Um Olhar Moderno sobre a Geometria Clássica

André Morais

Abril 2024

1 Introdução

1.1 Os hexágonos de Pappus e Pascal

Os dois teoremas que mostramos de seguida foram provados originalmente através dos métodos de geometria clássica euclidiana, porém com a utilização de métodos algébricos torna-se possível compreende-los de forma mais completa.

Teorema 1. *Sejam A,B, C e a, b, c dois conjuntos de pontos colineares. Seja X o ponto de interseção das retas Ab e Ba, Y o ponto de interseção das retas Ac e Ca e Z o ponto de interseção das retas Bc e Cb. Então X, Y e Z são colineares.*

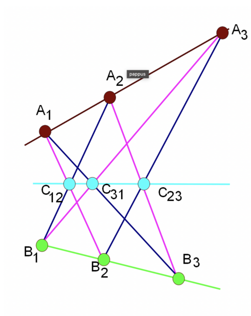


Figure 1: Teorema de Pappus

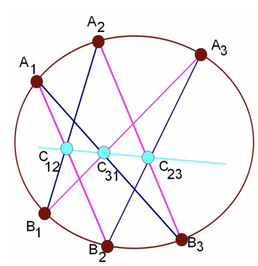


Figure 2: Teorema de Pascal

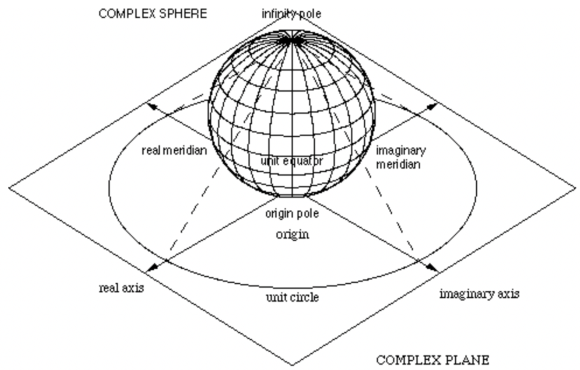
Teorema 2. *Sejam A,B, C e a, b, c dois conjuntos contidos numa cónica. Seja X o ponto de interseção das retas Ab e Ba, Y o ponto de interseção das retas Ac e Ca e Z o ponto de interseção das retas Bc e Cb. Então X, Y e Z são colineares.*

Para provarmos estes resultados vamos introduzir alguns novos conceitos.

1.2 O Espaço Projetivo

Definição 1. ***(Espaço Projetivo)*** *Seja V um espaço vetorial de dimensão >1. Definimos $\mathbb{P}(V)$, como o espaço formado pelos subespaços lineares de dimensão 1 (retas que atravessam a origem) em V.*

No caso especial de V ser $\mathbb{K}^{n+1}$, $\mathbb{K}$ um corpo arbitrário, usamos a notação $\mathbb{KP}^n$ para $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Quando o espaço vetorial estiver implícito ou não for importante para o argumento em causa abreviamos apenas para $\mathbb{P}^n$. É importante ainda notar que a dimensão do espaço projetivo é sempre igual à dimensão do espaço original menos 1.
Para representar os pontos destes espaços é útil utilizarmos as **coordenadas homogéneas**.
De acordo com a definição do espaço projetivo, um ponto em $\mathbb{P}^n$ corresponde a uma reta que passa na origem. Desta forma para representar um ponto qualquer no espaço projetivo podemos escolher qualquer ponto na reta a que ele corresponde e usar as suas coordenadas para o representar. Se $(x_0, ..., x_n)$ representar um



ponto do espaço afim presente nesta reta então dizemos que $[x_0 : ... : x_n]$ é o ponto correspondente no espaço projetivo, em coordenadas homogéneas. Evidentemente podemos escolher qualquer ponto nesta reta como representante o que implica que esta representação em coordenadas seja invariante sob multiplicação por escalar não nulo (*i.e.* $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}^*}\ \alpha[x_0 : ... : x_n] = [\alpha x_0 : ... : \alpha x_n] = [x_0 : ... : x_n]$).
Em coordenadas homogéneas conseguimos ver que todos os espaços projetivos de dimensão n contêm n cópias do espaço afim com dimensão correspondente enquanto subespaços. Se fixarmos uma das coordenadas homogéneas do espaço como sendo constante (= 1 devido à invariância sob produto por escalar) os restantes elementos encontram-se em correspondência é biunívoca com o espaço afim (por exemplo, fixando a primeira coordenada: $[1 : x_1 : ... : x_n] = (x_1, ..., x_n)$). O complementar deste espaço forma um hiperplano (espaço linear de dimensão $n-1$) a que se dá o nome de hiperplano no infinito.

Exemplo 1. $\mathbb{CP}^1$
Por definição este espaço é a projetivição de $\mathbb{C}^2$, correspondendo às retas neste espaço. Em coordenadas homogéneas qualquer ponto aqui pode ser representado por $[z_1 : z_2],\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Na verdade $\mathbb{CP}^1$ pode ser identificado com a Esfera de Riemann. Desta forma , fixando a primeira ou segunda coordenadas homogéneas (formando os conjuntos $\{[1 : z_2]\}_{z_2\in\mathbb{C}}$ e $\{[z_1 : 1]\}_{z_1\in\mathbb{C}}$) ficamos com o complementar do Pólo Norte ou do Pólo Sul na esfera. Cada um destes espaços é evidentemente isomorfo ao plano complexo e neste caso podemos ver o ponto que falta como sendo o infinito do plano complexo.

Como o espaço projetivo 2-dimensional contém o plano e o ponto no infinito, podemos provar resultados no espaço projetivo e traduzi-los diretamente para o plano fazendo a restrição a este subespaço. Neste processo obtemos também o comportamento dos nossos objetos no "infinito" do plano ao observar o que afirmam os resultados para esse ponto específico do plano projetivo. Este processo permite simplificar significativamente os enunciados e a prova de alguns resultados pois alguns comportamentos diferenciados que ocorrem apenas no infinito num plano afim são parte dos resultados equivalentes no plano projetivo.

2 Variedades Algébricas

Definição 2. ***(Variedade Algébrica Afim)*** *Consideremos o espaço afim sobre um corpo fixo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{A}^n = \mathbb{K}^n$). Uma variedade algébrica afim V é o conjunto dos zeros de uma família de polinómios de coeficientes nesse corpo:*

$$V := \{(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{A}^n : f_i(x_0, ..., x_n) = 0\}, \tag{1}$$

para um conjunto de polinómios irredutíveis $f_i \in \mathbb{K}[x]$.

Exemplo 2. ***(Parábola em $\mathbb{R}^2$):*** *$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\}$. Neste caso temos apenas um polinómio irredutível: $f(x, y) = x^2 - y\ \in \mathbb{R}[x, y]$*

Ao passarmos para os espaços projetivos esta definição tem de ser alterada pois a projetivização dos polinómios do espaço afim pode estar bem definida, uma vez que estes podem tomar diferentes valores ao longo de uma reta. A solução é trabalhar com **polinómios homogéneos**. Um polinómio diz-se homogéneo se todos os seus termos tiverem o mesmo grau. Por exemplo $x^2 + y^2$ é homogéneo (todos os termos têm grau 2) enquanto $x^2 + y$ não é (tem um termo de grau 2 e um termo de grau 1). Apesar de o valor pontual dos polinómios homogéneos não ter de estar bem definido, o conjunto de pontos onde têm valor zero está. Para ver a razão por detrás deste facto pensemos apenas em polinómios a duas variáveis (porém o argumento generaliza-se diretamente para qualquer número de variáveis). Assim um polinómio homogéneo de grau n pode ser escrito como:

$$\sum_{i=0}^{n} c_i x^i y^{n-i} \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} c_i (\alpha x)^i (\alpha y)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} c_i (\alpha)^i x^i (\alpha)^{n-i} y^{n-i} = \alpha^n \sum_{i=0}^{n} c_i x^i y^{n-i} \tag{2}$$

Assim tomando $\alpha \neq 0$ um polinómio é nulo em (x, y) se e só se for nulo em $(\alpha x, \alpha y)$, pelo que o facto de ser nulo está bem definido em $[x : y]$. Podemos então definir:

Definição 3. ***(Variedade algébrica projetiva)*** *Uma variedade algébrica em $\mathbb{P}^n$ é o conjunto de zeros de uma família de polinómios homogéneos irredutíveis, ou seja:*

$$V := \{x_0, ..., x_n \in \mathbb{P}^n : f_i(x_0, ..., x_n) = 0\}, \tag{3}$$

para um conjunto de polinómios homogéneos irredutíveis $f_i \in \mathbb{K}[x]$.

Nota 1. *(Os anéis de coordenadas) O conjunto dos polinómios que define uma variedade define também um ideal em $\mathbb{K}[x]$. Existe assim uma correspondência biunívoca entre ideais gerados por polinómios irredutíveis e variedades algébricas. Podemos então definir o anel de coordenadas de uma variedade afim V como: $A(V) = \{f(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n] : f(x_1, ..., x_n) = \forall_{(x_1,...,x_n)\in V}\}$. Este anel contém muita informação acerca da variedade, por exemplo a sua dimensão (no sentido de Krull) corresponde à dimensão da variedade, e é também um invariante sob isomorfismo de variedades.*

3 Divisores de Weil

Procuramos agora de uma forma de poder manipular as curvas no plano, e para isso introduzimos os divisores de Weil.

Definição 4. *Seja X uma variedade algébrica projetiva não-singular. Um divisor de Weil em X é uma combinação linear finita de coeficientes inteiros das subvariedades de codimensão 1 (i.e. um elemento do grupo abeliano livremente gerado por estas variedades). Dizemos que um divisor é efetivo se todos os seus coeficientes forem não negativos.*

Podemos ainda associar um divisor de Weil a uma função racional: $(f) = \sum n_Y \cdot Y$ onde a soma é tomada sobre todas as subvariedades de codimensão 1, (Y), e n_Y é zero se não tiver zeros ou pólos na variedade Y, $+n$ se f tiver um zero de ordem n em Y e $-n$ se tiver um pólo de ordem n em Y. Chamamos a estes divisores principais.
Precisamos ainda de definir uma relação de equivalência entre divisores. Dois divisores (D, E) são **linearmente equivalentes**, se a sua diferença for principal (*i.e.* $D - E = (f)$).

Proposição 1. *Seja $D = \sum_i n_i Y_i$ um divisor num espaço projetivo sobre um corpo, definimos $degD = \sum_i n_i degY_i$. Neste caso*
a) *Qualquer função racional f tem grau 0;*
b) *Qualquer divisor D de grau d é linearmente equivalente a dH onde H é o hiperplano obtido por igualar a primeira coordenada homogénea a 0.*

Demonstração. ***a)*** Se f é uma função racional então pode ser escrita como o quociente de duas funções regulares do mesmo grau $f = \frac{g}{h} \Rightarrow (f) = (g) - (h)$, logo como g e h têm o mesmo grau $degf = 0$.
b) Se D tem grau d então pode ser escrito como $D_1 - D_2$ para dois divsores $D_1 = (g_1)$ e $D_2 = (g_2)$ com graus d_1 e d_2 respetivamente, tal que $d = d_1 - d_2$,(podemos escrever os divisores nesta forma pois hipersuperfícies correspondem a ideais principais no anel de polinómios). Mas assim podemos ver que $D - dH = (\frac{g_1}{x_0^d g_2})$. $\square$

Ao conjunto de divisores linearmente equivalentes a um dado divisor D chamamos de **Sistema Linear** completo associado a esse divisor. Da proposição acima vemos que curvas do mesmo grau são linearmente equivalentes pelo que podemos definir o sistema linear das cónicas (curvas de grau 2) e das cúbicas (curvas de grau 3). Estes sistemas também podem ser representados por combinações lineares de coeficientes no corpo dos polinómios que os definem. Em $\mathbb{KP}^2$ estes sistemas podem ser representados da seguinte forma:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \epsilon xz + \phi yz \tag{4}$$

$$\alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma z^3 + \delta xy^2 + \epsilon xz^2 + \phi yx^2 + \zeta yz^2 + \eta zx^2 + \theta zy^2 + \iota xyz \tag{5}$$

Notemos que estes sistemas têm, respetivamente, dimensão linear 6 e 10 (e portanto dimensão projetiva 5 e 9).

Podemos ainda extrair subespaços destes sistemas ao exigir que todas as curvas do nosso sistema passem por um ponto pré-determinado (a que chamamos ponto base). Por cada ponto base que determinemos a dimensão do sistema cai por 1.

Exemplo 3. ***(Sistema das cónicas a passar por*** $[1:0:0]$***)***
Partindo do sistema completo das cónicas substituamos a restrição imposta:

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 0 + \epsilon \cdot 0 + \phi \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \tag{6}$$

Pelo que sistema se reduz a:

$$\beta y^2 + \gamma z^2 + \delta xy + \epsilon xz + \phi yz \tag{7}$$

Tal como esperado este sistema tem dimensão linear 5 (e dimensão projetiva 4).

4 Teorema de Cayley-Bacharach e os hexágonos

Conseguimos agora extrair facilmente o Teoremas dos Hexágonos que vimos inicialmente. Para isso provamos uma generalização destes resultados:

Teorema 3. ***(Cayley-Bacharach)*** *Sejam C_1 e C_2 duas cúbicas em $\mathbb{P}^2$ que se intersetam em 9 pontos P_i, então qualquer outra cúbica C que passe em 8 destes $P_1, ..., P_8$ pontos passa também no nono.*

Demonstração. Provamos que qualquer C nestas condições é na verdade uma combinação linear de C_1 e C_2, pelo que tem que se anular nos mesmos pontos.
Para isto pensemos no sistema linear das cúbicas. De acordo com o que vimos, este pode ser visto como um espaço linear de dimensão afim 10. Contudo pela condição de se anularem em 8 ponto pontos obtemos um subsistema de dimensão afim 2, que é então gerado pelas duas cúbicas C_1 e C_2. Mas nesse caso qualquer outra curva C terá de ser uma combinação linear destas duas. □

Agora os teoremas de Pappus e Pascal são corolários diretos deste resultado:

No caso do Teorema de Pascal, notemos que uma vez fixos os 6 pontos da parabola, o conjunto das 6 retas que as ligam a formam um par de cúbicas degeneradas. Estas intersetam-se exatamente em 9 pontos pelo que, pelo teorema de Cayley-Bacharach temos imediatamente que qualquer outra cúbica que passe em 8 destes pontos passará no nono. Observemos contudo que a própria cónica unida com a reta que liga dois dos pontos de interseção é uma cúbica degenerada que passa por 8 destes pontos logo passa também no outro ponto de interseção. Ou seja estes 3 pontos são colineares.
Para o Teorema de Pappus basta reparamos que é um corolário direto do Teorema de Pascal, uma vez que o conjunto de 2 linhas onde se encontram os pontos originais pode ser visto como uma cónica degenerada, pelo que está nas condições deste resultado. Poderíamos também prová-lo diretamente a partir de Cayley-Bacharach repetindo o argumento acima mas com a cónica substituída pelas 2 retas.