Resolução Numérica de Problemas de Obstáculo com Aplicações à Matemática Financeira

Raquel Gonçalves

Orientador: Prof. Juha Videman

TÉCNICO LISBOA

6 de Fevereiro de 2019

O objetivo principal da dissertação foi a resolução numérica de problemas de obstáculo elípticos e parabólicos por métodos das diferenças finitas.

Conteúdo

O que é uma Opção?

Uma opção representa um contrato a prazo que oferece ao titular o direito, mas não a obrigação, de comprar ou de vender um activo subjacente **S**, num certo instante de tempo ou durante um certo período de tempo, por um preço **K** acordado na altura da celebração do contrato (preço de exercício da opção). Chama-se tempo de maturidade ao período de tempo até à data de expiração da opção.

Diferenças nas Opções

- Opção Europeia

$$t = T$$

- Opção Americana

$$0 \leqslant t \leqslant T$$

Condições para as Opções Americanas

- V(S(t),t) retorna o valor da opção para um activo subjacente S num certo instante de tempo t

Condições para as Opções Americanas

- V(S(t),t) retorna o valor da opção para um activo subjacente *S* num certo instante de tempo *t*
- Para garantir que não ocorre arbitragem impõe-se a condição

$$V(S(t), t) \geqslant \max\{S(t) - K, 0\}$$

Condições para as Opções Americanas

- V(S(t),t) retorna o valor da opção para um activo subjacente S num certo instante de tempo t
- Para garantir que não ocorre arbitragem impõe-se a condição

$$V(S(t),t) \geqslant \max\{S(t) - K, 0\}$$

- Preço de exercício optimo

$$S_f(t)$$

Condições para as Opções Americanas

- V(S(t),t) retorna o valor da opção para um activo subjacente S num certo instante de tempo t
- Para garantir que não ocorre arbitragem impõe-se a condição

$$V(S(t),t) \geqslant \max\{S(t)-K,0\}$$

- Preço de exercício optimo

$$S_f(t)$$

- Na fronteira livre S_f os preços são óptimos

$$V(S_f(t),t) = S_f(t) - K \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial S}(S_f(t),t) = 1$$

Modelo para Opções Americanas

- Sem pagamento de dividendos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leqslant 0$$

Modelo para Opções Americanas

- Sem pagamento de dividendos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leqslant 0$$

- Com pagamento de dividendos:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-d)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV \leqslant 0$$

Transformação na Equação do Calor

$$x = \log\left(\frac{S}{K}\right) \quad \text{e} \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t);$$

$$\Omega = \{(x, \tau) : -\infty < x < +\infty, \;\; 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\sigma^2}{2} T\}$$

Transformação na Equação do Calor

$$x = \log\left(\frac{S}{K}\right) \quad \text{e} \quad \tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t);$$

$$\Omega = \{(x, \tau) : -\infty < x < +\infty, \;\; 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{\sigma^2}{2} T\}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

Condição inicial

$$p(x, 0) = \max\{e^{\frac{1}{2}(s+1)x} - e^{\frac{1}{2}(s-1)x}, 0\}$$

$$c = \frac{r}{\frac{\sigma^2}{2}} \quad \text{e} \quad s = \frac{r - d}{\frac{\sigma^2}{2}}$$

Transformação na Equação do Calor

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \text{if } x \leqslant x_f(\tau) \\ p(x,\tau) = g(x,\tau) & \text{if } x > x_f(\tau) \end{cases}$$

Condições iniciais e de fronteira assimptóticas

$$p(x,0) = g(x,0)$$
$$\lim_{x\to-\infty} p(x,\tau) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} p(x,\tau) = g(x,\tau),$$

Transformação na Equação do Calor

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \text{if } x \leqslant x_f(\tau) \\ p(x,\tau) = g(x,\tau) & \text{if } x > x_f(\tau) \end{cases}$$

Condições iniciais e de fronteira assimptóticas

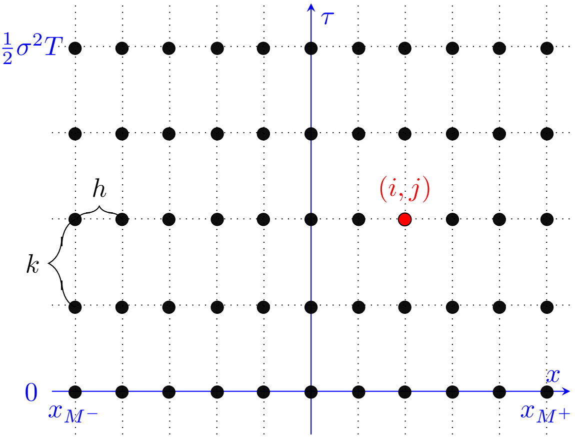
$$p(x,0) = g(x,0)$$
$$\lim_{x\to-\infty} p(x,\tau) = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} p(x,\tau) = g(x,\tau),$$

$$g(x,\tau) = e^{(\frac{1}{4}(s-1)^2+c)\tau} \max\{e^{\frac{1}{2}(s+1)x} - e^{\frac{1}{2}(s-1)x}, 0\}$$

Transformação na Equação do Calor

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \geqslant 0$$
$$p \geqslant g$$
$$\left(\frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)(p - g) = 0$$

Com as condições iniciais e de fronteira em cima apresentadas.


τ
$\frac{1}{2}\sigma^2 T$
h
(i, j)
k
x
0
x_{M^-}
x_{M^+}

Método de Euler Explícito

$$y_i^{j+1} = \alpha P_{i+1}^j + (1 - 2\alpha) P_i^j + \alpha P_{i-1}^j, \qquad i = 2, \ldots, m-1, \;\; j = 1, \ldots, n-1;$$

$$P_i^{j+1} = \max\{y_i^{j+1}, g_i^{j+1}\}, \qquad i = 2, \ldots, m-1, \;\; j = 1, \ldots, n-1;$$

$$P_i^1 = g_i^1, \qquad i = 1, \ldots, m;$$

$$P_1^j = g_1^j, \qquad j = 2, \ldots n;$$

$$P_m^j = g_m^j, \qquad j = 2, \ldots n.$$

Critério de convergência: $\alpha = k/h^2 \leq 1/2$.

Método de Euler Implícito

$$y_i^{j+1,(k+1)} = \frac{1}{1+2\alpha}(b_i^{j+1} + \alpha(P_{i+1}^{j+1,(k)} + P_{i-1}^{j+1,(k+1)})),$$

$$i = 2, \ldots, m-1, \;\; j = 1, \ldots, n-1;$$

$$P_i^{j+1,(k+1)} = \max\{P_i^{j+1,(k)} + \omega(y_i^{j+1,(k+1)} - P_i^{j+1,(k)}), g_i^{j+1}\},$$

$$i = 2, \ldots, m-1, \;\; j = 1, \ldots, n-1;$$

$$P_i^1 = g_i^1, \qquad i = 1, \ldots, m;$$

$$P_1^j = g_1^j, \qquad j = 2, \ldots n;$$

$$P_m^j = g_m^j, \qquad j = 2, \ldots n.$$

Onde $\alpha = k/h^2$ e $\omega = 1$ (Método de Gauss-Seidel).

Método de Crank-Nicolson

$$y_i^{j+1,(k+1)} = \frac{1}{1+\alpha}(b_i^j + \frac{\alpha}{2}(P_{i+1}^{j+1,(k)} + P_{i-1}^{j+1,(k+1)})),$$

$$i = 2, \ldots, m-1, j = 1, \ldots, n-1;$$

$$P_i^{j+1,(k+1)} = \max\{P_i^{j+1,(k)} + \omega(y_i^{j+1,(k+1)} - P_i^{j+1,(k)}), g_i^{j+1}\},$$

$$i = 2, \ldots, m-1, j = 1, \ldots, n-1;$$

$$P_i^1 = g_i^1, \qquad i = 1, \ldots, m;$$

$$P_1^j = g_1^j, \qquad j = 2, \ldots n;$$

$$P_m^j = g_m^j, \qquad j = 2, \ldots n;$$

$$P_m^j = g_m^j, \qquad j = 2, \ldots, n.$$

Onde $\alpha = k/h^2$ e $\omega = 1$ (Método de Gauss-Seidel).

Valorização de opções de compra americanas com pagamento de dividendos

S_0	Explícito	Implícito	Crank-Nicolson
4	0.0378	0.0597	0.0791
6	0.3752	0.4383	0.4565
8	1.2309	1.3353	1.3540
11	3.2868	3.4530	3.4594
12	4.0948	4.2816	4.2827
15	6.6890	6.9377	6.9225

Considerando $K = 8$, $d = 0.08$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$ e $T = 1$.

Efeito do pagamento de dividendos no valor de opções de compra americanas

	Implícito			Crank-Nicolson		
	d			d		
S_0	0.03	0.06	0.11	0.03	0.06	0.11
4	0.0538	0.0444	0.0319	0.0597	0.0484	0.0338
6	0.4746	0.4140	0.3269	0.5054	0.4353	0.3366
8	1.4701	1.3248	1.1063	1.5325	1.3674	1.1234
11	3.7429	3.4675	3.0380	3.8384	3.5288	3.0537
12	4.6159	4.3018	3.8082	4.7206	4.3678	3.8227
15	7.3855	6.9669	6.3016	7.5151	7.0459	6.3137

Considerando $K = 8$, $r = 0.1$, $\sigma = 0.4$, $T = 1$, $m = 400$ e $h = 0.01$ para ambos os métodos. Com $k = h^2$ para o método Implícito e $k = h$ para o método de Crank-Nicolson.

Bibliografia Principal

ATKINSON, K., AND HAN, W.
Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework.
Springer, 2009.

MAVINGA, N., AND ZHANG, C.
Numerical Solutions of American Options with Dividends Using Finite Difference Methods.
NC J Math. Stat. 1 (2015), 1–16.

SORSIMO, A.
Solution of the inequality constrained Reynolds equation by the finite element method.
Master's thesis, Aalto University, 2012.