h_{elementar} =$"a partícula é elementar" não é verificável com segurança dado $2^{\mathbb{N}}$. Eis o possível comportamento do demónio relativo à atitude de qualquer cientista $\mathcal{M}$. O demónio "escreve 0's no livro da natureza" até ao momento em que o cientista conjetura "!"...

Analisemos agora a hipótese $h_{cindível}$. Vejamos que é verificável com segurança. O cientista $\mathcal{M}$ conjetura 0 até que a cisão seja bem sucedida. Então, conjetura "!" seguido de uma corrente de 1's. Do modo idêntico, a hipótese $h_{elementar}$ é refutável com segurança.

Decisão, verificação e refutação com segurança

Exemplo: Divisibilidade da matéria

Pretende-se decidir, verificar, ou refutar com segurança hipótese de Kant $h_{inf} =$"a partícula é infinitamente cindível", dado $\mathcal{K} = 2^{\mathbb{N}}$.

Resolução:

A hipótese de Kant não é verificável ou refutável com segurança dado $\mathcal{K}$.

No caso da verificação, o demónio apresenta uma sequência de cisões $1111\ldots$ até que o cientista conjeture "!" seguido de 1, momento em que passa a apresentar a sequência infinita de 0s.

No caso da refutação, o demónio apresenta uma sequência de experiências mal sucedidas $0000\ldots$ até que o cientista conjeture "!" seguido de 0, momento em que passa a apresentar a sequência infinita de 1s.

Como o cientista é arbitrário, não há método para verificar ou refutar com segurança a divisibilidade infinita da matéria.

Decisão, verificação e refutação com segurança

Exemplo: Divisibilidade da matéria

Pretende-se decidir, verificar, ou refutar com segurança hipótese de Kant $h_{inf} =$"a partícula é infinitamente cindível", dado $\mathcal{K} = 2^{\mathbb{N}}$.

Resolução:

A hipótese de Kant não é verificável ou refutável com segurança dado $\mathcal{K}$.

No caso da verificação, o demónio apresenta uma sequência de cisões $1111\ldots$ até que o cientista conjeture "!" seguido de 1, momento em que passa a apresentar a sequência infinita de 0s.

No caso da refutação, o demónio apresenta uma sequência de experiências mal sucedidas $0000\ldots$ até que o cientista conjeture "!" seguido de 0, momento em que passa a apresentar a sequência infinita de 1s.

Como o cientista é arbitrário, não há método para verificar ou refutar com segurança a divisibilidade infinita da matéria.

Platão

$\boxed{\text{MÉNON}}$:

Ménon. E de que modo procurarás, Sócrates, aquilo que não sabes absolutamente o que é? Pois procurarás propondo-te procurar que tipo de coisa, entre as coisas que não conheces? Ou, ainda que, no melhor dos casos, a encontres, como saberás que isso que encontraste é aquilo que não conhecias? (Platão, in *Ménon*.)

Platão

MÉNON :

Sócrates. Mas a que propósito digo essas coisas? A propósito das opiniões que são verdadeiras. Pois também das opiniões que são uma bela coisa e produzem todos os bens. Só que não se dispõem a ficar muito tempo, mas fogem da alma do homem, de modo que não são de muito valor, até que alguém as encadeie por um cálculo de causa. E isso, amigo Ménon, é a reminiscência, como foi acordado por nós nas coisas ditas anteriormente. E quando são encadeadas, em primeiro lugar, tornam-se ciências, em segundo lugar, estáveis. E é por isso que a ciência é de mais valor do que a opinião correta, e é pelo encadeamento que a ciência difere da opinião correta. (Platão, in *Ménon*.)

Sextus Empiricus

SEXTUS EMPIRICUS :

Os dogmáticos pretendem que o universal se estabelece a partir dos particulares através de indução. Se é assim, tornam-no efetivo examinando todos os particulares ou apenas alguns. Mas, se examinam apenas alguns, a sua indução não será segura, pois é bem possível que alguns dos particulares omitidos na indução possam contradizer o universal. Se, por outro lado, o seu exame pretende incluir todos os particulares, tal tarefa será impossível porque os particulares são infinitos e ilimitados. Assim, conclui-se, penso eu, que a indução, vista nas duas perspetivas, está mal fundada.

Decisão, verificação e refutação no limite

Definição

Dados o cientista $\mathcal{M}$, a hipótese h e o texto T, diz-se que $\mathcal{M}(h, T[n])$ estabiliza na conjetura $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ se existir um estágio p tal que, para todo o estágio $n \geq p$, se tem $\mathcal{M}(h, T[n]) = b$.

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. *O cientista $\mathcal{M}$ C-verifica no limite a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n])$ estabiliza em 1* **se e só se** *$C(T, h)$ é o caso.*
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação no limite

Definição

Dados o cientista $\mathcal{M}$, a hipótese h e o texto T, diz-se que $\mathcal{M}(h, T[n])$ estabiliza na conjetura $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ se existir um estágio p tal que, para todo o estágio $n \geq p$, se tem $\mathcal{M}(h, T[n]) = b$.

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. *O cientista $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica no limite a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n])$ estabiliza em 1* **se e só se** *$\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.*
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação no limite

Definição

Dados o cientista $\mathcal{M}$, a hipótese h e o texto T, diz-se que $\mathcal{M}(h, T[n])$ estabiliza na conjetura $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ se existir um estágio p tal que, para todo o estágio $n \geq p$, se tem $\mathcal{M}(h, T[n]) = b$.

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. *O cientista $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica no limite a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n])$ estabiliza em 1* **se e só se** *$\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.*
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação no limite

Definição

Dados o cientista $\mathcal{M}$, a hipótese h e o texto T, diz-se que $\mathcal{M}(h, T[n])$ estabiliza na conjetura $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ se existir um estágio p tal que, para todo o estágio $n \geq p$, se tem $\mathcal{M}(h, T[n]) = b$.

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. *O cientista $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica no limite a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n])$ estabiliza em 1* **se e só se** *$\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.*
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação no limite

Definição

Dados o cientista $\mathcal{M}$, a hipótese h e o texto T, diz-se que $\mathcal{M}(h, T[n])$ estabiliza na conjetura $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ se existir um estágio p tal que, para todo o estágio $n \geq p$, se tem $\mathcal{M}(h, T[n]) = b$.

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. *O cientista $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica no limite a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n])$ estabiliza em 1* **se e só se** *$\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.*
2. *...*
3. *...*

Decisão, verificação e refutação no limite

Teorema [Kevin Kelly [Kel96]]

1. H é $\mathcal{C}$-decidível no limite dado $\mathcal{K}$ se e só se H é simultaneamente $\mathcal{C}$-verificável no limite dado $\mathcal{K}$ e $\mathcal{C}$-refutável no limite dado $\mathcal{K}$.
2. Se H é $\mathcal{C}$-decidível, $\mathcal{C}$-verificável, ou $\mathcal{C}$-refutável com segurança dado $\mathcal{K}$, então H é $\mathcal{C}$-decidível no limite dado $\mathcal{K}$.

Decisão, verificação e refutação no limite

Teorema [Kevin Kelly [Kel96]]

1. H é $\mathcal{C}$-decidível no limite dado $\mathcal{K}$ se e só se H é simultaneamente $\mathcal{C}$-verificável no limite dado $\mathcal{K}$ e $\mathcal{C}$-refutável no limite dado $\mathcal{K}$.
2. Se H é $\mathcal{C}$-decidível, $\mathcal{C}$-verificável, ou $\mathcal{C}$-refutável com segurança dado $\mathcal{K}$, então H é $\mathcal{C}$-decidível no limite dado $\mathcal{K}$.

Decisão, verificação e refutação no limite

Exemplo: Divisibilidade da matéria

Pretende-se decidir, verificar, ou refutar no limite as hipóteses $h_{inf} =$"a matéria é infinitamente divisível" e $h_{fin} =$"a matéria não é infinitamente divisível".

Resolução: Divisibilidade da matéria

O demónio começa por mostrar a sequência $111\ldots$ até que o cientista conjeture 1. Se o cientista conjetura 1, o demónio passa a mostrar 0's até que o cientista conjeture 0. O processo continua para sempre.

Suponhamos que o cientista estabiliza em 1. Nestas condições, o demónio imprime uma sequência infinita de 0. A hipótese h_{inf} é falsa e o cientista está errado.

Suponhamos que o cientista estabiliza em 0. O demónio imprime apenas 1's a partir do módulo de convergência. A hipótese é verdadeira e o cientista está, de novo, errado.

Decisão, verificação e refutação no limite

Exemplo: Divisibilidade da matéria

Pretende-se decidir, verificar, ou refutar no limite as hipóteses $h_{inf} =$"a matéria é infinitamente divisível" e $h_{fin} =$"a matéria não é infinitamente divisível".

Resolução: Divisibilidade da matéria

O demónio começa por mostrar a sequência $111\ldots$ até que o cientista conjeture 1. Se o cientista conjetura 1, o demónio passa a mostrar 0's até que o cientista conjeture 0. O processo continua para sempre.

Suponhamos que o cientista estabiliza em 1. Nestas condições, o demónio imprime uma sequência infinita de 0. A hipótese h_{inf} é falsa e o cientista está errado.

Suponhamos que o cientista estabiliza em 0. O demónio imprime apenas 1's a partir do módulo de convergência. A hipótese é verdadeira e o cientista está, de novo, errado.

Kant

$\boxed{\text{KANT}}$:

Como poderemos a partir da experiência saber... se a matéria é infinitamente divisível ou se consiste de partes simples? Tais conceitos não podem ser dados em nenhuma experiência, não importando quão extensa for, e consequentemente, a falsidade da proposição afirmativa ou da proposição negativa não pode ser descoberta por esta pedra de toque. (In *Prolegómena de Toda a Metafísica Futura*.)

Decisão, verificação e refutação no limite

Resolução: Divisibilidade da matéria

Porém, a hipótese h_{inf} é refutável no limite dado $\mathcal{K}$ por método trivial: seja $\mathcal{M}$ o cientista que repete o último *datum* observado. Se, num determinado estágio, o laboratório produz cisão, então o cientista conjetura 1; caso contrário, o cientista conjetura 0. Seja $T \in 2^{\mathbb{N}}$. Suponhamos que a hipótese está correta para T: ocorrem infinitos 1's, pelo que o cientista não estabiliza na conjetura 0. Suponhamos que h_{inf} é uma hipótese incorreta para T. Neste caso apenas um número finito de 1's ocorre em T, pelo que, após o último, $\mathcal{M}$ estabiliza em 0. O cientista $\mathcal{M}$ refuta no limite h_{inf}. Neste sentido, Kant está enganado.

Popper

POPPER :

Essas conjeturas ou "antecipações", esplendidamente imaginativas, ousadas, são, contudo, cuidadosamente controladas por testes sistemáticos. Uma vez elaborada, nenhuma dessas "antecipações" é dogmaticamente defendida. O nosso método de pesquisa não se orienta no sentido de defendê-las para provar que tínhamos razão. Pelo contrário, procuramos contestar essas "antecipações". Recorrendo a todos os meios lógicos, matemáticos e técnicos de que dispomos, procuramos demonstrar que as nossas antecipações são falsas — a fim de colocar no lugar delas novas antecipações injustificadas e injustificáveis, novos "preconceitos temerários e prematuros", como Bacon pejorativamente as denominou. (In *A Lógica da Descoberta Científica*.)

Decisão, verificação e refutação no limite

Cognição não computável

Pretende averiguar-se se a cognição será eventualmente não computável. Como experiência crucial, pretende decidir-se no limite se um comportamento do tipo *input/output* é computável.

Resolução: Cognição não computável

O sujeito pode comunicar apenas através de dois botões "sim" ou "não", i.e. 1 ou 0, respetivamente. O tempo máximo entre *bits* consecutivos é de $1\,$s. *A priori*, qualquer função de assinatura $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ é permitida, pelo que os mundos acessíveis ao sujeito são $\mathcal{K} = 2^{\mathbb{N}}$.

O cientista, que observa passivamente a sequência dos *bits* do sujeito, terá de avaliar a cada novo *datum* a hipótese $h =$"a função (cronológica) do sujeito é computável". O demónio (que opera na cabeça do sujeito) está armado: dispõe de uma sequência $\tau \in 2^{\mathbb{N}}$ não computável: começa por sugerir uma primeira sequência recursiva até que o cientista conjeture diferentemente de 0. Quando tal acontece, o demónio continua sugerindo agora os valores de τ desde o princípio, e até que o cientista conjeture 0. Então continua a primeira sequência recursiva que coincide com a sequência de *bits* já mostrados. E prossegue desta maneira, alternando τ com a primeira sequência recursiva cujo prefixo já foi lido pelo sujeito.

Decisão, verificação e refutação no limite

Cognição não computável

Pretende averiguar-se se a cognição será eventualmente não computável. Como experiência crucial, pretende decidir-se no limite se um comportamento do tipo *input*/*output* é computável.

Resolução: Cognição não computável

O sujeito pode comunicar apenas através de dois botões "sim" ou "não", i.e. 1 ou 0, respetivamente. O tempo máximo entre *bits* consecutivos é de $1\,$s. *A priori*, qualquer função de assinatura $\mathbb{N} \to \{0,1\}$ é permitida, pelo que os mundos acessíveis ao sujeito são $\mathcal{K} = 2^{\mathbb{N}}$.

O cientista, que observa passivamente a sequência dos *bits* do sujeito, terá de avaliar a cada novo *datum* a hipótese $h =$"a função (cronológica) do sujeito é computável". O demónio (que opera na cabeça do sujeito) está armado: dispõe de uma sequência $\tau \in 2^{\mathbb{N}}$ não computável: começa por sugerir uma primeira sequência recursiva até que o cientista conjeture diferentemente de 0. Quando tal acontece, o demónio continua sugerindo agora os valores de τ desde o princípio, e até que o cientista conjeture 0. Então continua a primeira sequência recursiva que coincide com a sequência de *bits* já mostrados. E prossegue desta maneira, alternando τ com a primeira sequência recursiva cujo prefixo já foi lido pelo sujeito.

Decisão, verificação e refutação no limite

Resolução: Cognição não computável

Porém (!), *o sujeito pode verificar no limite a hipótese*: para cada $\sigma \subset T$, procura o mais pequeno código de função que produz como *output* o prefixo já analisado. Se h for a hipótese correta, o sujeito acaba por encontrar o mais pequeno número natural que codifica a função sugerida pelo demónio. Mas se a hipótese for incorreta, então o sujeito terá de mudar de ideias (mudando de código) um número infinito de vezes.

Assim, a cognição computável é verificável no limite, mas não decidível no limite.

A cognição computável é dual da divisão infinita.

Decisão, verificação e refutação no limite

$\boxed{\text{POPPER}}$:

$$\begin{array}{rcl}
F_T(o,n) & = & \text{“número de ocorrências de ‘o’ em } T[n] \subset T\text{”} \\
RF_T(o,n) & = & F_T(o,n)/n \\
LRF_T(o) & = & \lim_{n\to\infty} RF_T(o,n) \\
LRF_T(o) = r & \equiv & \forall\delta > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall m \geq n\ (|RF_T(o,m) - r| < \delta) \\
LRF_S(o) & = & \{T : LRF_T(o) \in S\} \\
LRF(o) & = & \{T : \text{existe } LRF_T(o)\}
\end{array}$$

Decisão, verificação e refutação no limite

Teorema [Kevin Kelly [Kel96]]

Se $\mathcal{K} = 2^{\mathbb{N}}$, então a única hipótese de limite da frequência relativa em S verificável no limite é a vazia.

Teorema [Kevin Kelly [Kel96]]

1. $LRF_{[r,r']}(o)$ é refutável no limite dado $LRF(o)$.
2. $LRF_{]r,r'[}(o)$ é verificável no limite dado $LRF(o)$.

Decisão, verificação e refutação no limite

Teorema [Kevin Kelly [Kel96]]

Se $\mathcal{K} = 2^{\mathbb{N}}$, então a única hipótese de limite da frequência relativa em S verificável no limite é a vazia.

Teorema [Kevin Kelly [Kel96]]

1. $LRF_{[r,r']}(o)$ é refutável no limite dado $LRF(o)$.
2. $LRF_{]r,r'[}(o)$ é verificável no limite dado $LRF(o)$.

Decisão, verificação e refutação no limite

$\boxed{\text{SCIENTIST } \mathcal{M}}$:

Procedure;
Var $q, w : \mathbb{Q}$; $i \in \mathbb{N}$;
Begin
  $i := 1$;
  $q := q_0$;
  Loop
    $w := RF_T(o, n)$;
    If $w \in [r - q_{n-1}, r' + q_{n-1}]$ **Then Begin**
      Output 1;
      $i := i + 1$
    End Else Output 0
  End Loop
End

Decisão com n mudanças de ideias

Definição

O cientista $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-decide a hipótese h com n mudanças de ideias começando em $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ no texto T se e só se (a) $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-decide no limite h no texto T, (b) $mc_{\mathcal{M}}(h,T) \leq n$ e (c) $\mathcal{M}(h, T[0]) = b$.

Decisão, verificação e refutação graduais

Definição

O cientista $\mathcal{M}$ converge na conjetura $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ relativamente à hipótese h e texto T se, para todo o racional $\delta \in]0,1]$, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $m \geq n$, se tem $|\mathcal{M}(h, T[m]) - b| \leq \delta$.

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. O cientista $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica gradualmente a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n]) \to 1$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação graduais

Definição

O cientista $\mathcal{M}$ converge na conjetura $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ relativamente à hipótese h e texto T se, para todo o racional $\delta \in]0,1]$, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $m \geq n$, se tem $|\mathcal{M}(h, T[m]) - b| \leq \delta$.

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. O cientista $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica gradualmente a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n]) \to 1$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação graduais

Definição

O cientista $\mathcal{M}$ converge na conjetura $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ relativamente à hipótese h e texto T se, para todo o racional $\delta \in]0,1]$, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $m \geq n$, se tem $|\mathcal{M}(h, T[m]) - b| \leq \delta$.

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. O cientista $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica gradualmente a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n]) \to 1$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação graduais

Definição

O cientista $\mathcal{M}$ converge na conjetura $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ relativamente à hipótese h e texto T se, para todo o racional $\delta \in]0,1]$, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $m \geq n$, se tem $|\mathcal{M}(h, T[m]) - b| \leq \delta$.

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. O cientista $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica gradualmente a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n]) \to 1$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.
2. ...
3. ...

Decisão, verificação e refutação graduais

Definição

O cientista $\mathcal{M}$ converge na conjetura $b \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ relativamente à hipótese h e texto T se, para todo o racional $\delta \in]0,1]$, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $m \geq n$, se tem $|\mathcal{M}(h, T[m]) - b| \leq \delta$.

Definição

Definem-se os três conceitos seguintes:

1. O cientista $\mathcal{M}$ $\mathcal{C}$-verifica gradualmente a hipótese h no texto T se $\mathcal{M}(h, T[n]) \to 1$ **se e só se** $\mathcal{C}(T, h)$ é o caso.
2. ...
3. ...

Semântica da Indução

Espaço de Baire

Definição

O espaço de Baire é o espaço topológico $\mathbb{B} = (\mathcal{N}, B)$ em que $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e B é a coleção de todos os conjuntos que se obtêm tomando uniões arbitrárias de leques, i.e., $\mathcal{P} \in B$ se e só se existe $G \subseteq \mathbb{N}^{\star}$ tal que $\mathcal{P} = \cup\{[e] : e \in G\}$.

Interseção de conjuntos abertos na topologia de Baire

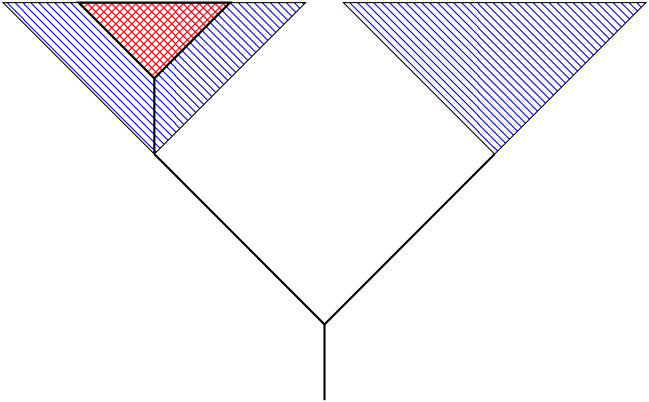


Figura: Interseção de leques.

Conjunto aberto na topologia de Baire

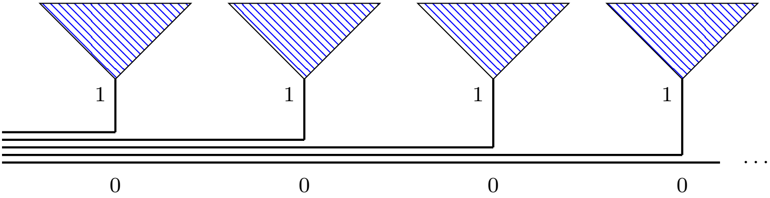


Figura: Conjunto de leques de hastes em $0^\star 1$.

Espaço de Baire

Teorema

T é um ponto limite de $S \subseteq \mathcal{N}$ se e só se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, existe $T' \in S$ tal que $T[n] = T'[n]$.

Conhecimento em tempo certo

Definição

Um conjunto aberto é n-*uniforme* no caso de ser a união de leques cujas hastes são limitadas em tamanho por n. Dizemos que um conjunto aberto é *uniforme* no caso de ser n-uniforme para algum valor de $n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Kevin Kelly [Kel96])

H é $\mathcal{C}$-decidível em tempo n dado $\mathcal{K}$ se e só se, para todo o $h \in H$, se tem $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K}$ é $\mathcal{K}$-n-uniforme.

Conhecimento em tempo certo

Definição

Um conjunto aberto é n-*uniforme* no caso de ser a união de leques cujas hastes são limitadas em tamanho por n. Dizemos que um conjunto aberto é *uniforme* no caso de ser n-uniforme para algum valor de $n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Kevin Kelly [Kel96])

H é $\mathcal{C}$-decidível em tempo n dado $\mathcal{K}$ se e só se, para todo o $h \in H$, se tem $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K}$ é $\mathcal{K}$-n-uniforme.

Conjunto aberto n-uniforme

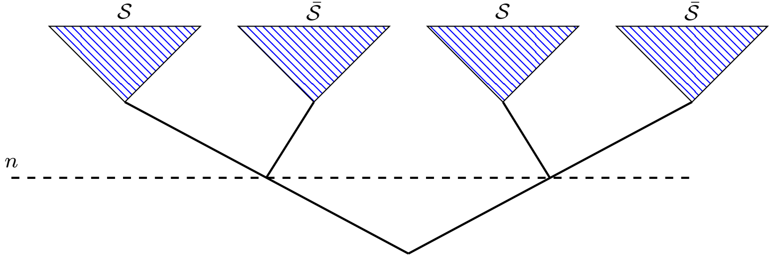


Figura: Conjunto aberto n-uniforme.

Conjunto aberto&fechado na topologia de Baire

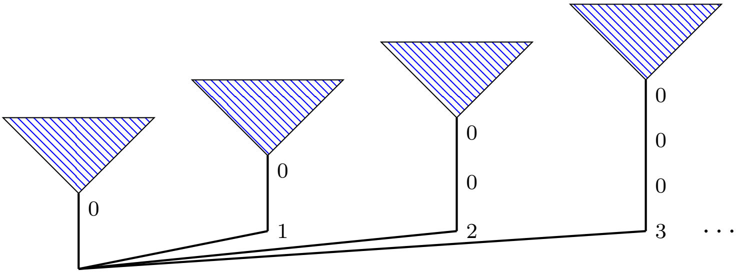


Figura: Conjunto de leques de hastes em $n0^n$.

Conhecimento seguro

Teorema (Kevin Kelly [Kel96])

H é $\mathcal{C}$-verificável com segurança dado $\mathcal{K}$, se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K}$ é $\mathcal{K}$-aberto

Definição [Hierarquia de Borel]

Esquema de Addison:

1. $S \in \Sigma_0^B$ sse S é aberto&fechado.
2. $S \in \Sigma_{n+1}^B$ sse S é a união contável de complementares de conjuntos em Σ_n^B.
3. $S \in \Pi_n^B$ sse $\bar{S} \in \Sigma_n^B$.
4. $S \in \Delta_n^B$ sse $S \in \Sigma_n^B \cap \Pi_n^B$.

Conhecimento seguro

Teorema (Kevin Kelly [Kel96])

H é $\mathcal{C}$-verificável com segurança dado $\mathcal{K}$, se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K}$ é $\mathcal{K}$-aberto

Definição [Hierarquia de Borel]

Esquema de Addison:

1. $S \in \Sigma_0^B$ sse S é aberto&fechado.
2. $S \in \Sigma_{n+1}^B$ sse S é a união contável de complementares de conjuntos em Σ_n^B.
3. $S \in \Pi_n^B$ sse $\bar{S} \in \Sigma_n^B$.
4. $S \in \Delta_n^B$ sse $S \in \Sigma_n^B \cap \Pi_n^B$.

Para que o mundo possa ainda ser cognoscível

Teorema [Gold 1965, Putnam 1965]

H é $\mathcal{C}$-verificável no limite dado $\mathcal{K}$, se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K} \in \Sigma[\mathcal{K}]_2^B$.

$\boxed{\textsc{Indução}}$:

O problema da indução acontece quando a hipótese ou o seu complemento não são fechados. I.e., o problema da indução ocorre na fronteira das hipóteses.

Teorema [Kevin Kelly [Kel96]]

H é $\mathcal{C}$-verificável gradualmente dado $\mathcal{K}$, se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K} \in \Pi[\mathcal{K}]_3^B$.

Para que o mundo possa ainda ser cognoscível

Teorema [Gold 1965, Putnam 1965]

H é $\mathcal{C}$-verificável no limite dado $\mathcal{K}$, se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K} \in \Sigma[\mathcal{K}]_2^B$.

INDUÇÃO :

O problema da indução acontece quando a hipótese ou o seu complemento não são fechados. I.e., o problema da indução ocorre na fronteira das hipóteses.

Teorema [Kevin Kelly [Kel96]]

H é $\mathcal{C}$-verificável gradualmente dado $\mathcal{K}$, se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K} \in \Pi[\mathcal{K}]_3^B$.

Para que o mundo possa ainda ser cognoscível

Teorema [Gold 1965, Putnam 1965]

H é $\mathcal{C}$-verificável no limite dado $\mathcal{K}$, se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K} \in \Sigma[\mathcal{K}]_2^B$.

$\boxed{\text{Indução}}$:

O problema da indução acontece quando a hipótese ou o seu complemento não são fechados. I.e., o problema da indução ocorre na fronteira das hipóteses.

Teorema [Kevin Kelly [Kel96]]

H é $\mathcal{C}$-verificável gradualmente dado $\mathcal{K}$, se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K} \in \Pi[\mathcal{K}]_3^B$.

Para que o mundo possa ainda ser cognoscível

Teorema [Gold 1965, Putnam 1965]

H é $\mathcal{C}$-verificável no limite dado $\mathcal{K}$, se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K} \in \Sigma[\mathcal{K}]_2^B$.

$\boxed{\textsc{Indução}}$:

O problema da indução acontece quando a hipótese ou o seu complemento não são fechados. I.e., o problema da indução ocorre na fronteira das hipóteses.

Teorema [Kevin Kelly [Kel96]]

H é $\mathcal{C}$-verificável gradualmente dado $\mathcal{K}$, se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K} \in \Pi[\mathcal{K}]_3^B$.

Para que o mundo possa ainda ser cognoscível

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}\Pi[\mathcal{K}]^B_1\\ \text{ref.segurança}\end{array} \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\Pi[\mathcal{K}]^B_2\\ \text{ref.limite}\end{array} \arrow[dr] & & \\
\begin{array}{c}\Delta^B_1\\ \text{dec.seg}\end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\Delta[\mathcal{K}]^B_2\\ \text{dec.limite}\end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta[\mathcal{K}]^B_3 & \cdots \\
 & \begin{array}{c}\Sigma[\mathcal{K}]^B_1\\ \text{ver.segurança}\end{array} \arrow[ur] & & \begin{array}{c}\Sigma[\mathcal{K}]^B_2\\ \text{ver.limite}\end{array} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Figura: Hierarquia de Borel. As setas denotam inclusões *lato sensu*.

Hierarquia das diferenças finitas

Definição [Hierarquia das diferenças finitas]

1. $S \in \Sigma[\mathcal{K}]_0^D$ sse S é $\mathcal{K}$-aberto&fechado
2. $S \in \Sigma[\mathcal{K}]_{n+1}^D$ sse existe $\mathcal{R} \in \Sigma[\mathcal{K}]_n^D$ e $\mathcal{O}$ $\mathcal{K}$-aberto, tais que $\mathcal{S} = \bar{\mathcal{R}} \cap \mathcal{O}$
3. $S \in \Pi[\mathcal{K}]_n^D$ sse $\bar{S} \in \Sigma[\mathcal{K}]_n^D$
4. $S \in \Delta[\mathcal{K}]_n^D$ sse $S \in \Sigma[\mathcal{K}]_n^D \cap \Pi[\mathcal{K}]_n^D$

Caracterização da mudança de ideias

Teorema (Kevin Kelly [Kel96])

Para todo o $n \geq 0$, H é $\mathcal{C}$-decidível com n mudanças de ideias a começar em 0 se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K} \in \Sigma[\mathcal{K}]^D_n$.

Teorema

Se $\mathcal{K}$ é o conjunto dos textos que estabilizam nalgum valor, então, para todo o n, $\Sigma[\mathcal{K}]^D_n \subset \Sigma[\mathcal{K}]^D_{n+1}$,

Caracterização da mudança de ideias

Teorema (Kevin Kelly [Kel96])

Para todo o $n \geq 0$, H é $\mathcal{C}$-decidível com n mudanças de ideias a começar em 0 se e só se, para todo o $h \in H$, $\mathcal{C}_h \cap \mathcal{K} \in \Sigma[\mathcal{K}]_n^D$.

Teorema

Se $\mathcal{K}$ é o conjunto dos textos que estabilizam nalgum valor, então, para todo o n, $\Sigma[\mathcal{K}]_n^D \subset \Sigma[\mathcal{K}]_{n+1}^D$,

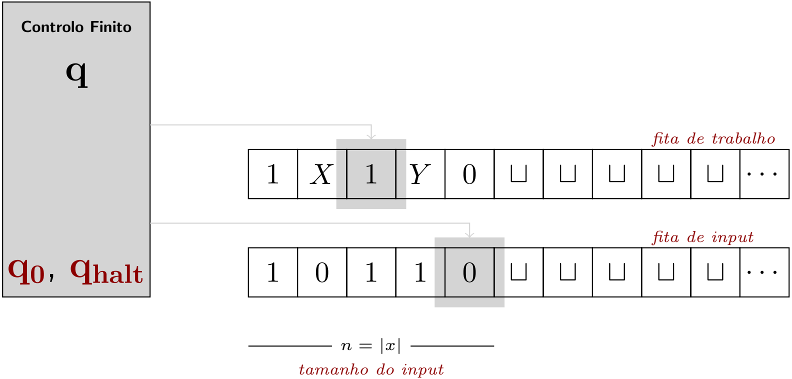
Caracterização da mudança de ideias

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c}\Pi[\mathcal{K}]_1^B\\ \text{ref.segurança}\end{array} \arrow[dr] & & & \begin{array}{c}\Pi[\mathcal{K}]_2^B\\ \text{ref.limite}\end{array} \arrow[dr] & & \\
\begin{array}{c}\Delta[\mathcal{K}]_1^B\\ \text{dec.seg}\end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{array}{c}Dec.n^\circ lim.\\ mud.ideias\end{array} \arrow[r] & \begin{array}{c}\Delta[\mathcal{K}]_2^B\\ \text{dec.limite}\end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta[\mathcal{K}]_3^B & \cdots \\
 & \begin{array}{c}\Sigma[\mathcal{K}]_1^B\\ \text{ver.segurança}\end{array} \arrow[ur] & & & \begin{array}{c}\Sigma[\mathcal{K}]_2^B\\ \text{ver.limite}\end{array} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Figura: Hierarquia das diferenças finitas. As setas denotam inclusões *lato sensu*.

Computacionalismo

A máquina de Turing: Como funciona?



Enviando o π de uma só vez!

"

:$0 --> N 0 --> D$
: While 1
: rand$*2-1-->X$
: rand$*2-1-->Y$
: If $sqrt(x^2+y^2)=<1$
: $N+1-->N$
: End
: $D+1-->D$
: Disp $(N/D*4)$

:End"

Poe, E.

Near a Raven

Midnights so dreary, tired and weary.
Silently pondering volumes extolling all by-now obsolete lore.
During my rather long nap – the weirdest tap!
An ominous vibrating sound disturbing my chamber's antedoor.
"This", I whispered quietly, "I ignore".

Perfectly, the intellect remembers: the ghostly fires, a glittering ember.
Inflamed by lightning's outbursts, windows cast penumbras upon this floor.
Sorrowful, as one mistreated, unhappy thoughts I heeded:
That inimitable lesson in elegance – Lenore –
Is delighting, exciting... nevermore.

(Mike Keith, 1995)

Computabilidade

Definição [TESTES]

1. A máquina de Turing $\mathcal{M}$ constitui um teste limite positivo para o conjunto S se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n \in S$ se e só se o *output* de $\mathcal{M}$ estabiliza em 1.
2. ...
3. ...

Computabilidade

Definição [TESTES]

1. A máquina de Turing $\mathcal{M}$ constitui um teste limite positivo para o conjunto S se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n \in S$ se e só se o *output* de $\mathcal{M}$ estabiliza em 1.
2. ...
3. ...

Computabilidade

Definição [TESTES]

1. A máquina de Turing $\mathcal{M}$ constitui um teste limite positivo para o conjunto S se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n \in S$ se e só se o *output* de $\mathcal{M}$ estabiliza em 1.
2. ...
3. ...

Computabilidade

Definição [TESTES]

1. A máquina de Turing $\mathcal{M}$ constitui um teste limite positivo para o conjunto S se, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n \in S$ se e só se o *output* de $\mathcal{M}$ estabiliza em 1.
2. ...
3. ...

Computabilidade

Definição [Decidibilidade e semi-decibilidade]

1. O conjunto S é recursivamente enumerável no limite se S admite um teste limite positivo.
2. O conjunto S é co-recursivamente enumerável no limite se S admite um teste limite negativo.

Computabilidade

Definição [Decidibilidade e semi-decibilidade]

1. O conjunto S é recursivamente enumerável no limite se S admite um teste limite positivo.
2. O conjunto S é co-recursivamente enumerável no limite se S admite um teste limite negativo.

Computabilidade

Definição [Decidibilidade e semi-decibilidade]

1. O conjunto S é recursivamente enumerável no limite se S admite um teste limite positivo.
2. O conjunto S é co-recursivamente enumerável no limite se S admite um teste limite negativo.

Computabilidade

Definição [Hierarquia aritmética]

A hierarquia aritmética é a estrutura de classes Σ_k^0, Π_k^0 e Δ_k^0, para todo o $k \in \mathbb{N}$, definidas indutivamente como se segue:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_0^0 & = & REC \\ \Sigma_{n+1}^0 & = & \{R \subseteq \mathbb{N}^\ell : \ell \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ e existe } R' \subseteq \mathbb{N}^{\ell+1} \text{ tal que} \\ & & \quad R(m_1, \ldots, m_\ell) \text{ sse } \exists m \neg R'(m_1, \ldots, m_\ell, m) \text{ e } R' \in \Sigma_n^0\} \\ \Pi_n^0 & = & co - \Sigma_n^0 \\ \Delta_n^0 & = & \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0 \end{array}$$

Teorema [Gold 1965, Putnam 1965]

O conjunto S é recursivamente enumerável no limite se e só se $S \in \Sigma_2^0$.

Computabilidade

Definição [Hierarquia aritmética]

A hierarquia aritmética é a estrutura de classes Σ_k^0, Π_k^0 e Δ_k^0, para todo o $k \in \mathbb{N}$, definidas indutivamente como se segue:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_0^0 & = & REC \\ \Sigma_{n+1}^0 & = & \{R \subseteq \mathbb{N}^\ell : \ell \in \mathbb{N} - \{0\} \text{ e existe } R' \subseteq \mathbb{N}^{\ell+1} \text{ tal que} \\ & & \quad R(m_1, \ldots, m_\ell) \text{ sse } \exists m \neg R'(m_1, \ldots, m_\ell, m) \text{ e } R' \in \Sigma_n^0\} \\ \Pi_n^0 & = & co - \Sigma_n^0 \\ \Delta_n^0 & = & \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0 \end{array}$$

Teorema [Gold 1965, Putnam 1965]

O conjunto S é recursivamente enumerável no limite se e só se $S \in \Sigma_2^0$.

Computabilidade

Demonstração:

Condição necessária. Seja $\mathcal{M}$ uma máquina de Turing que testemunha que o conjunto S é recursivamente enumerável no limite. Podemos escrever:

$$x \in S \text{ se e só se } \overbrace{\exists p\, \forall n\, \underbrace{(n < p \text{ ou } M(x)\downharpoonright^n = 1)}_{R(x,m,n) \in \Sigma_0^0}}^{P(x) \in \Sigma_2^0}\,.$$

Condição suficiente. Suponhamos que $S \in \Sigma_2^0$, i.e. $S = \{x \in \mathbb{N} : \exists n\, \forall m\, R(x,m,n)\}$, com $R \in \Sigma_0^0$. Especificamos uma máquina de Turing que escreva sucessivamente

$$\mathcal{M}(x,0,0), \mathcal{M}(x,0,1), \mathcal{M}(x,0,2), ..., \underbrace{\mathcal{M}(x,0,n_1)}_{=0}$$

$$\mathcal{M}(x,1,0), \mathcal{M}(x,1,1), \mathcal{M}(x,1,2), ..., \underbrace{\mathcal{M}(x,1,n_2)}_{=0}$$

$$\ldots$$

Computabilidade

Demonstração:

Condição necessária. Seja $\mathcal{M}$ uma máquina de Turing que testemunha que o conjunto S é recursivamente enumerável no limite. Podemos escrever:

$$x \in S \text{ se e só se } \overbrace{\exists p\, \forall n\, (\underbrace{n < p \text{ ou } M(x)\rfloor^{n} = 1}_{R(x,m,n)\in\Sigma_0^0})}^{P(x)\in\Sigma_2^0}\ .$$

Condição suficiente. Suponhamos que $S \in \Sigma_2^0$, i.e. $S = \{x \in \mathbb{N} : \exists n\, \forall m\, R(x,m,n)\}$, com $R \in \Sigma_0^0$. Especificamos uma máquina de Turing que escreva sucessivamente

$$\mathcal{M}(x,0,0), \mathcal{M}(x,0,1), \mathcal{M}(x,0,2), \ldots, \underbrace{\mathcal{M}(x,0,n_1)}_{=0}$$

$$\mathcal{M}(x,1,0), \mathcal{M}(x,1,1), \mathcal{M}(x,1,2), \ldots, \underbrace{\mathcal{M}(x,1,n_2)}_{=0}$$

$$\ldots$$

Computabilidade

Demonstração:

Condição necessária. Seja $\mathcal{M}$ uma máquina de Turing que testemunha que o conjunto S é recursivamente enumerável no limite. Podemos escrever:

$$x \in S \text{ se e só se } \overbrace{\exists p \, \forall n \, (\underbrace{n < p \text{ ou } M(x)\!\downharpoonright^{n} = 1}_{R(x,m,n) \in \Sigma_0^0})}^{P(x) \in \Sigma_2^0} \, .$$

Condição suficiente. Suponhamos que $S \in \Sigma_2^0$, i.e. $S = \{x \in \mathbb{N} : \exists n \, \forall m \, R(x,m,n)\}$, com $R \in \Sigma_0^0$. Especificamos uma máquina de Turing que escreva sucessivamente

$$\mathcal{M}(x,0,0), \mathcal{M}(x,0,1), \mathcal{M}(x,0,2), ..., \underbrace{\mathcal{M}(x,0,n_1)}_{=0}$$

$$\mathcal{M}(x,1,0), \mathcal{M}(x,1,1), \mathcal{M}(x,1,2), ..., \underbrace{\mathcal{M}(x,1,n_2)}_{=0}$$

$$\cdots$$

Computabilidade

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{matrix}\Pi^0_1 \\ \text{co-r.e.}\end{matrix} \arrow[dr] & & \begin{matrix}\Pi^0_2 \\ \text{co-r.e. limite}\end{matrix} \arrow[dr] & & \\
\begin{matrix}\Delta^0_1 \\ \text{recursivo}\end{matrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{matrix}\Delta^0_2 \\ \text{recursivo limite}\end{matrix} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Delta^0_3 & \cdots \\
 & \begin{matrix}\Sigma^0_1 \\ \text{r.e.}\end{matrix} \arrow[ur] & & \begin{matrix}\Sigma^0_2 \\ \text{r.e. limite}\end{matrix} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Figura: Hierarquia aritmética. As setas denotam inclusões *lato sensu*.

Bibliography I

Kevin T. Kelly.
The Logic of Reliable Inquiry.
Oxford University Press, 1996.

John G. Kemeny.
A Philosopher Looks at Science.
D. van Nostrand Company, 1959.