O GPS e a Teoria da Relatividade

José Natário

(Instituto Superior Técnico)

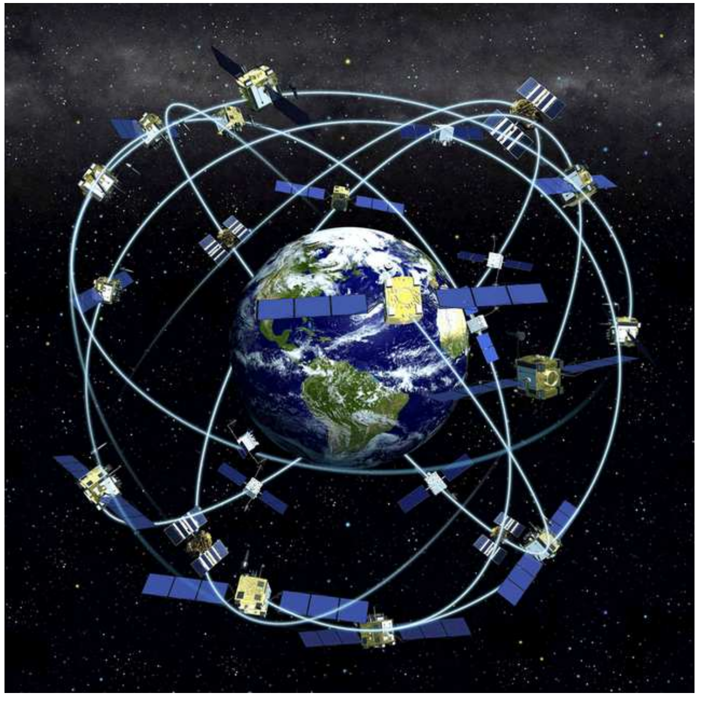
Lisboa, Fevereiro de 2015

`http://www.math.ist.utl.pt/~jnatar/lectures/GPS.pdf`

GPS

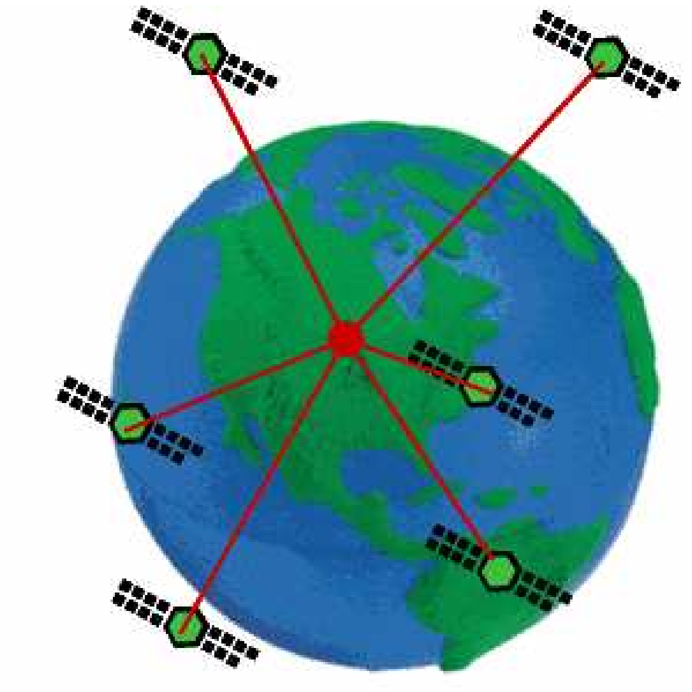
Como funciona um receptor de GPS?

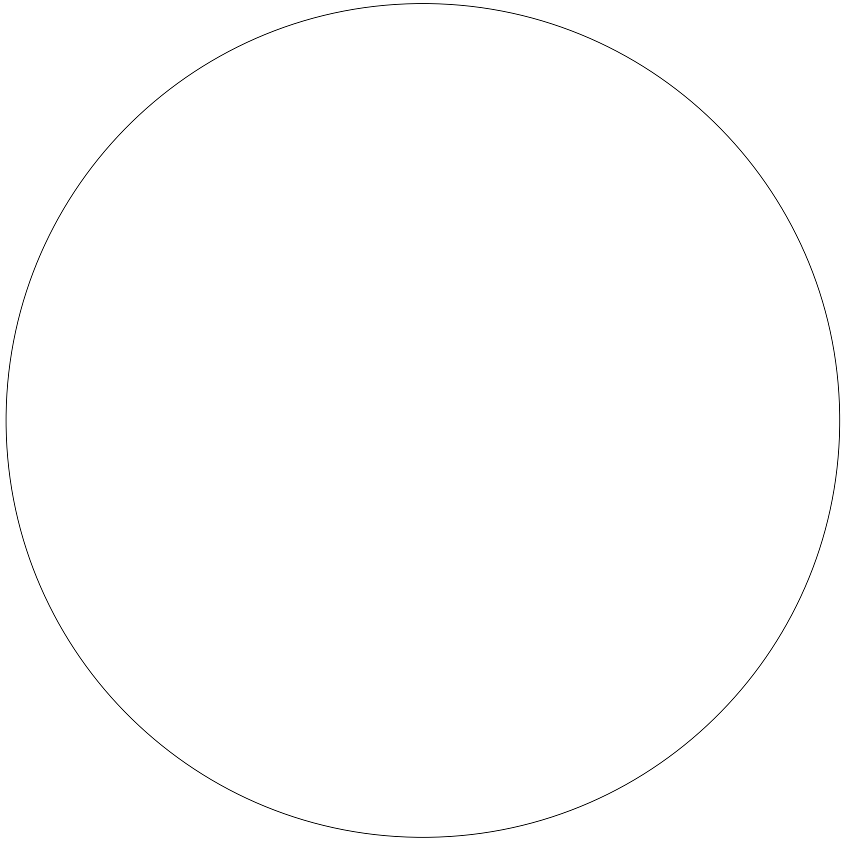
Baseado numa constelação de satélites em órbita.

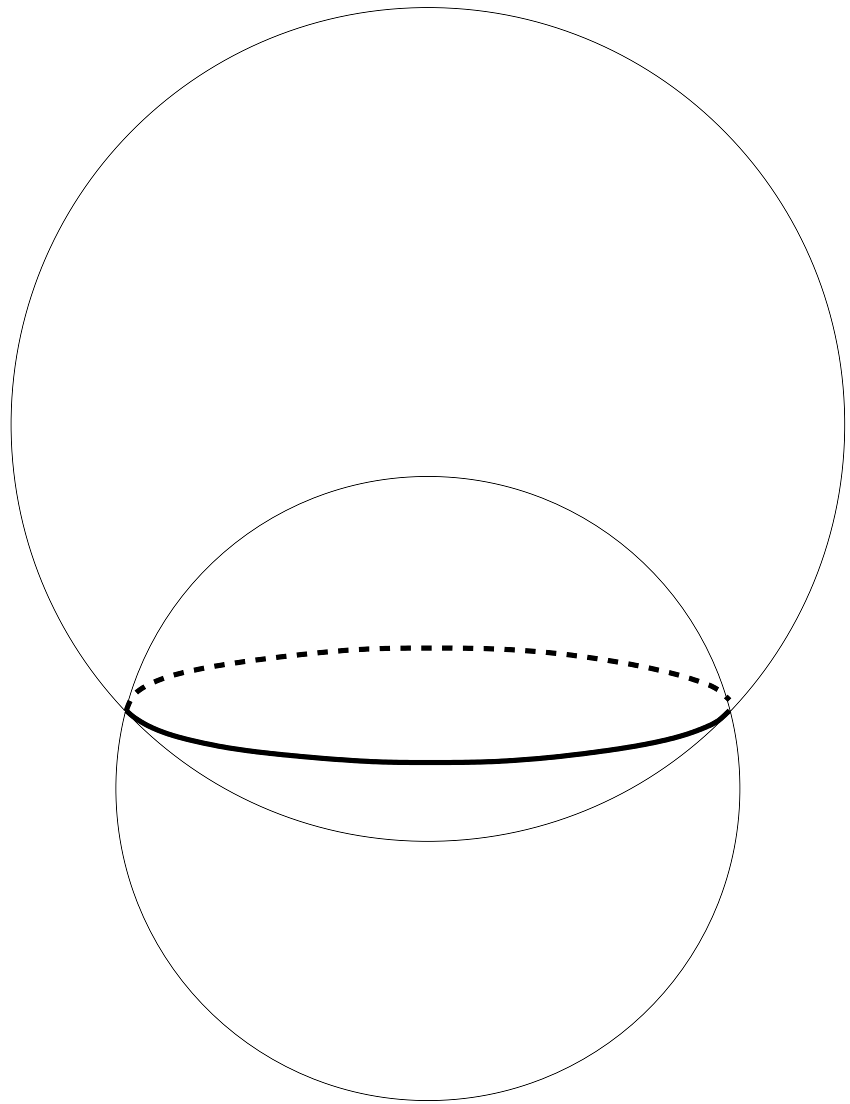


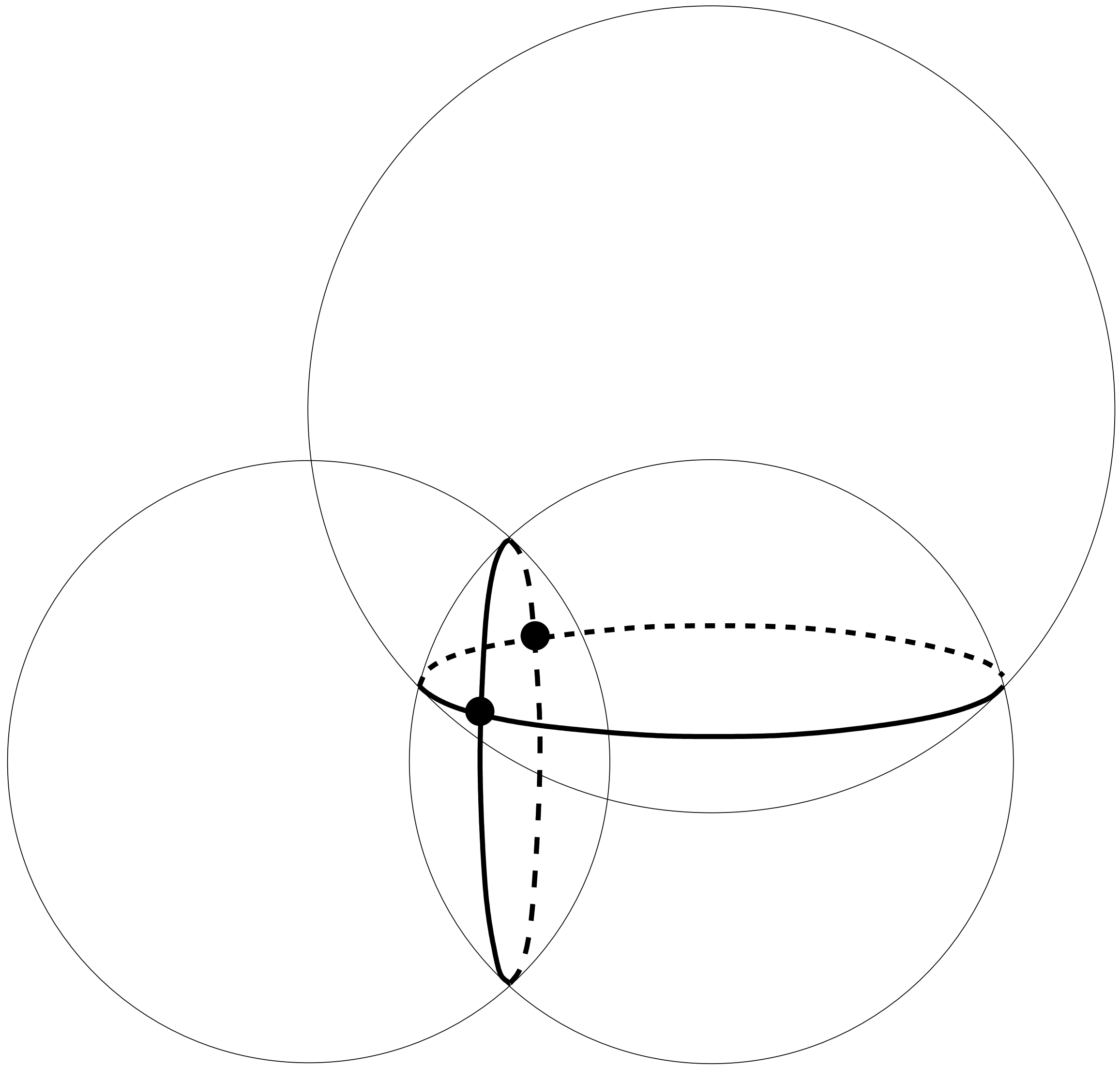
Os satélites emitem sinais com indicação da hora e do local exacto em que se encontram.

O receptor calcula a distância aos satélites pela diferença entre a hora de emissão e a hora de recepção, e obtém a sua posição por trilateração.









Matematicamente, o receptor resolve um sistema de três equações quadráticas

$$\begin{cases} (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=c^2(t-t_1)^2 \\ (x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=c^2(t-t_2)^2 \\ (x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2=c^2(t-t_3)^2 \end{cases}$$

para obter a sua posição (x, y, z) no instante t em que recebe os sinais.

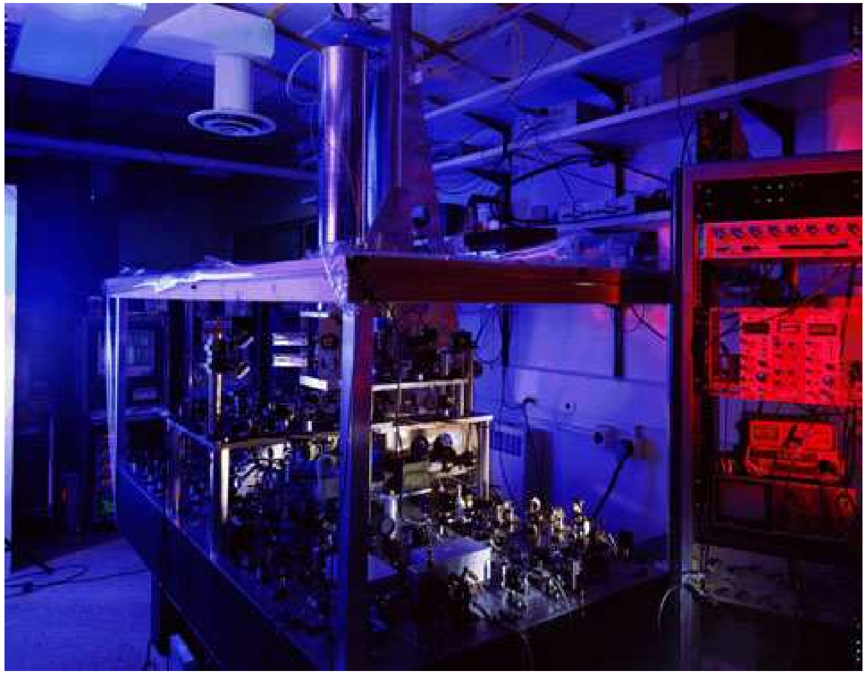
Velocidade da luz: $c = 30$ centímetros por nano-segundo!

1 segundo $=$ 1000 mili-segundos

1 mili-segundo $=$ 1000 micro-segundos

1 micro-segundo $=$ 1000 nano-segundos

Para conseguir esta precisão é preciso usar relógios atómicos nos satélites.



Mas o receptor possui apenas um relógio vulgar!

Matematicamente, o receptor resolve o sistema de quatro equações quadráticas

$$\begin{cases} (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=c^2(t-t_1)^2 \\ (x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=c^2(t-t_2)^2 \\ (x-x_3)^2+(y-y_3)^2+(z-z_3)^2=c^2(t-t_3)^2 \\ (x-x_4)^2+(y-y_4)^2+(z-z_4)^2=c^2(t-t_4)^2 \end{cases}$$

para obter a sua posição (x, y, z) e o instante t em que recebe os sinais. Deste modo o receptor pode também funcionar como um relógio muito preciso (tempo GPS).

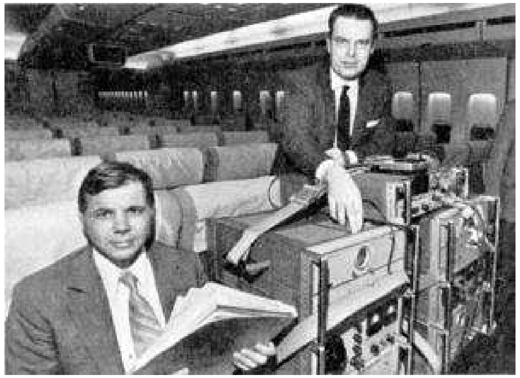
Que horas são?

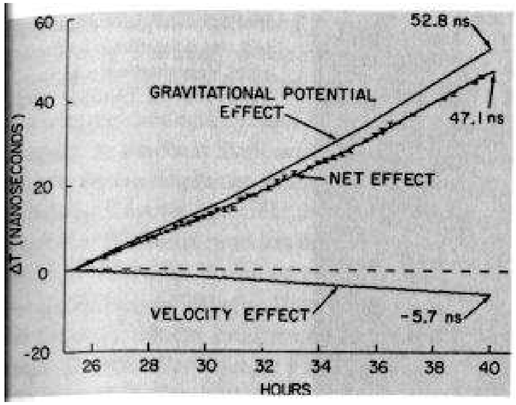
Será que o tempo medido por todos os relógios coincide?

À primeira vista: sim!

Medindo cuidadosamente: não!

Em Outubro de 1971, Hafele e Keating levaram quatro relógios de césio em voos comerciais à volta da Terra (uma vez para leste e uma vez para oeste) e compararam com os relógios do Obervatório Naval dos Estados Unidos. Os relógios atrasaram-se/adiantaram-se 60/270 nano-segundos!



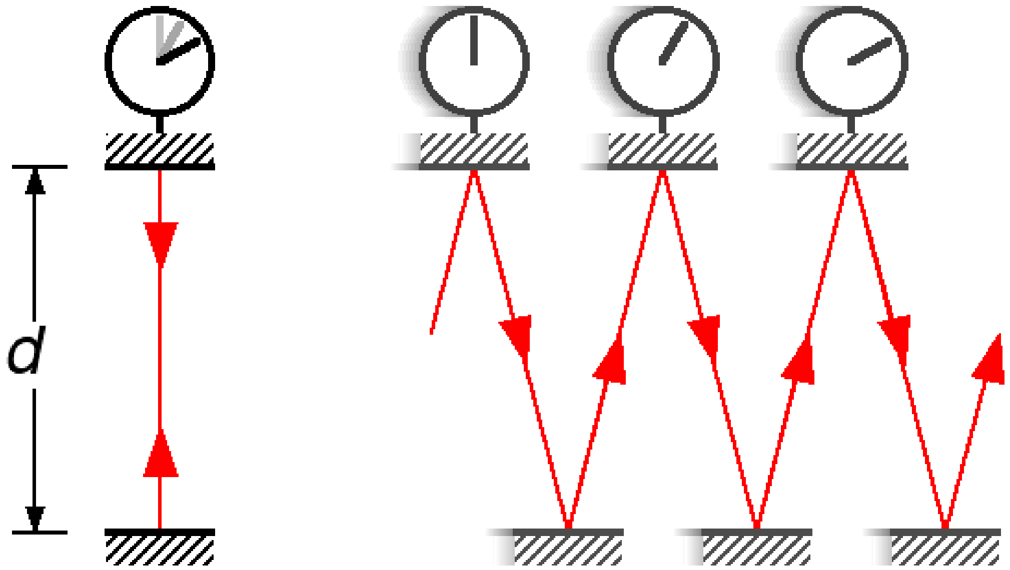


Relatividade Restrita (1905)

É um facto experimental que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores!

O que é a velocidade? $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

A solução de Einstein: o tempo decorre a ritmos diferentes observadores com diferentes velocidades!

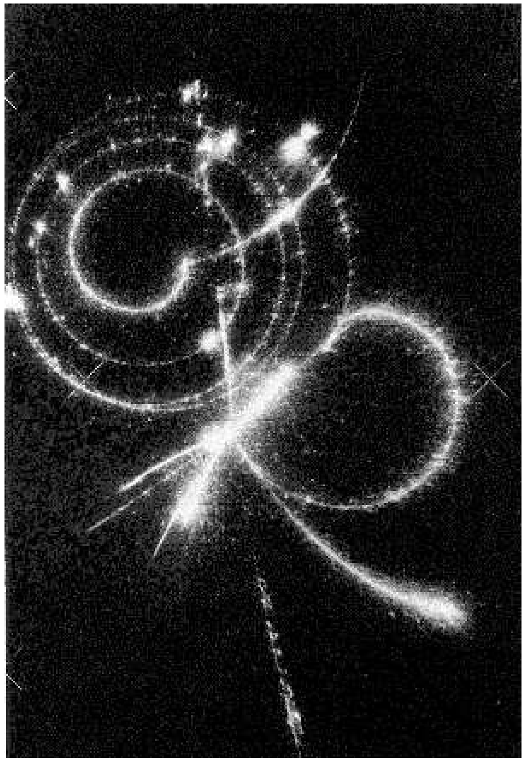


Relógios em movimento atrasam-se: $\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Esta diferença só é apreciável para velocidades comparáveis à da luz (300 000 quilómetros por segundo).

Velocidade do veículo mais rápido jamais construído (sonda Helios 2, lançada em 1976): 70 quilómetros por segundo ($0,02\%$ da velocidade da luz).

Em Física de partículas esta dilatação do tempo é observada rotineiramente.



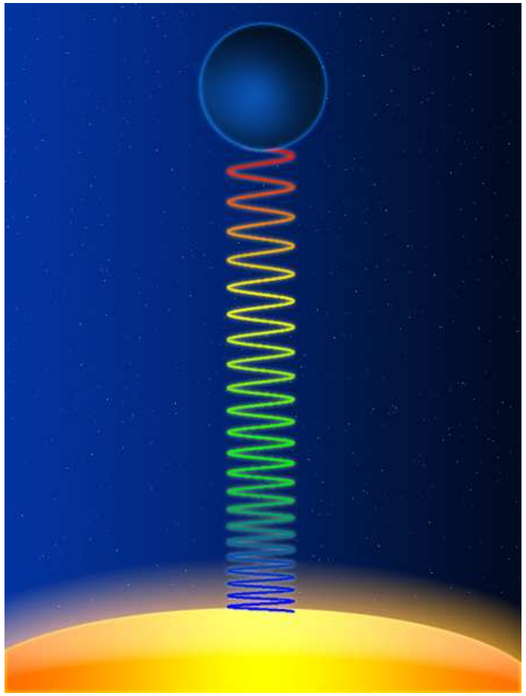
Relatividade Geral (1915)

Um objecto atirado para cima perde energia cinética $\Delta E = mgh$ à medida que sobe.

Isto tem que ser verdade também para um fotão, com $m = E/c^2$.

Da relação de Planck $E = hf$ vemos que a frequência do fotão diminui, ou seja, o seu período aumenta.

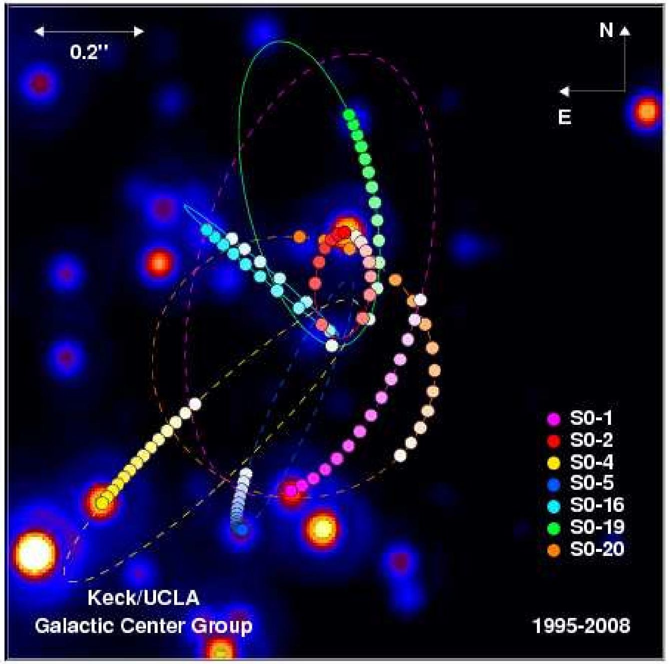
O resultado mantém-se se substituirmos o período dos fotões pelo período de uma luz intermitente. Como é possível?



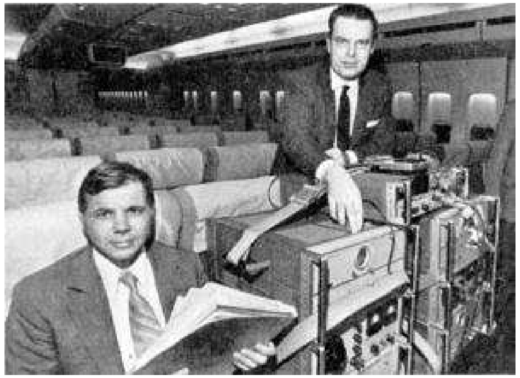
A solução de Einstein: o tempo decorre a ritmos diferentes para observadores em diferentes locais num campo gravitacional!

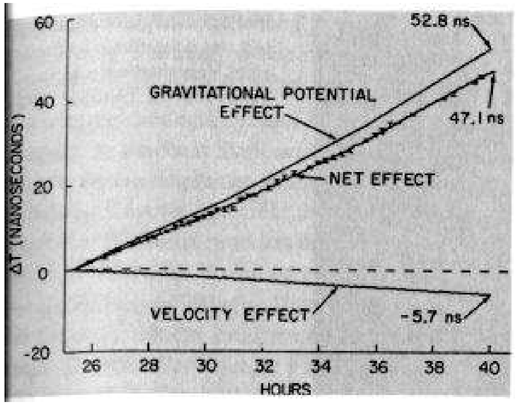
Relógios a grande altitude adiantam-se: $\Delta t' = \Delta t \left(1 + \dfrac{gh}{c^2}\right)$

Na vizinhança de um buraco negro existem locais onde o tempo passa a um ritmo arbitrariamente baixo.



Em Outubro de 1971, Hafele e Keating levaram quatro relógios de césio em voos comerciais à volta da Terra (uma vez para leste e uma vez para oeste) e compararam com os relógios do Obervatório Naval dos Estados Unidos. Os relógios atrasaram-se/adiantaram-se 60/270 nano-segundos!





GPS e Relatividade

Dessincronização entre os relógios de Terra e os relógios dos satélites:

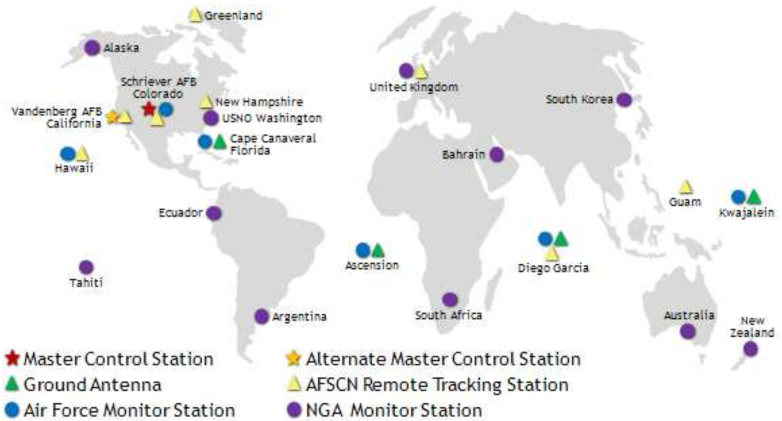
$$\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{TERRA}} \simeq 1 - \frac{3v^2}{2c^2} + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{gR}{c^2} \simeq 1 + 4,5 \times 10^{-10}$$

Ao fim de um dia:

$4,5 \times 10^{-10} \times 24 \times 3600 \times 10^9 \simeq 40\,000$ nano-segundos.

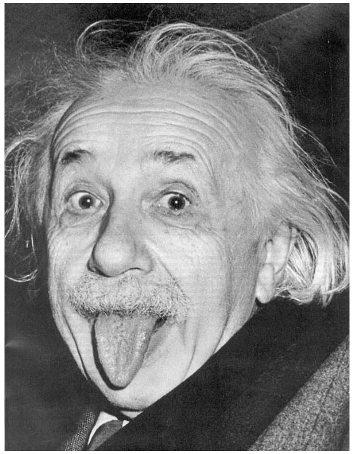
À velocidade da luz, isto corresponde a $40\,000 \times 0,3 = 12\,000$ metros!

Na realidade o problema não é tão grave, porque o receptor usa o tempo dos satélites. Mas para os satélites saberem a sua posição têm que recorrer a estações de rastreio em Terra.



Para pensar

Quando Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade não tinha nenhuma aplicação prática em mente.



"A alta tecnologia que tanto apreciamos hoje em dia é essencialmente uma tecnologia matemática."– Edward B. David, ex-presidente da Exxon Research.