Escola de Inverno 2015

Teoria da Identificação

José Félix Costa[1]

[1] Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico
fgc@math.tecnico.ulisboa.pt

Fevereiro de 2015

Um Segundo Conceito de Cientista

Inferência indutiva

Método de Galileu ou hipotético-dedutivo

Puzzle de Kuhn $\rightarrow$
- (1) Há uma lei por descobrir.
- (2) O cientista enuncia uma hipótese.
- (3) O cientista deduz consequências da hipótese.
- (4) O cientista testa a hipótese.

Ciclo 4-3-4: Se o passo 4 é bem sucedido, então o cientista retorna ao passo 3 e continua a realizar testes.
Ciclo 4-2-3-4: Se o passo 4 é mal sucedido, então o cientista retorna ao passo 2 e muda de ideias, muda de hipótese ou conjetura.

Inferência indutiva

Método de Galileu ou hipotético-dedutivo

Puzzle de Kuhn $\rightarrow$ {
(1) Há uma lei por descobrir.
(2) O cientista enuncia uma hipótese.
(3) O cientista deduz consequências da hipótese.
(4) O cientista testa a hipótese.

Ciclo 4-3-4: Se o passo 4 é bem sucedido, então o cientista retorna ao passo 3 e continua a realizar testes.
Ciclo 4-2-3-4: Se o passo 4 é mal sucedido, então o cientista retorna ao passo 2 e muda de ideias, muda de hipótese ou conjetura.

Inferência indutiva

Método de Galileu ou hipotético-dedutivo

Puzzle de Kuhn $\rightarrow$ {
(1) Há uma lei por descobrir.
(2) O cientista enuncia uma hipótese.
(3) O cientista deduz consequências da hipótese.
(4) O cientista testa a hipótese.

Ciclo 4-3-4: Se o passo 4 é bem sucedido, então o cientista retorna ao passo 3 e continua a realizar testes.
Ciclo 4-2-3-4: Se o passo 4 é mal sucedido, então o cientista retorna ao passo 2 e muda de ideias, muda de hipótese ou conjetura.

Inferência indutiva

Método de Galileu ou hipotético-dedutivo

Puzzle de Kuhn $\rightarrow$
- (1) Há uma lei por descobrir.
- (2) O cientista enuncia uma hipótese.
- (3) O cientista deduz consequências da hipótese.
- (4) O cientista testa a hipótese.

Ciclo 4-3-4: Se o passo 4 é bem sucedido, então o cientista retorna ao passo 3 e continua a realizar testes.
Ciclo 4-2-3-4: Se o passo 4 é mal sucedido, então o cientista retorna ao passo 2 e muda de ideias, muda de hipótese ou conjetura.

Inferência indutiva

Método de Galileu ou hipotético-dedutivo

Puzzle de Kuhn $\rightarrow$

- (1) Há uma lei por descobrir.
- (2) O cientista enuncia uma hipótese.
- (3) O cientista deduz consequências da hipótese.
- (4) O cientista testa a hipótese.

Ciclo 4-3-4: Se o passo 4 é bem sucedido, então o cientista retorna ao passo 3 e continua a realizar testes.
Ciclo 4-2-3-4: Se o passo 4 é mal sucedido, então o cientista retorna ao passo 2 e muda de ideias, muda de hipótese ou conjetura.

Inferência indutiva

Método de Galileu ou hipotético-dedutivo

Puzzle de Kuhn $\rightarrow$ {
(1) Há uma lei por descobrir.
(2) O cientista enuncia uma hipótese.
(3) O cientista deduz consequências da hipótese.
(4) O cientista testa a hipótese.

Ciclo 4-3-4: Se o passo 4 é bem sucedido, então o cientista retorna ao passo 3 e continua a realizar testes.
Ciclo 4-2-3-4: Se o passo 4 é mal sucedido, então o cientista retorna ao passo 2 e muda de ideias, muda de hipótese ou conjetura.

Inferência indutiva

Método de Galileu ou hipotético-dedutivo

Puzzle de Kuhn $\rightarrow$
- (1) Há uma lei por descobrir.
- (2) O cientista enuncia uma hipótese.
- (3) O cientista deduz consequências da hipótese.
- (4) O cientista testa a hipótese.

Ciclo 4-3-4: Se o passo 4 é bem sucedido, então o cientista retorna ao passo 3 e continua a realizar testes.

Ciclo 4-2-3-4: Se o passo 4 é mal sucedido, então o cientista retorna ao passo 2 e muda de ideias, muda de hipótese ou conjetura.

Inferência indutiva

Método de Galileu ou hipotético-dedutivo

$$\text{Puzzle de Kuhn} \rightarrow \begin{cases} \text{(1) Há uma lei por descobrir.} \\ \text{(2) O cientista enuncia uma hipótese.} \\ \text{(3) O cientista deduz consequências da hipótese.} \\ \text{(4) O cientista testa a hipótese.} \end{cases}$$

Ciclo 4-3-4: Se o passo 4 é bem sucedido, então o cientista retorna ao passo 3 e continua a realizar testes.
Ciclo 4-2-3-4: Se o passo 4 é mal sucedido, então o cientista retorna ao passo 2 e muda de ideias, muda de hipótese ou conjetura.

Inferência indutiva

Item 10

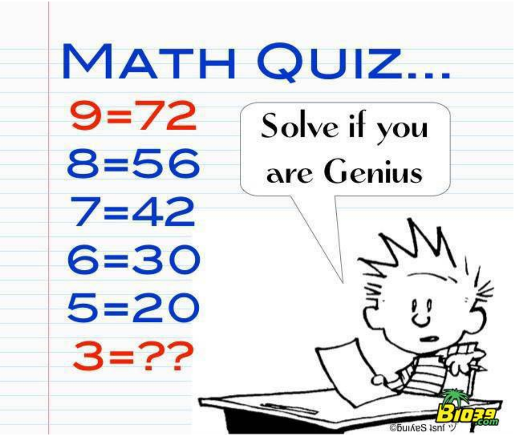
A sequência abaixo é constituída por letras do alfabeto português.

A A B A C C D C E E ...

10. Mantendo o mesmo padrão de formação da sequência, qual das opções contém as quatro letras que permitem continuá-la?

(A) F E G G **(B)** F E H H **(C)** F F G F **(D)** F F G H

O poder da inferência indutiva



O poder da inferência indutiva

06	+	04	=	0210
15	+	03	=	1218
05	+	02	=	0037
09	+	02	=	0711
08	+	05	=	0313
09	+	08	=	0117
10	+	06	=	0416
07	+	06	=	0113

O poder da inferência indutiva

$$
\begin{array}{ccccc}
06 & + & 04 & = & 0210 \\
15 & + & 03 & = & 1218 \\
05 & + & 02 & = & 0037 \\
09 & + & 02 & = & 0711 \\
08 & + & 05 & = & 0313 \\
09 & + & 08 & = & 0117 \\
10 & + & 06 & = & 0416 \\
07 & + & 06 & = & 0113
\end{array}
$$

O poder da inferência indutiva

$$
\begin{array}{ccccc}
06 & + & 04 & = & 0210 \\
15 & + & 03 & = & 1218 \\
05 & + & 02 & = & 0037 \\
09 & + & 02 & = & 0711 \\
08 & + & 05 & = & 0313 \\
09 & + & 08 & = & 0117 \\
10 & + & 06 & = & 0416 \\
07 & + & 06 & = & 0113
\end{array}
$$

O poder da inferência indutiva

$$
\begin{array}{ccccc}
06 & + & 04 & = & 0210 \\
15 & + & 03 & = & 1218 \\
05 & + & 02 & = & 0037 \\
09 & + & 02 & = & 0711 \\
08 & + & 05 & = & 0313 \\
09 & + & 08 & = & 0117 \\
10 & + & 06 & = & 0416 \\
07 & + & 06 & = & 0113
\end{array}
$$

O poder da inferência indutiva

$$
\begin{array}{ccccc}
06 & + & 04 & = & 0210 \\
15 & + & 03 & = & 1218 \\
05 & + & 02 & = & 0037 \\
09 & + & 02 & = & 0711 \\
08 & + & 05 & = & 0313 \\
09 & + & 08 & = & 0117 \\
10 & + & 06 & = & 0416 \\
07 & + & 06 & = & 0113
\end{array}
$$

Dados científicos originais de Boyle (1662).

Volume (V)	Pressão (P)	PV
1.0	29.750	29.750
1.5	19.125	28.688
2.0	14.375	28.750
3.0	9.500	28.500
4.0	7.125	28.500
5.0	5.625	28.125
6.0	4.875	29.125
7.0	4.250	29.750
8.0	3.750	30.000
9.0	3.375	30.375
10.0	3.000	30.000
12.0	2.625	31.500
14.0	2.250	31.500
16.0	2.000	32.000
18.0	1.875	33.750
20.0	1.750	35.000
24.0	1.500	36.000
28.0	1.375	38.500
32.0	1.250	40.000
16.0	2.000	32.000

Figura: Dados originais de Boyle (Pat Langley et al. [LSBZ87]).

Física: conjeturando a lei de Boyle

Lei de Boyle

A *pressão* de um gás ideal no interior de um recipiente flexível, mantido a temperatura constante durante um processo de compressão ou expansão, é inversamente proporcional do seu *volume*.

$\boxed{\text{Lei de Boyle}}$:

$$pV = const$$

O cientista 'Boyle', sob *input* de um texto $\langle 5, \frac{2}{5}\rangle\#\langle 10, \frac{1}{5}\rangle\#\langle 20, \frac{1}{10}\rangle\#\ \ldots$, produz o código e da instância da Lei de Boyle com constante 2.

Física: conjeturando a lei de Boyle

Lei de Boyle

A *pressão* de um gás ideal no interior de um recipiente flexível, mantido a temperatura constante durante um processo de compressão ou expansão, é inversamente proporcional do seu *volume*.

$\boxed{\text{Lei de Boyle}}$:

$$pV = const$$

O cientista 'Boyle', sob *input* de um texto $\langle 5, \frac{2}{5}\rangle\#\langle 10, \frac{1}{5}\rangle\#\langle 20, \frac{1}{10}\rangle\#\ \ldots$, produz o código e da instância da Lei de Boyle com constante 2.

Física: conjeturando a lei de Boyle

Lei de Boyle

A *pressão* de um gás ideal no interior de um recipiente flexível, mantido a temperatura constante durante um processo de compressão ou expansão, é inversamente proporcional do seu *volume*.

$\boxed{\text{LEI DE BOYLE}}$:

$$pV = const$$

O cientista 'Boyle', sob *input* de um texto $\langle 5, \frac{2}{5}\rangle\#\langle 10, \frac{1}{5}\rangle\#\langle 20, \frac{1}{10}\rangle\#\ \ldots$, produz o código e da instância da Lei de Boyle com constante 2.

… Matemática: … conjeturando π

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$

$3,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 9 \cdots$

CIENTISTA

Arquimedes

$\ldots\ \ell$

A conjetura estabiliza

ϕ_e é π

... Matemática: ... conjeturando π

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$

$3,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 9 \cdots$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\textbf{CIENTISTA Arquimedes}}$ $\rightsquigarrow$ $\ldots\ \ell$

A conjetura estabiliza

ϕ_e é π

... Matemática: ... conjeturando π

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$

$3,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 9 \cdots$

CIENTISTA

Arquimedes

$\ldots\ \ell$

A conjetura estabiliza

ϕ_e é π

... Matemática: ... conjeturando π

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$

$3,\ 1\ 4\ 1\ 5\ 9\ 2\ 6\ 5\ 3\ 5\ 9 \cdots$

CIENTISTA

Arquimedes

$\ldots\ \ell$

A conjetura estabiliza

ϕ_e é π

Gás de van der Walls

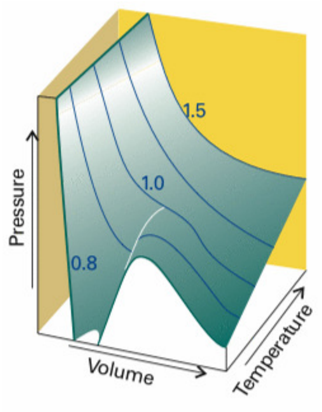


Figura: A equação constitutiva de van der Walls.

Gás de van der Walls

Ex-identificação

Após a ordem $\ell \in \mathbb{N}$
$\langle p_0, V_0\rangle\#\langle p_1, V_1\rangle\#\langle p_k, V_k\rangle\#\ \ldots$

CIENTISTA

Van der Walls

$\ldots\ e$
A conjetura estabiliza

ϕ_e é uma instância da lei de van der Walls

Figura: Para todo o $t \geq \ell$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $Volume[Pressure]$ conjetura uma instância da lei de van der Walls para o gás original sob consideração: $(p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) = const$.

Gás de van der Walls

Ex-identificação

Após a ordem $\ell \in \mathbb{N}$
$\langle p_0, V_0\rangle \# \langle p_1, V_1\rangle \# \langle p_k, V_k\rangle \# \ \ldots$

CIENTISTA

Van der Walls

$\ldots\ e$
A conjetura estabiliza

ϕ_e é uma instância da lei de van der Walls

Figura: Para todo o $t \geq \ell$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $Volume[Pressure]$ conjetura uma instância da lei de van der Walls para o gás original sob consideração: $(p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) = const$.

Gás de van der Walls

Ex-identificação

Após a ordem $\ell \in \mathbb{N}$

$\langle p_0, V_0 \rangle \# \langle p_1, V_1 \rangle \# \langle p_k, V_k \rangle \#$ ...

CIENTISTA

Van der Walls

... e

A conjetura estabiliza

ϕ_e é uma instância da lei de van der Walls

Figura: Para todo o $t \geq \ell$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $Volume[Pressure]$ conjetura uma instância da lei de van der Walls para o gás original sob consideração: $(p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) = const$.

Gás de van der Walls

Ex-identificação

Após a ordem $\ell \in \mathbb{N}$

$\langle p_0, V_0\rangle\#\langle p_1, V_1\rangle\#\langle p_k, V_k\rangle\# \ \ldots$

CIENTISTA

Van der Walls

$\ldots\ e$

A conjetura estabiliza

ϕ_e é uma instância da lei de van der Walls

Figura: Para todo o $t \geq \ell$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $Volume[Pressure]$ conjetura uma instância da lei de van der Walls para o gás original sob consideração: $(p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) = const$.

Gás de van der Walls

Ex-identificação

Após a ordem $\ell \in \mathbb{N}$
$\langle p_0, V_0\rangle\#\langle p_1, V_1\rangle\#\langle p_k, V_k\rangle\#\ \ldots$

CIENTISTA

Van der Walls

$\ldots\ e$
A conjetura estabiliza

ϕ_e é uma instância da lei de van der Walls

Figura: Para todo o $t \geq \ell$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $Volume[Pressure]$ conjetura uma instância da lei de van der Walls para o gás original sob consideração: $(p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) = const$.

Dados originais de Borelli

Lua	Distância (D)	Período (P)	(D/P)	(D^2/P)	(D^3/P^2)
A	5.67	1.769	3.203	18.153	58.15
B	8.67	3.571	2.427	21.036	51.06
C	14.00	7.155	1.957	27.395	53.61
D	24.67	16.689	1.478	36.459	53.89

Figura: Dados originais de Borelli relativos ao planeta Júpiter (Gingerich 1975; Pat Langley et al. [LSBZ87]). As distâncias estão expressas em múltiplos do raio de Júpiter.

Algumas leis empíricas

Boyle's law	$PV = const.$
Kepler's third law	$D^3P^2 = const.$
Galileo law	$2D/T^2 = g$
Ohm's law	$IL = -rI + v$

Figura: Leis físicas redescobertas computacionalmente.

Observações de Mendel

VV	$\longrightarrow$	V
AA	$\longrightarrow$	A
VA	$\longrightarrow$	V'
$V'V'$	$\longrightarrow$	$V \vert V' \vert A$

Figura: Observações de Mendel relativas a fenótipos de ervilheiras verdes e amarelas para inferir as classes genotípicas. Legenda: V denota ervilheira verde pura, V' denota ervilheira híbrida verde, A denota ervilheira amarela pura.

Conjetura de Mendel

$\{vv\}\ \{vv\}$	$\longrightarrow$	$\{vv\}$
$\{aa\}\ \{aa\}$	$\longrightarrow$	$\{aa\}$
$\{vv\}\ \{aa\}$	$\longrightarrow$	$\{va\}$
$\{va\}\ \{va\}$	$\longrightarrow$	$\{vv\}\|\{va\}\|\{aa\}$

Figura: Explicação de Mendel.

Conjetura de Mendel

$TxtEx$-identificação

$$\begin{array}{lcr} VV & \longrightarrow & V, \\ AA & \longrightarrow & A, \\ VA & \longrightarrow & V', \\ V'V' & \longrightarrow & V|V'|A \end{array}$$

CIENTISTA

Mendel

$$\begin{array}{lcr} \{vv\}\{vv\} & \longrightarrow & \{vv\}, \\ \{aa\}\{aa\} & \longrightarrow & \{aa\}, \\ \{vv\}\{aa\} & \longrightarrow & \{va\}, \\ \{va\}\{va\} & \longrightarrow & \{vv\}|\{va\}|\{vv\} \end{array}$$

ϕ_e é uma instância da lei de Mendel

Figura: Descoberta dos princípios da herança genética por $TxtEx$-identificação .

Conjetura de Mendel

$TxtEx$-identificação

VV	$\longrightarrow$	V,	**CIENTISTA**	$\{vv\}\{vv\}$	$\longrightarrow$	$\{vv\}$,
AA	$\longrightarrow$	A,		$\{aa\}\{aa\}$	$\longrightarrow$	$\{aa\}$,
VA	$\longrightarrow$	V',	**Mendel**	$\{vv\}\{aa\}$	$\longrightarrow$	$\{va\}$,
$V'V'$	$\longrightarrow$	$V\vert V'\vert A$		$\{va\}\{va\}$	$\longrightarrow$	$\{vv\}\vert\{va\}\vert\{vv\}$

ϕ_e é uma instância da lei de Mendel

Figura: Descoberta dos princípios da herança genética por $TxtEx$-identificação .

Conjetura de Mendel

$TxtEx$-identificação

$$\begin{array}{lcr} VV & \longrightarrow & V, \\ AA & \longrightarrow & A, \\ VA & \longrightarrow & V', \\ V'V' & \longrightarrow & V|V'|A \end{array}$$

CIENTISTA

Mendel

$$\begin{array}{lcr} \{vv\}\{vv\} & \longrightarrow & \{vv\}, \\ \{aa\}\{aa\} & \longrightarrow & \{aa\}, \\ \{vv\}\{aa\} & \longrightarrow & \{va\}, \\ \{va\}\{va\} & \longrightarrow & \{vv\}|\{va\}|\{vv\} \end{array}$$

ϕ_e é uma instância da lei de Mendel

Figura: Descoberta dos princípios da herança genética por $TxtEx$-identificação .

Conjetura de Mendel

$TxtEx$-identificação

$$\begin{array}{lcr} VV & \longrightarrow & V, \\ AA & \longrightarrow & A, \\ VA & \longrightarrow & V', \\ V'V' & \longrightarrow & V|V'|A \end{array}$$

CIENTISTA

Mendel

$$\begin{array}{lcr} \{vv\}\{vv\} & \longrightarrow & \{vv\}, \\ \{aa\}\{aa\} & \longrightarrow & \{aa\}, \\ \{vv\}\{aa\} & \longrightarrow & \{va\}, \\ \{va\}\{va\} & \longrightarrow & \{vv\}|\{va\}|\{vv\} \end{array}$$

ϕ_e é uma instância da lei de Mendel

Figura: Descoberta dos princípios da herança genética por $TxtEx$-identificação .

Conjetura de Mendel

$TxtEx$-identificação

$$\begin{array}{lcr} VV & \longrightarrow & V, \\ AA & \longrightarrow & A, \\ VA & \longrightarrow & V', \\ V'V' & \longrightarrow & V|V'|A \end{array}$$

CIENTISTA

Mendel

$$\begin{array}{lcr} \{vv\}\{vv\} & \longrightarrow & \{vv\}, \\ \{aa\}\{aa\} & \longrightarrow & \{aa\}, \\ \{vv\}\{aa\} & \longrightarrow & \{va\}, \\ \{va\}\{va\} & \longrightarrow & \{vv\}|\{va\}|\{vv\} \end{array}$$

ϕ_e é uma instância da lei de Mendel

Figura: Descoberta dos princípios da herança genética por $TxtEx$-identificação .

Os cientistas trabalham com texto!

Text et al.

1 E.g., um texto T para uma função é uma aplicação $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por $T[t]$ denotamos a sequência dos primeiros t elementos de T.

0	1	2	3	4	$\cdots$
$\langle 29.750, 1.0\rangle$	$\langle 7.125, 4.0\rangle$	$\langle 3.750, 8.0\rangle$	$\langle 2.625, 12.0\rangle$	$\langle 2.000, 16.0\rangle$	$\cdots$

2 $SEG = \{T[t] : T$ is a text for a function and $t \in \mathbb{N}\}$.

3 $SEQ = \{T[t] : T$ is a text for a set and $t \in \mathbb{N}\}$.

Definição (Cientista, Gold [Gol67])

Um cientista é uma função (possivelmente parcial, não necessariamente computável) do tipo SEQ, $SEG \to \mathbb{N}$.

Os cientistas trabalham com texto!

Text et al.

1 E.g., um texto T para uma função é uma aplicação $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por $T[t]$ denotamos a sequência dos primeiros t elementos de T.

0	1	2	3	4	$\cdots$
$\langle 29.750, 1.0\rangle$	$\langle 7.125, 4.0\rangle$	$\langle 3.750, 8.0\rangle$	$\langle 2.625, 12.0\rangle$	$\langle 2.000, 16.0\rangle$	$\cdots$

2 $SEG = \{T[t] : T$ is a text for a function and $t \in \mathbb{N}\}$.

3 $SEQ = \{T[t] : T$ is a text for a set and $t \in \mathbb{N}\}$.

Definição (Cientista, Gold [Gol67])

Um cientista é uma função (possivelmente parcial, não necessariamente computável) do tipo $SEQ, SEG \to \mathbb{N}$.

Os cientistas trabalham com texto!

Text et al.

1. E.g., um texto T para uma função é uma aplicação $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por $T[t]$ denotamos a sequência dos primeiros t elementos de T.

0	1	2	3	4	$\cdots$
$\langle 29.750, 1.0\rangle$	$\langle 7.125, 4.0\rangle$	$\langle 3.750, 8.0\rangle$	$\langle 2.625, 12.0\rangle$	$\langle 2.000, 16.0\rangle$	$\cdots$

2. $SEG = \{T[t] : T$ is a text for a function and $t \in \mathbb{N}\}$.
3. $SEQ = \{T[t] : T$ is a text for a set and $t \in \mathbb{N}\}$.

Definição (Cientista, Gold [Gol67])

Um cientista é uma função (possivelmente parcial, não necessariamente computável) do tipo $SEQ, SEG \to \mathbb{N}$.

Os cientistas trabalham com texto!

Text et al.

1. E.g., um texto T para uma função é uma aplicação $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por $T[t]$ denotamos a sequência dos primeiros t elementos de T.

0	1	2	3	4	$\cdots$
$\langle 29.750, 1.0 \rangle$	$\langle 7.125, 4.0 \rangle$	$\langle 3.750, 8.0 \rangle$	$\langle 2.625, 12.0 \rangle$	$\langle 2.000, 16.0 \rangle$	$\cdots$

2. $SEG = \{T[t] : T$ is a text for a function and $t \in \mathbb{N}\}$.
3. $SEQ = \{T[t] : T$ is a text for a set and $t \in \mathbb{N}\}$.

Definição (Cientista, Gold [Gol67])

Um cientista é uma função (possivelmente parcial, não necessariamente computável) do tipo $SEQ, SEG \to \mathbb{N}$.

Sucesso para funções

Definição (Sucesso científico para uma função, Gold [Gol67])

Seja $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *uma função total. Dizemos que um cientista* $\mathcal{M}$ *identifica* ψ *se existir um* $e \in \mathbb{N}$ *e uma ordem* p *tal que, para* $t \geq p$*,* $\mathcal{M}(\psi[t]) = e$ e $\phi_e = \psi$.

Definição (Sucesso científico para uma coleção, Gold [Gol67])

Seja S *um conjunto de funções totais. Dizemos que um cientista* $\mathcal{M}$ *identifica* S *no caso de ele identificar todo o* $\psi \in S$.

Sucesso para funções

Definição (Sucesso científico para uma função, Gold [Gol67])

Seja $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função total. Dizemos que um cientista $\mathcal{M}$ identifica ψ se existir um $e \in \mathbb{N}$ e uma ordem p tal que, para $t \geq p$, $\mathcal{M}(\psi[t]) = e$ e $\phi_e = \psi$.

Definição (Sucesso científico para uma coleção, Gold [Gol67])

Seja S um conjunto de funções totais. Dizemos que um cientista $\mathcal{M}$ identifica S no caso de ele identificar todo o $\psi \in S$.

Sucesso para conjuntos

Definição [Convergência de um cientista, Gold in [Gol67]]

Um cientista $\mathcal{M}$ converge para a conjetura i no texto T se, para quase todos os valores de $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}(T[k]) = i$. Um cientista identifica um texto T se existir $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}$ converge para j em T, e $W_j = content(T)$ no caso de conjunto ou $\phi_j = content(T)$ no caso de função.

Definição [Convergência de um cientista, Gold in [Gol67]]

Um cientista $\mathcal{M}$ identifica um conjunto recursivamente enumerável L se $\mathcal{M}$ identifica todo o texto para L.

Definição [$TxtEx$, Gold in [Gol67]]

Dizemos que $\mathcal{M}$ $TxtEx$-identifica $\mathcal{L}$ se $\mathcal{M}$ é um cientista computável que identifica a coleção $\mathcal{L}$ de conjuntos recursivamente enumeráveis. (Seja $TxtEx = \{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$: existe um cientista computável $\mathcal{M}$ que $TxtEx$-identifica $\mathcal{L}\}$.)

Sucesso para conjuntos

Definição [Convergência de um cientista, Gold in [Gol67]]

Um cientista $\mathcal{M}$ converge para a conjetura i no texto T se, para quase todos os valores de $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}(T[k]) = i$. Um cientista identifica um texto T se existir $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}$ converge para j em T, e $W_j = content(T)$ no caso de conjunto ou $\phi_j = content(T)$ no caso de função.

Definição [Convergência de um cientista, Gold in [Gol67]]

Um cientista $\mathcal{M}$ identifica um conjunto recursivamente enumerável L se $\mathcal{M}$ identifica todo o texto para L.

Definição [$TxtEx$, Gold in [Gol67]]

Dizemos que $\mathcal{M}$ $TxtEx$-identifica $\mathcal{L}$ se $\mathcal{M}$ é um cientista computável que identifica a coleção $\mathcal{L}$ de conjuntos recursivamente enumeráveis. (Seja $TxtEx = \{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E} :$ existe um cientista computável $\mathcal{M}$ que $TxtEx$-identifica $\mathcal{L}\}$.)

Sucesso para conjuntos

Definição [Convergência de um cientista, Gold in [Gol67]]

Um cientista $\mathcal{M}$ converge para a conjetura i no texto T se, para quase todos os valores de $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}(T[k]) = i$. Um cientista identifica um texto T se existir $j \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{M}$ converge para j em T, e $W_j = content(T)$ no caso de conjunto ou $\phi_j = content(T)$ no caso de função.

Definição [Convergência de um cientista, Gold in [Gol67]]

Um cientista $\mathcal{M}$ identifica um conjunto recursivamente enumerável L se $\mathcal{M}$ identifica todo o texto para L.

Definição [$TxtEx$, Gold in [Gol67]]

Dizemos que $\mathcal{M}$ $TxtEx$-identifica $\mathcal{L}$ se $\mathcal{M}$ é um cientista computável que identifica a coleção $\mathcal{L}$ de conjuntos recursivamente enumeráveis. (Seja $TxtEx = \{\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$: existe um cientista computável $\mathcal{M}$ que $TxtEx$-identifica $\mathcal{L}\}$.)

Scientist Boyle: Predictive explanation **Explain**

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$ on
$\langle 29.750, 1.0 \rangle$ $\langle 7.125, 4.0 \rangle$ $\langle 3.750, 8.0 \rangle$ $\cdots$

CIENTISTA

Boyle

$\ldots$ e
A conjetura estabiliza

ϕ_e é uma instância da lei de Boyle

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $Volume[Pressure]$ conjetura uma instância da lei de Boyle para o gás original sob consideração.

Scientist Boyle: Predictive explanation **Ex**plain

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$ on

$\langle 29.750, 1.0\rangle$ $\langle 7.125, 4.0\rangle$ $\langle 3.750, 8.0\rangle$ $\cdots$

CIENTISTA

Boyle

$\ldots\ e$

A conjetura estabiliza

ϕ_e é uma instância da lei de Boyle

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $Volume[Pressure]$ conjetura uma instância da lei de Boyle para o gás original sob consideração.

Scientist Boyle: Predictive explanation **Ex**plain

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$ on
$\langle 29.750, 1.0\rangle\ \langle 7.125, 4.0\rangle\ \langle 3.750, 8.0\rangle \cdots$

CIENTISTA

Boyle

$\ldots\ e$
A conjetura estabiliza

ϕ_e é uma instância da lei de Boyle

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $Volume[Pressure]$ conjetura uma instância da lei de Boyle para o gás original sob consideração.

Scientist Boyle: Predictive explanation **Explain**

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$ on

$\langle 29.750, 1.0\rangle\ \langle 7.125, 4.0\rangle\ \langle 3.750, 8.0\rangle \cdots$

CIENTISTA

Boyle

$\ldots\ e$

A conjetura estabiliza

ϕ_e é uma instância da lei de Boyle

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $Volume[Pressure]$ conjetura uma instância da lei de Boyle para o gás original sob consideração.

Scientist Boyle: Predictive explanation **Explain**

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$ on
$\langle 29.750, 1.0\rangle\ \langle 7.125, 4.0\rangle\ \langle 3.750, 8.0\rangle \cdots$

$\boxed{\textbf{CIENTISTA Boyle}}$

$\ldots\ e$
A conjetura estabiliza

ϕ_e é uma instância da lei de Boyle

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $Volume[Pressure]$ conjetura uma instância da lei de Boyle para o gás original sob consideração.

Exemplo de identificação

$\mathcal{C}_0$

$\mathcal{C}_0$ é o subconjunto de $\mathcal{R}$ que contém a característica de $\mathbb{N}$ bem como as caraterísticas de todos os seus subconjuntos finitos.

Procedimento de identificação

Considere-se o seguinte cientista $\mathcal{M}$: Se todos os valores de ψ que ocorrem no *input*

$$\langle 0, \psi(0)\rangle\langle 1, \psi(1)\rangle \ldots \langle k-1, \psi(k-1)\rangle$$

são 1, então o cientista conjetura o código do programa $\lambda x.\ 1$; se, por outro lado, um ou mais valores de ψ são 0, então o cientista constrói a lista dos valores de ψ por ordem crescente (sem repetições) $\mu = i_1\# \ldots \# i_m\#$, com $m \leq k-1$, e conjetura o código do programa "case" trivial.

Exemplo de identificação

$\mathcal{C}_0$

$\mathcal{C}_0$ é o subconjunto de $\mathcal{R}$ que contém a característica de $\mathbb{N}$ bem como as caraterísticas de todos os seus subconjuntos finitos.

Procedimento de identificação

Considere-se o seguinte cientista $\mathcal{M}$: Se todos os valores de ψ que ocorrem no *input*

$$\langle 0, \psi(0)\rangle\langle 1, \psi(1)\rangle \ldots \langle k-1, \psi(k-1)\rangle$$

são 1, então o cientista conjetura o código do programa $\lambda x.\ 1$; se, por outro lado, um ou mais valores de ψ são 0, então o cientista constrói a lista dos valores de ψ por ordem crescente (sem repetições) $\mu = i_1\# \ldots \# i_m\#$, com $m \leq k-1$, e conjetura o código do programa "case" trivial.

Exemplo de identificação

Procedimento de identificação

Function $\chi(x : \mathbb{N}) : Boolean$;
Constant μ**: list of** $\mathbb{N}$;
Begin
    Case x **of**
        $x \in \mu :$ **Return** 1;
        $x \notin \mu :$ **Return** 0
    End
End

Exemplo de identificação

$\mathcal{R}$

O conjunto $\mathcal{R}$ é identificável por cientista não computável.

Procedimento de identificação para cientista não computável

Considere-se o seguinte cientista $\mathcal{M}$: Dado o *input* $\sigma \in SEG$, o cientista conjetura o mais pequeno código (programa) i, tal que (a) ϕ_i é total e (b) $content(\sigma) \subset \phi_i$. Para todo o texto T para uma função recursiva ψ, existe uma ordem p tal que, para todo o $n \geq p$, $\mathcal{M}$ conjetura sempre o mesmo índice i.

Exemplo de identificação

$\mathcal{R}$

O conjunto $\mathcal{R}$ é identificável por cientista não computável.

Procedimento de identificação para cientista não computável

Considere-se o seguinte cientista $\mathcal{M}$: Dado o *input* $\sigma \in SEG$, o cientista conjetura o mais pequeno código (programa) i, tal que (a) ϕ_i é total e (b) $content(\sigma) \subset \phi_i$. Para todo o texto T para uma função recursiva ψ, existe uma ordem p tal que, para todo o $n \geq p$, $\mathcal{M}$ conjetura sempre o mesmo índice i.

Teorema da Não União

Explain

$S \subseteq \mathcal{R}$

$\psi \in S$

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$

$\psi(0)\#\psi(1)\#\ldots\#\psi(p)\#\ldots$ $\rightsquigarrow$ **CIENTISTA** $\mathcal{M}$ $\rightsquigarrow$ $\ldots e_0 \ldots e_k \ldots e$

A conjetura estabiliza

$\phi_e = \psi$

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob o input $\psi[t]$ produz o código e de ψ, i.e., $\phi_e = \psi$.

Explain

$S \subseteq \mathcal{R}$

$\psi \in S$

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$

$\psi(0)\#\psi(1)\#\ldots\#\psi(p)\#\ldots$

CIENTISTA $\mathcal{M}$

$\ldots e_0 \ldots e_k \ldots e$

A conjetura estabiliza

$\phi_e = \psi$

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob o input $\psi[t]$ produz o código e de ψ, i.e., $\phi_e = \psi$.

Explain

$S \subseteq \mathcal{R}$

$\psi \in S$

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$

$\psi(0)\#\psi(1)\#\ldots\#\psi(p)\#\ldots$

CIENTISTA $\mathcal{M}$

$\ldots e_0 \ldots e_k \ldots e$

A conjetura estabiliza

$\phi_e = \psi$

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob o input $\psi[t]$ produz o código e de ψ, i.e., $\phi_e = \psi$.

Explain

$S \subseteq \mathcal{R}$

$\psi \in S$

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$

$\psi(0)\#\psi(1)\#\ldots\#\psi(p)\#\ldots$

CIENTISTA $\mathcal{M}$

$\ldots e_0 \ldots e_k \ldots e$

A conjetura estabiliza

$\phi_e = \psi$

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob o input $\psi[t]$ produz o código e de ψ, i.e., $\phi_e = \psi$.

Explain

$S \subseteq \mathcal{R}$

$\psi \in S$

Ex-identificação

Após a ordem $p \in \mathbb{N}$
$\psi(0)\#\psi(1)\#\ldots\#\psi(p)\#\ldots$

$\boxed{\textbf{CIENTISTA } \mathcal{M}}$

$\ldots e_0 \ldots e_k \ldots e$
A conjetura estabiliza

$\phi_e = \psi$

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob o input $\psi[t]$ produz o código e de ψ, i.e., $\phi_e = \psi$.

Teorema da não união dos Blums

Teorema [Blum e Blum [BB75]]

A classe Ex não é fechada para a união.

Proposição

$\mathcal{R} \notin Ex$.

Teorema da não união dos Blums

Teorema [Blum e Blum [BB75]]

A classe Ex não é fechada para a união.

Proposição

$\mathcal{R} \notin Ex$.

$AEZ \cup SD$ não é Ex-identificável

Exemplo [AEZ: funções ψ tais que $\overset{\infty}{\forall} n(\psi(n) = 0)$]

Sob *input* $\psi(0) \ldots \psi(t-1)$, o cientista constrói a lista μ de valores não nulos $(i, \psi(i))$ e conjetura o programa

$$\textbf{If } x \in dom(\widehat{\mu}) \textbf{ Then } \widehat{\mu}(x) \textbf{ Else } 0$$

Exemplo [SD: funções auto-descritíveis]

Sob *input* $\psi(0) \ldots \psi(t-1)$ o cientista conjetura $\psi(0)$.

$AEZ \cup SD$ não é Ex-identificável

Exemplo [AEZ: funções ψ tais que $\overset{\infty}{\forall} n(\psi(n) = 0)$]

Sob *input* $\psi(0) \ldots \psi(t-1)$, o cientista constrói a lista μ de valores não nulos $(i, \psi(i))$ e conjetura o programa

$$\textbf{If } x \in dom(\widehat{\mu}) \textbf{ Then } \widehat{\mu}(x) \textbf{ Else } 0$$

Exemplo [SD: funções auto-descritíveis]

Sob *input* $\psi(0) \ldots \psi(t-1)$ o cientista conjetura $\psi(0)$.

$AEZ \cup SD$ não é Ex-identificável

Exemplo [AEZ: funções ψ tais que $\overset{\infty}{\forall} n(\psi(n) = 0)$]

Sob *input* $\psi(0) \ldots \psi(t-1)$, o cientista constrói a lista μ de valores não nulos $(i, \psi(i))$ e conjetura o programa

$$\textbf{If } x \in dom(\widehat{\mu}) \textbf{ Then } \widehat{\mu}(x) \textbf{ Else } 0$$

Exemplo [SD: funções auto-descritíveis]

Sob *input* $\psi(0) \ldots \psi(t-1)$ o cientista conjetura $\psi(0)$.

Cientista XXI

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

A

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

E

EU EXPLICO FACTOS E

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

F

EU EXPLICO FACTOS F

EU EXPLICO FACTOS A, TUDO O QUE PODE SER EXPLICADO

Cientista XXI

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

A

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

E

eu explico factos E

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

F

eu explico factos F

eu explico factos A, tudo o que pode ser explicado

Cientista XXI

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

A

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

E

EU EXPLICO FACTOS E

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

F

EU EXPLICO FACTOS F

EU EXPLICO FACTOS A, TUDO O QUE PODE SER EXPLICADO

Cientista XXI

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

A

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

E

eu explico factos E

$TxtEx$-, Ex-identificação

CIENTISTA

F

eu explico factos F

eu explico factos A, tudo o que pode ser explicado

$\mathcal{R} \notin Ex$

Teorema [Blum e Blum [BB75]]

Conjunto das funções primitivas recursivas $\in Ex$

Teorema [Blum e Blum [BB75]]

Conjunto das funções recursivas $\notin Ex$

$\mathcal{R} \notin Ex$

Teorema [Blum e Blum [BB75]]

Conjunto das funções primitivas recursivas $\in Ex$

Teorema [Blum e Blum [BB75]]

Conjunto das funções recursivas $\notin Ex$

$\mathcal{R} \notin Ex$

Teorema [Blum e Blum [BB75]]

Conjunto das funções primitivas recursivas $\in Ex$

Teorema [Blum e Blum [BB75]]

Conjunto das funções recursivas $\notin Ex$

Hierarquia dos Cientistas

EXplain

Definição [n-variante]

Dizemos que $\xi \in \mathcal{PR}$ é uma n-variante da função $f \in \mathcal{R}$, se ξ coincide com f exceto num número finito de pontos que não excede n (escrevemos $f =^n \xi$).

Definição [$\star$-variante]

Dizemos que $\xi \in \mathcal{PR}$ é uma $\star$-variante da função $f \in \mathcal{R}$, se ξ coincide com f exceto num número finito de pontos (escrevemos $f =^\star \xi$).

EXplain

Definição [n-variante]

Dizemos que $\xi \in \mathcal{PR}$ é uma n-variante da função $f \in \mathcal{R}$, se ξ coincide com f exceto num número finito de pontos que não excede n (escrevemos $f =^n \xi$).

Definição [$\star$-variante]

Dizemos que $\xi \in \mathcal{PR}$ é uma $\star$-variante da função $f \in \mathcal{R}$, se ξ coincide com f exceto num número finito de pontos (escrevemos $f =^\star \xi$).

EXplain

Definição [Ex^n-identificação, Case e Smith [CS78, CS83]]

Um cientista computável Ex^n-identifica uma função $\psi \in \mathcal{R}$, se existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $k \geq p$, $\mathcal{M}$ sob input $\psi[k]$ conjetura o mesmo código de uma função n-variante de ψ. Diz-se que o cientista $\mathcal{M}$ Ex^n-identifica $S \in \mathcal{R}$ se Ex^n-identifica toda a função $\psi \in S$.

Definição [$Ex^\star$-identificação Blum e Blum [BB75]]

....

Definição [Ex, Ex^n, e $Ex^\star$]

Ex, Ex^n, e $Ex^\star$, são as correspondentes classes de conjuntos Ex-,Ex^n-, ou $Ex^\star$-identificáveis por cientistas computáveis.

EXplain

Definição [Ex^n-identificação, Case e Smith [CS78, CS83]]

Um cientista computável Ex^n-identifica uma função $\psi \in \mathcal{R}$, se existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $k \geq p$, $\mathcal{M}$ sob input $\psi[k]$ conjetura o mesmo código de uma função n-variante de ψ. Diz-se que o cientista $\mathcal{M}$ Ex^n-identifica $S \in \mathcal{R}$ se Ex^n-identifica toda a função $\psi \in S$.

Definição [$Ex^\star$-identificação Blum e Blum [BB75]]

....

Definição [Ex, Ex^n, e $Ex^\star$]

Ex, Ex^n, e $Ex^\star$, são as correspondentes classes de conjuntos Ex-,Ex^n-, ou $Ex^\star$-identificáveis por cientistas computáveis.

EXplain

Definição [Ex^n-identificação, Case e Smith [CS78, CS83]]

Um cientista computável Ex^n-identifica uma função $\psi \in \mathcal{R}$, se existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $k \geq p$, $\mathcal{M}$ sob input $\psi[k]$ conjetura o mesmo código de uma função n-variante de ψ. Diz-se que o cientista $\mathcal{M}$ Ex^n-identifica $S \in \mathcal{R}$ se Ex^n-identifica toda a função $\psi \in S$.

Definição [$Ex^\star$-identificação Blum e Blum [BB75]]

....

Definição [Ex, Ex^n, e $Ex^\star$]

Ex, Ex^n, e $Ex^\star$, são as correspondentes classes de conjuntos Ex-,Ex^n-, ou $Ex^\star$-identificáveis por cientistas computáveis.

Ex^nplain

$S \subseteq \mathcal{R}$

$\psi \in S$

Ex^n-identificação

Após $p \in \mathbb{N}$

$\psi(0)\#\psi(1)\#\ldots\#\psi(p)\#\ldots$

CIENTISTA $\mathcal{M}$

$\ldots e_0 \ldots e_k \ldots e$

A conjetura estabiliza

$\phi_e =^n \psi$

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $\psi[t]$ conjetura o código e de uma n-variante de ψ, i.e., $\phi_e =^n \psi$.

Ex^nplain

$S \subseteq \mathcal{R}$

$\psi \in S$

Ex^n-identificação

Após $p \in \mathbb{N}$

$\psi(0)\#\psi(1)\#\ldots\#\psi(p)\#\ldots$

CIENTISTA $\mathcal{M}$

$\ldots e_0 \ldots e_k \ldots e$

A conjetura estabiliza

$\phi_e =^n \psi$

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $\psi[t]$ conjetura o código e de uma n-variante de ψ, i.e., $\phi_e =^n \psi$.

Ex^nplain

$S \subseteq \mathcal{R}$

$\psi \in S$

Ex^n-identificação

Após $p \in \mathbb{N}$

$\psi(0)\#\psi(1)\#\ldots\#\psi(p)\#\ldots$

CIENTISTA $\mathcal{M}$

$\ldots e_0 \ldots e_k \ldots e$

A conjetura estabiliza

$\phi_e =^n \psi$

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $\psi[t]$ conjetura o código e de uma n-variante de ψ, i.e., $\phi_e =^n \psi$.

Ex^nplain

$S \subseteq \mathcal{R}$

$\psi \in S$

Ex^n-identificação

Após $p \in \mathbb{N}$

$\psi(0)\#\psi(1)\#\ldots\#\psi(p)\#\ldots$

CIENTISTA $\mathcal{M}$

$\ldots e_0 \ldots e_k \ldots e$

A conjetura estabiliza

$\phi_e =^n \psi$

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $\psi[t]$ conjetura o código e de uma n-variante de ψ, i.e., $\phi_e =^n \psi$.

Ex^nplain

$S \subseteq \mathcal{R}$

$\psi \in S$

Ex^n-identificação

Após $p \in \mathbb{N}$

$\psi(0)\#\psi(1)\#\ldots\#\psi(p)\#\ldots$

CIENTISTA $\mathcal{M}$

$\ldots e_0 \ldots e_k \ldots e$

A conjetura estabiliza

$\phi_e =^n \psi$

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $\psi[t]$ conjetura o código e de uma n-variante de ψ, i.e., $\phi_e =^n \psi$.

Ex^nplain

$S \subseteq \mathcal{R}$

$\psi \in S$

Ex^n-identificação

Após $p \in \mathbb{N}$

$\psi(0)\#\psi(1)\#\ldots\#\psi(p)\#\ldots$

$\boxed{\textbf{CIENTISTA } \mathcal{M}}$

$\ldots e_0 \ldots e_k \ldots e$

A conjetura estabiliza

$\phi_e =^n \psi$

Figura: Para todo o $t \geq p$, o cientista $\mathcal{M}$ sob *input* $\psi[t]$ conjetura o código e de uma n-variante de ψ, i.e., $\phi_e =^n \psi$.

$Ex^{n+1} - Ex^n \neq \emptyset$

Definição [ASD^n e $ASD^\star$]

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, ASD^n é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que $\psi(0)$ é um índice n-variante de ψ, i.e. $\phi_{\psi(0)} =^n \psi$. $ASD^\star$ é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que $\psi(0)$ é o índice de uma $\star$-variante de ψ, i.e. $\phi_{\psi(0)} =^\star \psi$.

A classe ASD^0 coincide com a classe SD.

Teorema [Case e Smith [CS78, CS83]]

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $ASD^{n+1} \in (Ex^{n+1} - Ex^n)$.

$Ex^{n+1} - Ex^n \neq \emptyset$

Definição [ASD^n e $ASD^\star$]

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, ASD^n é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que $\psi(0)$ é um índice n-variante de ψ, i.e. $\phi_{\psi(0)} =^n \psi$. $ASD^\star$ é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que $\psi(0)$ é o índice de uma $\star$-variante de ψ, i.e. $\phi_{\psi(0)} =^\star \psi$.

A classe ASD^0 coincide com a classe SD.

Teorema [Case e Smith [CS78, CS83]]

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $ASD^{n+1} \in (Ex^{n+1} - Ex^n)$.

$Ex^\star - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Ex^n \neq \emptyset$

Teorema [Case and Smith [CS78]]

$ASD^\star \in (Ex^\star - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Ex^n)$.

Hierarquia Não Colapsante

Teorema

$Ex^0 \subset Ex^1 \subset Ex^2 \subset \cdots \subset Ex^n \subset \cdots \subset Ex^\star$.

Bc-identification

Definição [Bc-identificação, Bārzdiņš [B$\bar{7}$4a], Case e Smith [CS78]]

Um cientista computável $\mathcal{M}$ Bc-identifica $\psi \in \mathcal{R}$ se existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$, $\phi_{\mathcal{M}(\psi[n])} = \psi$. Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ Bc-identifica $S \subseteq \mathcal{R}$ se, para todo o $\psi \in S$, $\mathcal{M}$ Bc-identifica ψ.

Definição [Bc^n-indentificação]

Um cientista computável $\mathcal{M}$ Bc^n-identifica a função $\psi \in \mathcal{R}$ se existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $t \geq p$, $\phi_{\mathcal{M}(\psi[t])}$ é o código de uma função ξ n-variante de ψ.

Definição [$Bc^\star$–identificação, Case e Smith [CS78, CS83]]

....

Bc-identification

Definição [Bc-identificação, Bārzdiņš [B74a], Case e Smith [CS78]]

Um cientista computável $\mathcal{M}$ Bc-identifica $\psi \in \mathcal{R}$ se existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$, $\phi_{\mathcal{M}(\psi[n])} = \psi$. Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ Bc-identifica $S \subseteq \mathcal{R}$ se, para todo o $\psi \in S$, $\mathcal{M}$ Bc-identifica ψ.

Definição [Bc^n-indentificação]

Um cientista computável $\mathcal{M}$ Bc^n-identifica a função $\psi \in \mathcal{R}$ se existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $t \geq p$, $\phi_{\mathcal{M}(\psi[t])}$ é o código de uma função ξ n-variante de ψ.

Definição [$Bc^\star$–identificação, Case e Smith [CS78, CS83]]

....

Bc-identification

Definição [Bc-identificação, Bārzdiņš [B$\bar{7}$4a], Case e Smith [CS78]]

Um cientista computável $\mathcal{M}$ Bc-identifica $\psi \in \mathcal{R}$ se existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $n \geq p$, $\phi_{\mathcal{M}(\psi[n])} = \psi$. Dizemos que o cientista $\mathcal{M}$ Bc-identifica $S \subseteq \mathcal{R}$ se, para todo o $\psi \in S$, $\mathcal{M}$ Bc-identifica ψ.

Definição [Bc^n-indentificação]

Um cientista computável $\mathcal{M}$ Bc^n-identifica a função $\psi \in \mathcal{R}$ se existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que, para todo o $t \geq p$, $\phi_{\mathcal{M}(\psi[t])}$ é o código de uma função ξ n-variante de ψ.

Definição [$Bc^\star$–identificação, Case e Smith [CS78, CS83]]

....

Bc-identificação

Teorema

$Ex^\star \subseteq Bc$.

$\boxed{\mathcal{M} \text{ conjetura o código do programa}}$:

Function $\chi(x : \mathbb{N}) : boolean$;
Const μ : **list of** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$**;** $e : \mathbb{N}$;
Begin
  Case x of
    $x \in dom(\widehat{\mu})$: **Return** $\widehat{\mu}(x)$;
    $x \notin dom(\widehat{\mu})$: **Return** $\{e\}(x)$
  End;
End

Bc-identificação

Teorema

$Ex^\star \subseteq Bc$.

$\boxed{\mathcal{M} \text{ conjetura o código do programa}}$:

Function $\chi(x:\mathbb{N}) : boolean$;
Const μ : **list of** $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $e:\mathbb{N}$;
Begin
  Case x of
    $x \in dom(\widehat{\mu})$: **Return** $\widehat{\mu}(x)$;
    $x \notin dom(\widehat{\mu})$: **Return** $\{e\}(x)$
  End;
End

Bc-identificação

Teorema

$Ex^\star \subseteq Bc$.

$\boxed{\mathcal{M} \text{ CONJETURA O CÓDIGO DO PROGRAMA}}$:

Function $\chi(x : \mathbb{N}) : boolean$;
Const μ : **list of** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$**;** $e : \mathbb{N}$;
Begin
  Case x of
    $x \in dom(\widehat{\mu})$: **Return** $\widehat{\mu}(x)$;
    $x \notin dom(\widehat{\mu})$: **Return** $\{e\}(x)$
  End;
End

$Bc - Ex^\star \neq \emptyset$

Teorema

$Bc - Ex^\star \neq \emptyset$.

Teorema

$\mathcal{R} \notin Ex^\star$.

$Bc - Ex^\star \neq \emptyset$

Teorema

$Bc - Ex^\star \neq \emptyset$.

Teorema

$\mathcal{R} \notin Ex^\star$.

$\mathcal{S}^n$

Definição

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}^n$ é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que, para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\psi(i)$ é o índice de uma n-variante de ψ, i.e., para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\phi_{\psi(i)} =^n \psi$. $\mathcal{S}^\star$ é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que, para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\psi(i)$ é um índice de uma $\star$-variante de ψ, i.e., para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\phi_{\psi(i)} =^\star \psi$.

Teorema [Case e Smith [CS78]]

For each $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}^{n+1} \in (Bc^{n+1} - Bc^n)$.

Teorema [Case e Smith [CS78]]

$\mathcal{S}^\star \in (Bc^\star - \cup_{n\in\mathbb{N}} Bc^n)$.

$\mathcal{S}^n$

Definição

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}^n$ é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que, para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\psi(i)$ é o índice de uma n-variante de ψ, i.e., para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\phi_{\psi(i)} =^n \psi$. $\mathcal{S}^\star$ é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que, para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\psi(i)$ é um índice de uma $\star$-variante de ψ, i.e., para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\phi_{\psi(i)} =^\star \psi$.

Teorema [Case e Smith [CS78]]

For each $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}^{n+1} \in (Bc^{n+1} - Bc^n)$.

Teorema [Case e Smith [CS78]]

$\mathcal{S}^\star \in (Bc^\star - \cup_{n\in\mathbb{N}} Bc^n)$.

$\mathcal{S}^n$

Definição

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}^n$ é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que, para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\psi(i)$ é o índice de uma n-variante de ψ, i.e., para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\phi_{\psi(i)} =^n \psi$. $\mathcal{S}^\star$ é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que, para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\psi(i)$ é um índice de uma $\star$-variante de ψ, i.e., para todo o $i \in \mathbb{N}$, $\phi_{\psi(i)} =^\star \psi$.

Teorema [Case e Smith [CS78]]

For each $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}^{n+1} \in (Bc^{n+1} - Bc^n)$.

Teorema [Case e Smith [CS78]]

$\mathcal{S}^\star \in (Bc^\star - \cup_{n \in \mathbb{N}} Bc^n)$.

$\mathcal{R} \in Bc^\star$

Teorema [Leo Harrington [CS83], Jain et al. [JORS99]]

$\mathcal{R} \in Bc^\star$.

$\mathcal{R} \in Bc^\star$

Teorema [Leo Harrington [CS83], Jain et al. [JORS99]]

$\mathcal{R} \in Bc^\star$.

Hierarquia não colapsante

A hierarquia, [Case e Smith [CS83], Harrington [CS83]]

$$\mathcal{R} \not\subseteq Ex = Ex^0 \subset \cdots \subset Ex^n \subset \cdots \subset Ex^\star \subset Bc \not\ni \mathcal{R}$$

$$\mathcal{R} \not\subseteq Bc = Bc^0 \subset \cdots \subset Bc^n \subset \cdots \subset Bc^\star \ni \mathcal{R}$$

Hierarquia não colapsante

A hierarquia, [Case e Smith [CS83], Harrington [CS83]]

$$\mathcal{R} \notin Ex = Ex^0 \subset \cdots \subset Ex^n \subset \cdots \subset Ex^\star \subset Bc \not\ni \mathcal{R}$$

$$\mathcal{R} \notin Bc = Bc^0 \subset \cdots \subset Bc^n \subset \cdots \subset Bc^\star \ni \mathcal{R}$$

Hierarquia não colapsante

A hierarquia, [Case e Smith [CS83], Harrington [CS83]]

$$\mathcal{R} \notin Ex = Ex^0 \subset \cdots \subset Ex^n \subset \cdots \subset Ex^\star \subset Bc \not\ni \mathcal{R}$$

$$\mathcal{R} \notin Bc = Bc^0 \subset \cdots \subset Bc^n \subset \cdots \subset Bc^\star \ni \mathcal{R}$$

Hierarquia não colapsante

A hierarquia, [Case e Smith [CS83], Harrington [CS83]]

$$\mathcal{R} \notin Ex = Ex^0 \subset \cdots \subset Ex^n \subset \cdots \subset Ex^\star \subset Bc \not\ni \mathcal{R}$$

$$\mathcal{R} \notin Bc = Bc^0 \subset \cdots \subset Bc^n \subset \cdots \subset Bc^\star \ni \mathcal{R}$$

Hierarquia não colapsante

A hierarquia, [Case e Smith [CS83], Harrington [CS83]]

$$\mathcal{R} \notin Ex = Ex^0 \subset \cdots \subset Ex^n \subset \cdots \subset Ex^\star \subset Bc \not\ni \mathcal{R}$$

$$\mathcal{R} \notin Bc = Bc^0 \subset \cdots \subset Bc^n \subset \cdots \subset Bc^\star \ni \mathcal{R}$$

Hierarquia não colapsante

A hierarquia, [Case e Smith [CS83], Harrington [CS83]]

$$\mathcal{R} \notin Ex = Ex^0 \subset \cdots \subset Ex^n \subset \cdots \subset Ex^\star \subset Bc \not\ni \mathcal{R}$$

$$\mathcal{R} \notin Bc = Bc^0 \subset \cdots \subset Bc^n \subset \cdots \subset Bc^\star \ni \mathcal{R}$$

Hierarquia não colapsante

A hierarquia, [Case e Smith [CS83], Harrington [CS83]]

$$\mathcal{R} \notin Ex = Ex^0 \subset \cdots \subset Ex^n \subset \cdots \subset Ex^\star \subset Bc \not\ni \mathcal{R}$$

$$\mathcal{R} \notin Bc = Bc^0 \subset \cdots \subset Bc^n \subset \cdots \subset Bc^\star \ni \mathcal{R}$$

Cientistas Conformes

Cientista conforme

Definição [Cientistas conformes, Bārzdiņš [B$\bar{7}$4b], Blums [BB75]]

Um cientista $\mathcal{M}$ diz-se *conforme* se, para toda a função $f \in \mathcal{R}$ Ex-identificada, para todo o $\sigma \subset f$, a conjetura $\mathcal{M}(\sigma)$ é tal que $content(\phi_{\mathcal{M}(\sigma)}[|\sigma|]) \subseteq content(\sigma)$.

Teorema

$Conf \subseteq Ex$.

Cientista conforme

Definição [Cientistas conformes, Bārzdiņš [B$\bar{7}$4b], Blums [BB75]]

Um cientista $\mathcal{M}$ diz-se *conforme* se, para toda a função $f \in \mathcal{R}$ Ex-identificada, para todo o $\sigma \subset f$, a conjetura $\mathcal{M}(\sigma)$ é tal que $content(\phi_{\mathcal{M}(\sigma)}[|\sigma|]) \subseteq content(\sigma)$.

Teorema

$Conf \subseteq Ex$.

Cientista conforme

Definição

$\mathcal{F}_R = \{f \in \mathcal{R} : \rho(f)$ é finito e $\phi_{\max(\rho(f))} = f\}$.

Teorema

$\mathcal{F}_R \in Ex$.

Teorema [Wiehagen PhD thesis]

$Conf \subset Ex$.

Cientista conforme

Definição

$\mathcal{F}_R = \{f \in \mathcal{R} : \rho(f)$ é finito e $\phi_{\max(\rho(f))} = f\}$.

Teorema

$\mathcal{F}_R \in Ex$.

Teorema [Wiehagen PhD thesis]

$Conf \subset Ex$.

Cientista conforme

Definição

$\mathcal{F}_R = \{f \in \mathcal{R} : \rho(f)$ é finito e $\phi_{\max(\rho(f))} = f\}$.

Teorema

$\mathcal{F}_R \in Ex$.

Teorema [Wiehagen PhD thesis]

$Conf \subset Ex$.

Princípio da Refutabilidade de Popper

Refutabilidade

Popper determina em [Pop35]:

Os enunciados básicos, consequentemente, devem satisfazer as seguintes condições: (a) De um enunciado universal, desacompanhado de condições iniciais, não se pode deduzir um enunciado básico. Por outro lado, (b) pode haver contradição recíproca entre um enunciado universal e um enunciado básico. A condição (b) somente estará satisfeita se for possível deduzir a negação de um enunciado básico da teoria que ele contradiz. Dessa condição, e da condição (a), segue-se que um enunciado básico deve ter uma forma lógica tal que a sua negação não possa, por seu turno, constituir-se como enunciado básico.

Refutabilidade

Popper determina em [Pop35]:

Os enunciados básicos, consequentemente, devem satisfazer as seguintes condições: (a) De um enunciado universal, desacompanhado de condições iniciais, não se pode deduzir um enunciado básico. Por outro lado, (b) pode haver contradição recíproca entre um enunciado universal e um enunciado básico. A condição (b) somente estará satisfeita se for possível deduzir a negação de um enunciado básico da teoria que ele contradiz. Dessa condição, e da condição (a), segue-se que um enunciado básico deve ter uma forma lógica tal que a sua negação não possa, por seu turno, constituir-se como enunciado básico.

Refutabilidade

Popper determina em [Pop35]:

Os enunciados básicos, consequentemente, devem satisfazer as seguintes condições: (a) De um enunciado universal, desacompanhado de condições iniciais, não se pode deduzir um enunciado básico. Por outro lado, (b) pode haver contradição recíproca entre um enunciado universal e um enunciado básico. A condição (b) somente estará satisfeita se for possível deduzir a negação de um enunciado básico da teoria que ele contradiz. Dessa condição, e da condição (a), segue-se que um enunciado básico deve ter uma forma lógica tal que a sua negação não possa, por seu turno, constituir-se como enunciado básico.

Refutabilidade

Popper determina em [Pop35]:

Os enunciados básicos, consequentemente, devem satisfazer as seguintes condições: (a) De um enunciado universal, desacompanhado de condições iniciais, não se pode deduzir um enunciado básico. Por outro lado, (b) pode haver contradição recíproca entre um enunciado universal e um enunciado básico. A condição (b) somente estará satisfeita se for possível deduzir a negação de um enunciado básico da teoria que ele contradiz. Dessa condição, e da condição (a), segue-se que um enunciado básico deve ter uma forma lógica tal que a sua negação não possa, por seu turno, constituir-se como enunciado básico.

Refutabilidade

Popper determina em [Pop35]:

Os enunciados básicos, consequentemente, devem satisfazer as seguintes condições: (a) De um enunciado universal, desacompanhado de condições iniciais, não se pode deduzir um enunciado básico. Por outro lado, (b) pode haver contradição recíproca entre um enunciado universal e um enunciado básico. A condição (b) somente estará satisfeita se for possível deduzir a negação de um enunciado básico da teoria que ele contradiz. Dessa condição, e da condição (a), segue-se que um enunciado básico deve ter uma forma lógica tal que a sua negação não possa, por seu turno, constituir-se como enunciado básico.

Princípio da refutação de Popper

Popper's refutability principle, Case and Smith [CS78, CS83]

A teoria subjacente ao cientista $\mathcal{M}$ pode não ser refutável (!) uma vez que

1. Não é sabido se a instância ϕ_e está indefinida para y;
2. O programa $\{e\}$, dado o *input* y, não pára, i.e. o experimentalista não pode apetrechar o aparato experimental para refutar a "teoria $\mathcal{M}$ para y", dado o enunciado básico $\phi_e(y) \neq \psi(y)$, onde $\phi_e(y)$ é a predição e $\psi(y)$ é a observação, uma vez que não é sabido se $\{e\}(y)$ pára ou não e, consequentemente, produz uma predição refutável pela observação.

Princípio da refutação de Popper

Popper's refutability principle, Case and Smith [CS78, CS83]

A teoria subjacente ao cientista $\mathcal{M}$ pode não ser refutável (!) uma vez que

1. Não é sabido se a instância ϕ_e está indefinida para y;
2. O programa $\{e\}$, dado o *input* y, não pára, i.e. o experimentalista não pode apetrechar o aparato experimental para refutar a "teoria $\mathcal{M}$ para y", dado o enunciado básico $\phi_e(y) \neq \psi(y)$, onde $\phi_e(y)$ é a predição e $\psi(y)$ é a observação, uma vez que não é sabido se $\{e\}(y)$ pára ou não e, consequentemente, produz uma predição refutável pela observação.

Princípio da refutação de Popper

Popper's refutability principle, Case and Smith [CS78, CS83]

A teoria subjacente ao cientista $\mathcal{M}$ pode não ser refutável (!) uma vez que

1. Não é sabido se a instância ϕ_e está indefinida para y;
2. O programa $\{e\}$, dado o *input* y, não pára, i.e. o experimentalista não pode apetrechar o aparato experimental para refutar a "teoria $\mathcal{M}$ para y", dado o enunciado básico $\phi_e(y) \neq \psi(y)$, onde $\phi_e(y)$ é a predição e $\psi(y)$ é a observação, uma vez que não é sabido se $\{e\}(y)$ pára ou não e, consequentemente, produz uma predição refutável pela observação.

Ex^1

Definição [ASD^1]

ASD^1 é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que $\psi(0)$ é um índice de uma 1-variante de ψ, i.e. $\phi_{\psi(0)} =^1 \psi$.

Teorema [Case e Smith [CS78, CS83]]

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $ASD^1 \in (Ex^1 - Ex)$.

Ex^1

Definição [ASD^1]

ASD^1 é o conjunto de todas as funções $\psi \in \mathcal{R}$ tais que $\psi(0)$ é um índice de uma 1-variante de ψ, i.e. $\phi_{\psi(0)} =^1 \psi$.

Teorema [Case e Smith [CS78, CS83]]

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $ASD^1 \in (Ex^1 - Ex)$.

O conto dos dois cientistas

Teorema

Existe um par de cientistas $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ tais que $\psi \in ASD^1$ é Ex-identificável por $\mathcal{M}_1$ ou por$\mathcal{M}_2$.

O conto dos dois cientistas

Demonstração

$\mathcal{M}_1$ é um cientista que conjetura $\psi(0)$, conjetura que é "Ex-incorreta" para todas as funções que diferem de $\phi_{\psi(0)}$ num único ponto. $\mathcal{M}_2$ procede do seguinte modo: dado como *input* $\psi[k] = \langle 0, \psi(0)\rangle\langle 1, \psi(1)\rangle \ldots \langle k-1, \psi(k-1)\rangle$, executa em paralelo o programa $\{\psi(0)\}$ em k *inputs* 0, ..., $k-1$. Assim que a simulação pára em $k-1$ desses *inputs*, deixando por terminar a simulação no ponto i, $0 \leq i \leq k$, o cientista $\mathcal{M}_2$ conjetura o código do programa:

$\boxed{\mathcal{M}_2 \text{ CONJETURA}}$:

If $x = i$, **Then Output** $\psi(i)$, **Else Output** $\{\psi(0)\}(x)$.

O cientista $\mathcal{M}_2$ será "Ex-incorreto" para funções que não têm anomalias, pois, neste caso, pode não convergir, i.e., pode mudar de ideias infinitas vezes.

Bibliography I

Janis Bārzdiņš.
Inductive inference of automata, functions and programs.
In *International Mathematical Congress, Vancouver*, volume II, pages 455–560. Latvian State University, 1974.

Janis Bārzdiņš.
Two theorems on the limiting synthesis of functions.
In *Theory of Algorithms and Programs*, volume I, pages 82–88. Latvian State University, 1974.

Lenore Blum and Manuel Blum.
Toward a mathematical theory of inductive inference.
Information and Control, 28:125–155, 1975.

Bibliography II

John Case and Carl Smith.
Anomaly hierarchies of mechanized inductive inference.
In Richard J. Lipton, Walter A. Burkhard, Walter J. Savitch, Emily P. Friedman, and Alfred V. Aho, editors, *Proceedings of the 10th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, May 1-3, 1978*, pages 314–319. ACM, San Diego, California, USA, 1978.

John Case and Carl Smith.
Comparison of identification criteria for machine inductive inference.
Theoretical Computer Science, 25(2):193–220, 1983.

E. M. Gold.
Language identification in the limit.
Information and Control, 10:447–474, 1967.

Bibliography III

Sanjay Jain, Daniel N. Osherson, James S. Royer, and Arun Sharma.
Systems That Learn. An Introduction to Learning Theory.
The MIT Press, second edition, 1999.

Pat Langley, Herbert A. Simon, Gary L. Bradshaw, and Jan M. Zytkow.
Scientific Discovery, Computational Explorations of the Creative Processes.
The MIT Press, first edition, 1987.

Karl R. Popper.
The Logic of Scientific Discovery.
Routledge, 1935.
First English edition published in 1959 by Hutchinson & Co.
First published by Routledge in 1992.