A Equação de Schrödinger Periódica

Gonçalo Pereira

1 Introdução

Nos últimos 40 anos, a equação de Schrödinger Não-Linear despertou interesse dos matemáticos e físicos pelas suas aplicações em ótica não linear e teoria de sistemas quânticos. É uma equação de grande interesse que está no núcleo de várias invenções do dia a dia, como o GPS ou em chips de memória flash, nos telemóveis e computadores. Mais recentemente também aparece em computação quântica e criptografia quântica.
No entanto, de um ponto de vista matemático, a equação de Schrödinger é um problema bastante delicado. Isto deve-se ao facto de apresentar algumas propriedades que tornam até a existência local de solução um problema complicado.
Neste seminário vamos resolver a equação de Schrödinger periódica e, desta forma, motivar o estudo de séries de Fourier e de sistemas dispersivos mais elaborados, como a equação de Schrödinger Não-Linear.

2 Separação de Variáveis

Antes de tudo, vamos definir a notação a utilizar. Vamos denotar as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$ por u_x ou $\partial_x u$ e u_t ou $\partial_t u$ respetivamente. Se tratarmos uma função de apenas uma variável, vamos utilizar a notação usual (f' ou $f^{(n)}$, para a n-ésima derivada). Definimos também o operador diferencial Laplaciano como a soma das segundas derivadas no espaço, isto é, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x^i}$ que será denotado por Δu.
Considere-se a equação de Schrödinger Periódica

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 \\ u(0,x) = f(x) \\ u(t,0) = u(t,1) \end{cases} \tag{PS}$$

onde procuramos uma solução $u(t,x)$ com valores em $\mathbb{C}$ com $t \in \mathbb{R}$ e periódica em $x \in \mathbb{R}$.
Vamos utilizar o método de Fourier. Vamos supor que a solução admite uma separação de variáveis da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$ e procurar possíveis candidatos a soluções da equação. Note-se que neste momento estamos apenas à procura de candidatos a solução de (PS). Por isto, vamos fazer uma série de raciocínios informais sem nos preocuparmos com a justificação rigorosa e, só mais tarde, é que vamos tentar provar rigorosamente que o nosso candidato é realmente uma solução do problema.
Substituindo o nosso candidato na equação, obtemos

$$iT'(t)X(x) + T(t)X''(x) = 0$$

Por enquanto, podemos ainda assumir que $T(t)$ e $X(x)$ nunca se anulam e, assim, podemos escrever a relação acima como da seguinte forma:

$$\frac{T'(t)}{iT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

Note-se agora que a equação do lado esquerdo é uma função que só depende de t e a do lado direito é uma função que só depende de x. Como temos uma igualdade para quaisquer valores de (t,x) temos que nenhum dos lados da equação depende de t ou de x. Ou seja,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma \quad \text{e} \quad \frac{T'(t)}{iT(t)} = \sigma$$

onde σ uma constante que não depende de t ou de x.

A primeira equação, diz-nos que $X(x)$ deve satisfazer a EDO

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0 \tag{$*$}$$

Além disso, a soçução que procuramos também terá de ser periódica, uma vez que, para cada t fixo, $u(t,0) = u(t,1)$, ou seja, assumindo que $T(t) \neq 0$ (caso contrário a solução da equação seria 0), temos que $X(0) = X(1)$.
Vamos agora concentrar-nos no comportamento das soluções com base no valor de σ. Procuramos encontrar soluções que não sejam constantes (caso contrário teríamos $u(t,x) = CT(t)$ o que não nos interessa). Podemos ter os seguintes casos:

- Se $\sigma > 0$, então a solução geral da equação $(*)$ é da forma

  $$X(x) = \alpha e^{\sqrt{\sigma}x} + \beta e^{-\sqrt{\sigma}x} \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

  A única solução periódica que temos neste caso, é a solução constante $X(x) = 0$, que não nos interessa.

- Se $\sigma = 0$, então a solução geral da equação $(*)$ é da forma

  $$X(x) = \alpha x + \beta \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

  É fácil de ver que a única solução periódica desta forma, é a solução constante $X(x) = \beta$, que não nos interessa.

- Se $\sigma < 0$, então a solução geral da equação $(*)$ é da forma

  $$X(x) = \alpha e^{i\sqrt{-\sigma}x} + \beta e^{-i\sqrt{-\sigma}x} = (\alpha+\beta)\cos(\sqrt{-\sigma}x) + i(\alpha-\beta)\sin(\sqrt{-\sigma}x) \qquad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

  Assim, já temos uma solução periódica. Para cada n inteiro, temos que $X(x) = X\left(x + \frac{2\pi}{\sqrt{-\sigma}}n\right)$.
  Assim, para que $X(x)$ satisfaça a condição $X(0) = X(1)$, temos que

  $$\frac{2\pi}{\sqrt{-\sigma}}n = 1 \Leftrightarrow -\sigma = 4\pi^2 n^2 \tag{$+$}$$

  (os detalhes podem ser encontrados no final da secção)

Assim, temos que as soluções não triviais de $(*)$ são as funções da forma:

$$X_n(x) = \alpha e^{2\pi i n x} + \beta e^{-2\pi i n x}$$

Por fim, para cada $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ficamos com a EDO

$$T_n'(t) = -i4\pi^2 n^2 T_n(t)$$

cuja solução pode ser facilmente obtida e é

$$T_n(t) = \gamma e^{-i4\pi^2 n^2 t}, \quad \text{com } \gamma \in \mathbb{C}$$

Assim, temos que cada função

$$u_n(t,x) = T_n(t)X_n(x) = c e^{2\pi i n(x - 2\pi n t)} \quad \text{com } c \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$$

é uma solução da equação $iu_t + \Delta u = 0$, periódica em x, com $u(t,0) = u(t,1)$. O problema agora prende-se em satisfazer a condição $u(0,x) = f(x)$.
Se $f(x)$ for da forma $ce^{2\pi i n x}$ então temos que a solução de (PS) é $u(t,x) = ce^{2\pi i n(x-2\pi n t)}$. Vamos agora supor que

$$f(x) = c_1 e^{2\pi i n_1 x} + c_2 e^{2\pi i n_2 x}$$

para $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ e $n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Então, intuitivamente, podemos esperar que a solução do problema seja da forma:

$$u(t,x) = c_1 e^{2\pi i n_1(x - 2\pi n_1 t)} + c_2 e^{2\pi i n_2 (x - 2\pi n_2 t)}$$

e, se verificarmos as condições, vemos que a função as satisfaz.
Esta observação, dá a entender que a seguinte proposição se verifica:

Proposição 2.1 (Princípio da Sobreposição)
Se $u(t,x)$ e $v(t,x)$ são soluções de $iu_t + \Delta u = 0$ então

$$w(x,t) = au(t,x) + bv(t,x) \quad \text{com } a, b \in \mathbb{C}$$

também é solução da equação.

Esta propriedade deve-se ao facto da equação de Schrödinger ser linear. Indutivamente, podemos também concluir que qualquer expressão da forma

$$u(t,x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k u_k(t,x)$$

onde c_k são constantes e u_k soluções da equação, é também uma solução de (PS). Assim, se a condição inicial for da forma

$$f(x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{2\pi ikx}$$

temos a solução

$$u(t,x) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{2\pi ik(x-2\pi kt)}$$

A próxima questão que se pode colocar é: *"E se f(x) não tiver uma representação desta forma?"* Uma possível ideia tentar é representar f como uma "soma infinita". Se f for dada na forma

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi ikx}$$

então o nosso candidato para solução será a função

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi ik(x-2\pi kt)}$$

Temos assim mais duas perguntas a responder:

" Que funções f é que podem ser escritas na forma $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi ikx}$?"
" Será que a função u definida através de uma série converge?"
" Será que $u(t,x)$ é solução da equação?"

Observação: Para chegar à conclusão (+), temos de resolver a seguinte equação

$$a\cos x + b\sin x = a$$

Podemos assumir que $a^2 + b^2 \neq 0$ (caso contrário a solução da equação seria nula). Assim, seja y tal que $\tan y = a/b$. Assim, temos que

$$1 + \frac{1}{(\tan y)^2} = \frac{1}{(\sin y)^2} \Leftrightarrow (\sin y)^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

$$1 + (\tan y)^2 = \frac{1}{(\cos y)^2} \Leftrightarrow (\cos y)^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

Assumindo sem perda de generalidade que y se encontra no primeiro quadrante, podemos escrever a nossa equação na forma

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin y\cos x + \sin x\cos y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x + y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Como $\sin x + y = \sin y$, concluímos que $x = 2\pi n$, com $n \in \mathbb{Z}$.

3 Introdução às Séries de Fourier

Na primeira parte, vimos a necessidade de escrever funções como séries de exponenciais complexas. Nesta secção, iremos tentar desenvolver essa teoria. Começamos por apresentar algumas definições que vamos precisar.

Definição 3.1 (Função Periódica)
Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é ***periódica*** *se existe $T \in \mathbb{R}$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para qualquer x. Adicionalmente, dizemos que τ é o* ***período*** *de f se τ for o menor real positivo T que verifica a condição em cima.*

Exemplo 3.1. *Vamos determinar o período da função $f_n(x) = e^{2\pi i n x}$.*

$$\begin{aligned} f_n(x+\tau) &= f_n(x) \\ \Leftrightarrow e^{2\pi i n(x+\tau)} &= e^{2\pi i n x} \\ \Leftrightarrow e^{2\pi i n \tau} &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos(2\pi n\tau) + i\sin(2\pi n \tau) &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos(2\pi n\tau) = 1,\ \sin(2\pi n\tau) &= 0 \\ \Leftrightarrow \tau &= \frac{k}{n} \quad \text{com } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, o período da função $f_n(x)$ será $\tau = \frac{1}{n}$. Em particular, f_1 é periódica de período 1.

Daqui para a frente, vamos focar-nos apenas no estudo de funções de período 1. Assim, em vez de estudarmos a função em $\mathbb{R}$, basta considerar conjuntos da forma $[x, x+1] \subset \mathbb{R}$, onde identificamos o ponto x com o ponto $x+1$ (isto porque queremos que $f(x) = f(x+1)$). Vamos chamar a este espaço o Torus, denotado por $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Na maior parte das vezes, vamos identificar $\mathbb{T}$ com os intervalos $[-1/2, 1/2]$ e $[0,1]$. Notamos que todos os resultados obtidos para funções de periodo 1 podem ser generalizados para outro tipo de funções periódicas, tomando uma mudança de variável.

Definição 3.2 (Convergência de Séries)
Dizemos que a série $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k$ converge se o limite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} a_k$$

existir e for diferente de $\pm\infty$. Nesse caso, definimos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} a_k$$

Definição 3.3 (Convergência Pontual e Convergência Uniforme)
Uma série de funções $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x)$, com $u_k : I \to \mathbb{C}$ e $I \subset \mathbb{R}$ diz-se que ***converge pontualmente*** *se para cada $x_0 \in I$ a série converge, isto é, para cada $\varepsilon > 0$ e $x_0 \in I$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > N$ então*

$$\left| \sum_{k=-m}^{m} u_k(x_0) - \sum_{k=-n}^{n} u_k(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Dizemos ainda que a série ***converge uniformemente*** *se para cada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > N$ então, para qualquer $x \in I$,*

$$\left| \sum_{k=-m}^{m} u_k(x) - \sum_{k=-n}^{n} u_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Exemplo 3.2. *Considere-se a série $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x)$, com $x \in [0,1]$ e u_k definido da seguinte forma*

$$u_k(x) = \begin{cases} x & \text{se } n = 1 \\ x^n - x^{n-1} & \text{se } n > 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então, a série converge pontualmente mas não converge uniformemente.
Temos que $\sum_{k=1}^{n} u_k(x) = x^n$ *que converge para* 0, *quando* $n \to \infty$, *se* $0 \leq x < 1$ *e para* 1, *se* $x = 1$. *Vamos ver agora que a série não converge uniformemente. Dados* $0 < \varepsilon < 1/2$ *e* $N \in \mathbb{N}$, *seja* $x_0 = (2\varepsilon)^{1/N}$. *Assim, para* $m > N$,

$$\left|\sum_{k=1}^{m} u_k(x_0) - \sum_{k=1}^{N} u_k(x_0)\right| = |x_0^m - x_0^N| = |(2\varepsilon)^{m/N} - 2\varepsilon|$$

e, para m *suficientemente grande, temos que* $(2\varepsilon)^{m/N} < \varepsilon$, *ou seja,*

$$\left|\sum_{k=1}^{m} u_k(x_0) - \sum_{k=1}^{N} u_k(x_0)\right| > \varepsilon$$

Mas agora surge-nos uma questão: *"Porquê estudar séries uniformemente convergentes?"*. A resposta a esta questão encontra-se nas seguintes proposições.

Proposição 3.1
Suponha-se que u_k *são funções contínuas tais que a série* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x)$ *converge uniformemente. Então a função* $u(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x)$ *é também contínua.*

Proposição 3.2
Suponha-se que u_k *são funções integráveis num intervalo* I, *isto é,* $\int_I |u_k(x)|dx < +\infty$, *e que a série* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x)$ *converge uniformemente. Então*

$$\int_I \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x)\right) dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_I u_k(x)dx$$

Proposição 3.3
Suponha-se que u_k *são continuamente diferenciáveis num intervalo* I *e que a série* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k'(x)$ *converge uniformemente. Suponha-se ainda que para um dado* $x_0 \in I$ *a série* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x_0)$ *converge. Então*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x)\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k'(x)$$

Estamos agora preparados para estudar séries de Fourier. Se $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi ikx}$, é de esperar que os coeficientes a_k possam ser obtidos de alguma forma através de f. Para melhor entender isto, vamos supor que $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi ikx}$ e que a série converge uniformemente. Pela proposição 2.1, f deve ser contínua, visto que $e^{2\pi ikx}$ é contínua e tem período 1, uma vez que $e^{2\pi ix}$ tem periodo 1 (logo está definida em $\mathbb{T}$). Como tal, podemos integrar f em $\mathbb{T}$ (que corresponde a integrar em $[-1/2, 1/2]$) e, pela proposição 2.2, temos:

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi ikx}dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{T}} f(x)dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi ikx}dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{T}} f(x)dx = a_0$$

visto que $\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi ikx}dx = \frac{e^{2\pi ikx}}{2\pi ik}\Big|_{x=-1/2}^{1/2} = 0$ para $k \neq 0$.
Para obter os outros coeficientes, temos de tirar partido da seguinte propriedade:

$$\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi ik_1x}\overline{e^{2\pi ik_2x}}dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k_1 \neq k_2 \\ 1 & \text{se } k_1 = k_2 \end{cases}$$

Podemos dizer então que o conjunto das funções $e_k(x) = e^{2\pi ikx}$ é um conjunto **ortonormal**. Assim, seguindo o mesmo raciocínio em cima, obtemos:

$$\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{e^{2\pi inx}}dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi ikx}\overline{e^{2\pi inx}}dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{e^{2\pi i n x}}dx = \int_{\mathbb{T}} a_n dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi i n x}dx = a_n$$

Assim podemos definir de forma rigorosa o que são os coeficientes da série.

Definição 3.4 (Coeficiente de Fourier)
Seja $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ uma função integrável (e periódica de período 1), isto é, $\int_{\mathbb{T}} |f(x)|dx < +\infty$. Definimos os ***coeficientes de Fourier de f*** *como os números a_k em cima que denotamos por $\hat{f}(k)$, isto é,*

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{e^{2\pi i k x}}dx = \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi i k x}dx$$

Note-se que através da definição de $\hat{f}$ temos a seguinte propriedade:

$$|\hat{f}(k)| = \left| \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi i k x}dx \right| \leq \int_{\mathbb{T}} |f(x)|dx$$

Logo, a sucessão $\hat{f}(k)$ é limitada.

Definição 3.5 (Série de Fourier)
Dada $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ integrável, a ***Série de Fourier de f*** *é a função*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2\pi i k x}$$

A próxima pergunta que podemos fazer é: *"Qual é a relação entre f e a sua série de Fourier?"* Preferencialmente, a resposta seria igualdade. Mas isto nem sempre ocorre. Na realidade há exemplos de funções cuja série de Fourier diverge (ver [6], página 416, ou [3], página 215, Ex. 3.4.7).

Definição 3.6 (Função Seccionalmente Contínua)
Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é ***seccionalmente contínua*** *se existir uma partição $a = x_0 < x1 < \cdots < x_n = b$ tal que:*

1. *f é contínua em $]x_j, x_{j+1}[$, para $j \in \{0, \ldots, n-1\}$;*
2. *Os limites $\lim\limits_{x\to x_j^{\pm}} f(x)$,para $j \in \{0, \ldots, n\}$, existem e são finitos.*

Um dos grandes teoremas de convergência de séries de Fourier é o seguinte teorema:

Teorema 3.1 (Fourier/ Dirichlet)
Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ seccionalmente contínua em $\mathbb{T}$, a sua série de Fourier converge em cada ponto $x_0 \in \mathbb{T}$ para a média dos limites laterais, ou seja,

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2\pi i k x_0}$$

onde $x_0^{\pm} = \lim\limits_{x\to x_0^{\pm}} f(x)$. Em particular, se f for contínua,

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2\pi i k x}$$

A prova deste teorema não é difícil, mas envolve conhecimentos fora do nosso propósito. A ideia da prova está em estimar as somas parciais da série escrevendo-as através de um produto de convolução de f com uma função específica. Quem quiser saber mais acerca deste assunto, pode consultar [1], capítulo 4, secções 1-4 e, para o leitor mais avançado, [3] capítulo 3.4. Vamos agora ver umas aplicações deste teorema:

Exemplo 3.3. *Vamos usar as séries de Fourier para calcular o valor de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$.*
Considere-se a função $f : [-1/2, 1/2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então
$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi ikx}dx = \int_{-1/4}^{1/4} e^{-2\pi ikx}dx = \frac{e^{\frac{\pi ik}{2}} - e^{\frac{-\pi ik}{2}}}{2ik\pi} = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}$$
Assim, a série de Fourier de f é
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2\pi ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}e^{2\pi ikx}$$
Pelo teorema anterior, a série em 0 converge para $f(0) = 1$ e, por definição, $\hat{f}(0) = \int f(x)dx = 1/2$, logo
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} = 1$$
$$\Leftrightarrow \hat{f}(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} = 1$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi} = \frac{1}{4}$$

Definição 3.7 (Espaços L^p)
Diz-se que uma função Lebesgue mensurável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ está em $L^p(\mathbb{R})$, para algum $1 \leq p < \infty$, se
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < +\infty$$
Em particular, estes espaços são espaços métricos completos com a norma
$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

Definição 3.8 (Espaços ℓ^p)
Diz-se que uma sucessão $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}, \mathbb{C}$ está em $\ell^p(\mathbb{Z})$, para algum $1 \leq p < \infty$, se
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^p < +\infty$$
Em particular, estes espaços são espaços métricos completos com a norma
$$\|f\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |f(k)|^p\right)^{1/p}$$

Notamos que como os espaços L^p e ℓ^p são espaços normados a desigualdade triangular é válida, isto é,
$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$
onde $\|\cdot\|$ é qualquer uma das normas acima. Outra desigualdade útil cuja demonstração pode ser encontrada em [1] é a seguinte:

Proposição 3.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)
Dadas as sucessões $u, v \in \ell^2(\Omega)$ temos que
$$\left|\sum_{k\in\Omega} u_k\overline{v_k}\right| \leq \left[\sum_{k\in\Omega} |u_k|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k\in\Omega} |v_k|^2\right]^{1/2} = \|u\|_{\ell^2}\|v\|_{\ell^2}$$
Analogamente, dadas as funções $f, g \in L^2(\Omega)$ temos que
$$\left|\int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}dx\right| \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx\right]^{1/2} \left[\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx\right]^{1/2} = \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}$$

Podemos agora ver que qualquer função $f \in L^2(\mathbb{T})$ é também uma função de $L^1(\mathbb{T})$ uma vez que, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz $(*)$

$$\left| \int_0^1 f(x)dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)|dx \overset{(*)}{\leq} (1-0)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Notamos também que o contrário não é necessariamente verdade. Considere-se a função $g(x) = x^{1/2}$ com $x \in [0,1]$ em $\mathbb{T}$. É fácil de verificar que $g \in L^1(\mathbb{T})$ mas $g \notin L^2(\mathbb{T})$.
Na verdade, as funções em $L^2(\mathbb{T})$ têm propriedades muito úteis para lidar com transformada de Fourier. A seguinte proposição apresenta algumas destas propriedades

Proposição 3.5
Sejam $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Então

- *A série de Fourier de f converge para f em L^2, isto é,*

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{2\pi i k \cdot} \right\|_{L^2} = 0$$

- $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2}$ *(Plancherel)*
- $\int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{g(x)}dx = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}$ *(Parseval)*

Por fim, um dos grandes interesses da transformada e Fourier no estudo das equações diferenciais parciais prende-se na seguinte proposição:

Proposição 3.6
Se $f \in C^s(\mathbb{T})$ e $f^{(j)} \in L^2(\mathbb{T})$, para $0 \leq j \leq s$, então, para $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$|\hat{f}(k)| = \frac{1}{(2\pi|k|)^s} \widehat{f^{(s)}}(k)$$

Demonstração:
Integrando por partes, temos

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = \left. \frac{f(x)e^{-2\pi i x k}}{-2\pi i k} \right|_{x=0}^{1} + \frac{1}{2\pi i k} \int_{\mathbb{T}} f'(x) e^{-2\pi i k x} dx = \frac{1}{2\pi i k} \widehat{f'}(k)$$

Logo, $|\hat{f}(k)| = \frac{1}{2\pi|k|} \widehat{f'}(k)$. O resto da prova segue por indução. □

Observação: O espaço das funções $f \in L^2(\Omega)$ cujas derivadas (fracas) até à ordem s também estão em $L^2(\Omega)$ chama-se Espaço de Sobolev e denota-se por $H^s(\Omega)$. Em particular, podíamos enunciar a proposição anterior para $f \in H^s(\mathbb{T})$.

4 A Equação de Schrödinger

Na primeira secção, estudámos o problema (PS) e, pelo método de separação de variáveis, chegámos a uma expressão que parece ser um candidato razoável à solução do problema. O candidato foi o seguinte:

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k (x - 2\pi k t)}$$

onde os coeficientes a_k são tais que

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x}$$

Assim, a única escolha possível para os coeficientes a_k terão de ser os coeficientes de Fourier de f! No entanto, nem toda a função f é igual à sua série de Fourier. Apesar disto, pelo Teorema de Fourier/Dirichlet, sabemos que se f for contínua em $\mathbb{T}$ e f' seccionalmente contínua, então o candidato é:

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{2\pi i k (x - 2\pi k t)} \qquad (\star)$$

Porém, antes de mostrar que de facto $(\star)$ é uma solução de (PS) precisamos de definir rigorosamente o que é uma solução do problema. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 4.1
Seja $R = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, t > 0\}$. Dizemos que uma função contínua $u : R \to \mathbb{C}$ é solução de (PS) se

$$iu_t + \Delta u = 0 \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(t,0) = u(t,1), \quad t > 0$$

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{T}} u(t,x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{\varphi(x)}dx,$$

para qualquer função φ seccionalmente contínua em $\mathbb{T}$

A ideia desta definição é que a solução converge para a condição inicial num sentido de média numa vizinhança de $t = 0$. A média de uma função num conjunto V é dada por

$$\frac{\int_{\mathbb{T}} u(t,x)\mathbb{1}_V(x)dx}{\int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_V(x)dx}$$

onde $\mathbb{1}_V$ é a função que é 1 se $x \in V$ e 0 caso contrário. Temos que $\mathbb{1}_V$ é seccionalmente contínua, logo, a definição faz sentido.

Teorema 4.1
Se $f \in L^2(\mathbb{T})$ e $\hat{f}, k\hat{f}(k), k^2\hat{f}(k) \in \ell^1(\mathbb{Z})$ então $u(t,x)$ em ($\star$) é solução de (PS).

Demonstração:
Começamos por notar que $u(t,x)$ converge uniformemente, visto que

$$|u(t,x)| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)e^{2\pi ik(x-2\pi kt)}\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| = \|\hat{f}\|_{\ell^1} < +\infty.$$

Assim, pela proposição 2.3, temos que as séries

$$u_x(t,x) = 2\pi i \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\hat{f}(k)e^{2\pi ik(x-2\pi kt)}$$
$$u_{xx}(t,x) = -4\pi^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\hat{f}(k)e^{2\pi ik(x-2\pi kt)}$$
$$u_t(t,x) = -4\pi^2 i \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\hat{f}(k)e^{2\pi ik(x-2\pi kt)}$$

estão bem definidas, uma vez que todas convergem uniformemente

$$|u_x| \leq 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k\hat{f}(k)| < +\infty$$
$$|u_{xx}(t,x)| \leq 4\pi^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k^2\hat{f}(k)| < +\infty$$
$$|u_t(t,x)| \leq 4\pi^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k^2\hat{f}(k)| < +\infty$$

Como

$$iu_t + u_{xx} = \big(i(-4\pi^2 i) - 4\pi^2\big) \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\hat{f}(k)e^{2\pi ik(x-2\pi kt)} = 0$$

temos que $u(t,x)$ verifica $iu_t + \Delta u = 0$ para $t > 0$ e $0 \leq x \leq 1$.
Resta mostrar que

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{T}} u(t,x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{\varphi(x)}dx$$

Por Parseval, para $t \neq 0$ fixo, temos que

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{T}} u(t,x)\overline{\varphi(x)}dx = \lim_{t\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(t,k)\overline{\hat{\varphi}(k)}$$

Como, para $t \neq 0$ fixo

$$\begin{aligned}
\hat{u}(t,k) &= \int_{\mathbb{T}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}(l) e^{2\pi i l(x-2\pi l t)} e^{-2\pi i k x} dx \\
&\overset{(\dagger)}{=} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}(l) e^{-i4\pi^2 k^2 t} \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i l x} e^{-2\pi i k x} dx \\
&= \hat{f}(k) e^{-i4\pi^2 k^2 t}
\end{aligned}$$

temos que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(t,k)\overline{\hat{\varphi}(k)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{\varphi}(k)} e^{-i4\pi^2 k^2 t}$$

e, como $0 \leq (|\alpha| - |\beta|)^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2|\alpha||\beta|$ (‡), temos

$$\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{\varphi}(k)} e^{-i4\pi^2 k^2 t}\right| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)||\hat{\varphi}(k)| \overset{(\ddagger)}{\leq} \frac{1}{2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(k)|^2\right) < +\infty$$

Logo, a série converge uniformemente e, portanto, define uma função contínua, ou seja,

$$\lim_{t\to 0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(t,k)\overline{\hat{\varphi}(k)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lim_{t\to 0} \hat{u}(t,k)\overline{\hat{\varphi}(k)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{\varphi}(k)}$$

Por Parseval, temos que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k)\overline{\hat{\varphi}(k)} = \int_{\mathbb{T}} f(x)\overline{\varphi(x)} dx$$

o que conclui a prova. □

Lema 4.1
Se $f \in C^s(\mathbb{T})$ e $f^{(j)} \in L^2(\mathbb{T})$, para $0 \leq j \leq s$, então $(k^{s-1}\hat{f}(k)) \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

Demonstração:
Sabemos que $|\hat{f}(k)| = \frac{1}{(2\pi|k|)^s}|\widehat{f^{(s)}}(k)|$. Assim, para $s \neq 1$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (†) e por Plancherel (‡) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k^{s-1}\hat{f}(k)| &= \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |k^{s-1}\hat{f}(k)| + 0 \times |\hat{f}(0)| = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{(2\pi|k|)^s}|\widehat{f^{(s)}}(k)| \\
&\overset{(\dagger)}{\leq} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{(2\pi|k|)^s}\right)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\widehat{f^{(s)}}(k)|^2\right)^{1/2} \\
&\leq C\|\widehat{f^{(s)}}\|_{\ell^2} \overset{(\ddagger)}{=} C\|f^{(s)}\|_{L^2} < +\infty
\end{aligned}$$

Para $s = 1$, temos de usar o facto de que $|\hat{f}(0)| = \left|\int_{\mathbb{T}} f(x)dx\right| \leq \|f\|_{L^1} < +\infty$, uma vez que $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$. □

Corolário 4.1
Se $f \in C^3(\mathbb{T})$ e $f^{(s)} \in L^2(\mathbb{T})$, para $0 \leq s \leq 3$ então $u(t,x)$ é solução de (PS).

Agora que já temos uma solução da equação (PS), podemos tirar algumas propriedades da solução.

Proposição 4.1 (Conservação da Massa)
Seja $u(t,x)$ uma solução de (PS). Se $f \in L^2(\mathbb{T})$ então existe conservação da norma L^2 para todo o tempo, isto é, $\|u(t,\cdot)\|_{L^2} = \|u(0,\cdot)\|_{L^2}$

Demonstração:
Sabemos que $\hat{u}(t,k) = \hat{f}(k)e^{-i4\pi^2 k^2 t}$. Assim, por Plancherel (†) temos:

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^2}^2 = \|\hat{u}(t,\cdot)\|_{\ell^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)e^{-i4\pi^2 k^2 t}|^2 \overset{(\dagger)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|^2 = \|\hat{f}\|_{\ell^2}^2 \overset{(\dagger)}{=} \|f\|_{L^2}^2 = \|u(0,\cdot)\|_{L^2}^2$$

□

Outra propriedade interessante é a dispersão das soluções. De forma geral, uma onda simples pode ser escrita na seguinte forma

$$Ae^{i(kx-\omega t+\varphi)}$$

onde A é a amplitude, k o número de onda (o número de ciclos por unidade de comprimento), ω a frequência angular (velocidade de rotação) e φ a fase. Vamos olhar com atenção para as soluções da nossa equação

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{f}(k)e^{2\pi ik(x-2\pi kt)} \tag{$\star$}$$

Ao isolar cada onda simples, $\hat{f}(k)e^{2\pi ik(x-2\pi kt)}$, vemos que a onda tem uma amplitude $|\hat{f}(k)|$, um número de onda $2\pi k$, uma frequência angular $\omega=4\pi^2k^2$ e uma fase $\mathrm{Arg}(\hat{f}(k))$. Em particular, vemos que a frequência é uma função real. Se considerarmos que a velocidade de fase (a velocidade de cada ponto da onda no meio físico) é dada por $v=\omega/k$, temos que a nossa onda simples pode ser escrita como

$$u(t,x)=\hat{f}(k)e^{ik(2\pi x-v(k)t)}$$

com $v(k)=4\pi^2k$. Assim, temos que ondas com número de onda maior se propagam a uma velocidade mais alta, ou seja, as ondas dispersam.

5 Comentários Finais

Já vimos como se comporta a solução da equação no caso homogéneo, isto é, $iu_t+\Delta u=0$. Mas o que acontecerá se considerarmos a seguinte equação?

$$iu_t+\Delta u=F(t,x)$$

Ou, de forma mais geral, um caso não linear

$$iu_t+\Delta u=F(t,x,u,\overline{u})$$

onde $F(t,x,y,\overline{u})$ é, por exemplo, $\lambda|u|^\alpha u$, com α par e $\lambda=\pm1$. Podemos também considerar equações não periódicas que tomam valores em $\mathbb{R}$. Será que existe solução local? E caso exisra, a solução é global (ou seja, não rebenta em tempo finito)?
Estas são algumas questões mais avançadas que se podem estudar à volta desta equação. Para os mais curiosos, o livro [5] apresenta um estudo introdutório de equações dispersivas, como a equação de Schrödinger Não-Linear.

Referências

[1] Djairo Guedes de Figueiredo. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* IMPA, 2018.

[2] Gerald B Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications.* John Wiley & Sons, 1999.

[3] Loukas Grafakos et al. *Classical fourier analysis.* Springer, 2008.

[4] Yitzhak Katznelson. *An introduction to harmonic analysis.* Cambridge University Press, 2004.

[5] Felipe Linares and Gustavo Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations.* Springer, 2014.

[6] Edward C Titchmarsh. *The theory of functions.* Oxford University Press, USA, 1939.