TÉCNICO LISBOA

Decomposição em valores singulares (SVD)

EIM 2018

Ana Moura Santos

SVD

... It is not nearly as famous as it should be
**Strang (1980)*
...It definitely deserves a place in more advanced undergraduates courses
**Kalman (2002)*

Restrições na diagonalização matricial

No caso geral, para a diagonalização de A com

$$A=PDP^{-1}$$

temos as seguintes restrições:

- P pode não ser ortogonal
- Nem sempre existem “colunas suficientes” para P
- $Ax= \lambda x$ só é válida para A quadrada

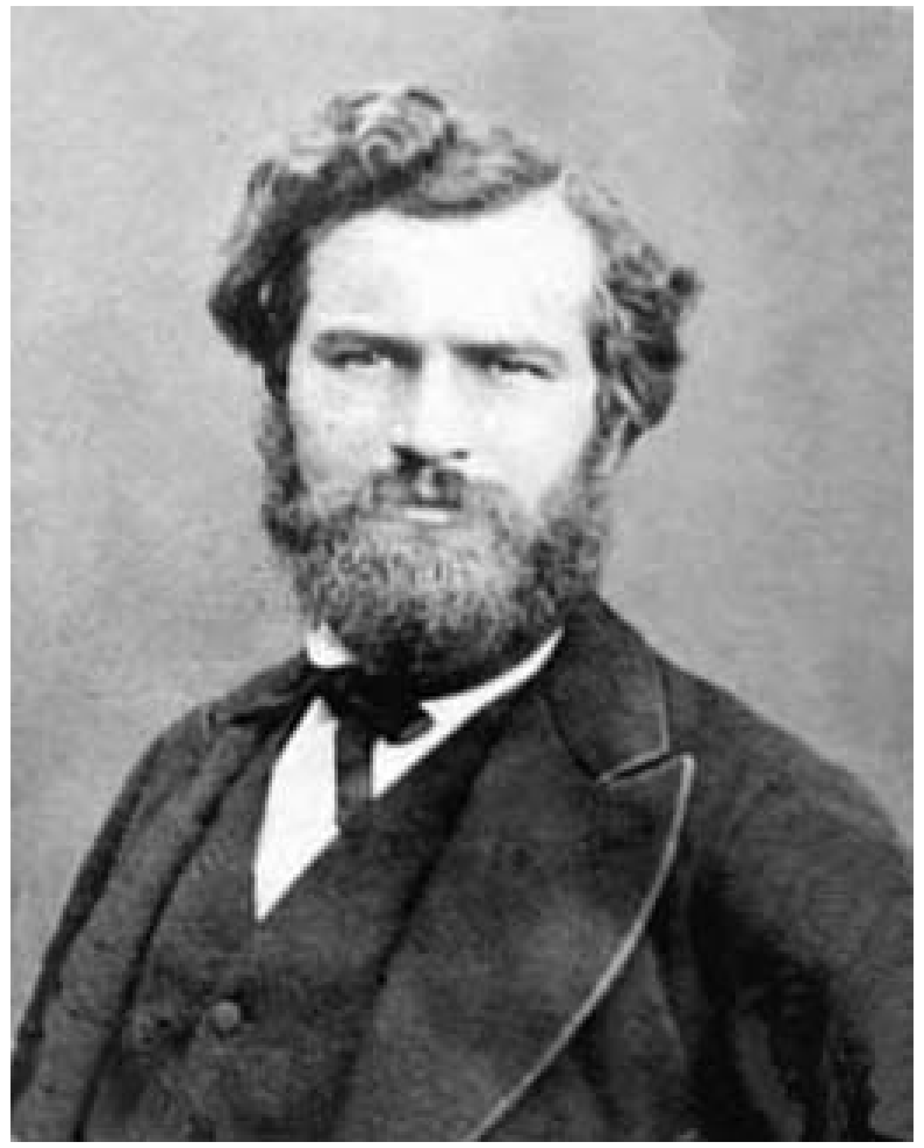
Boas propriedades das simétricas

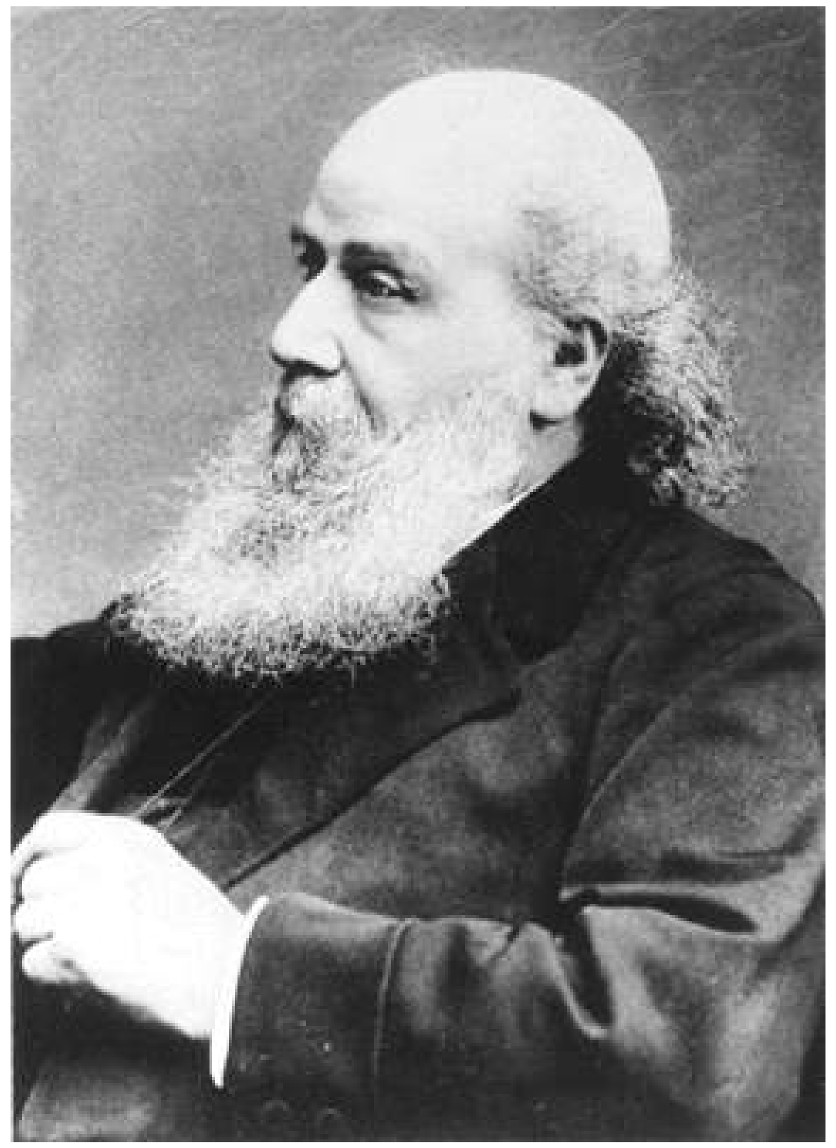
Na diagonalização de $A=A^T$ com

$$A=PDP^T$$

- P é ortogonal e representa rotações/reflexões
- D representa expansões/contrações
- Decomposição espetral: $A=\lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T$
- $x^T A x$ é igual a λ_1 quando $x=u_1$

Beltrami, Jordan, Sylvester, ..., Picard
(valeurs singulières)





Valores singulares de A mxn

Temos $A\mathbf{v}_1 = б_1\mathbf{u}_1$, $A\mathbf{v}_2 = б_2\mathbf{u}_2$, …, $A\mathbf{v}_r = б_r\mathbf{u}_r$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ são ve.p. de A^TA

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_r\}$ são ve.p. de AA^T

$$б_1 \geq б_2 \geq \ldots \geq б_r > 0$$

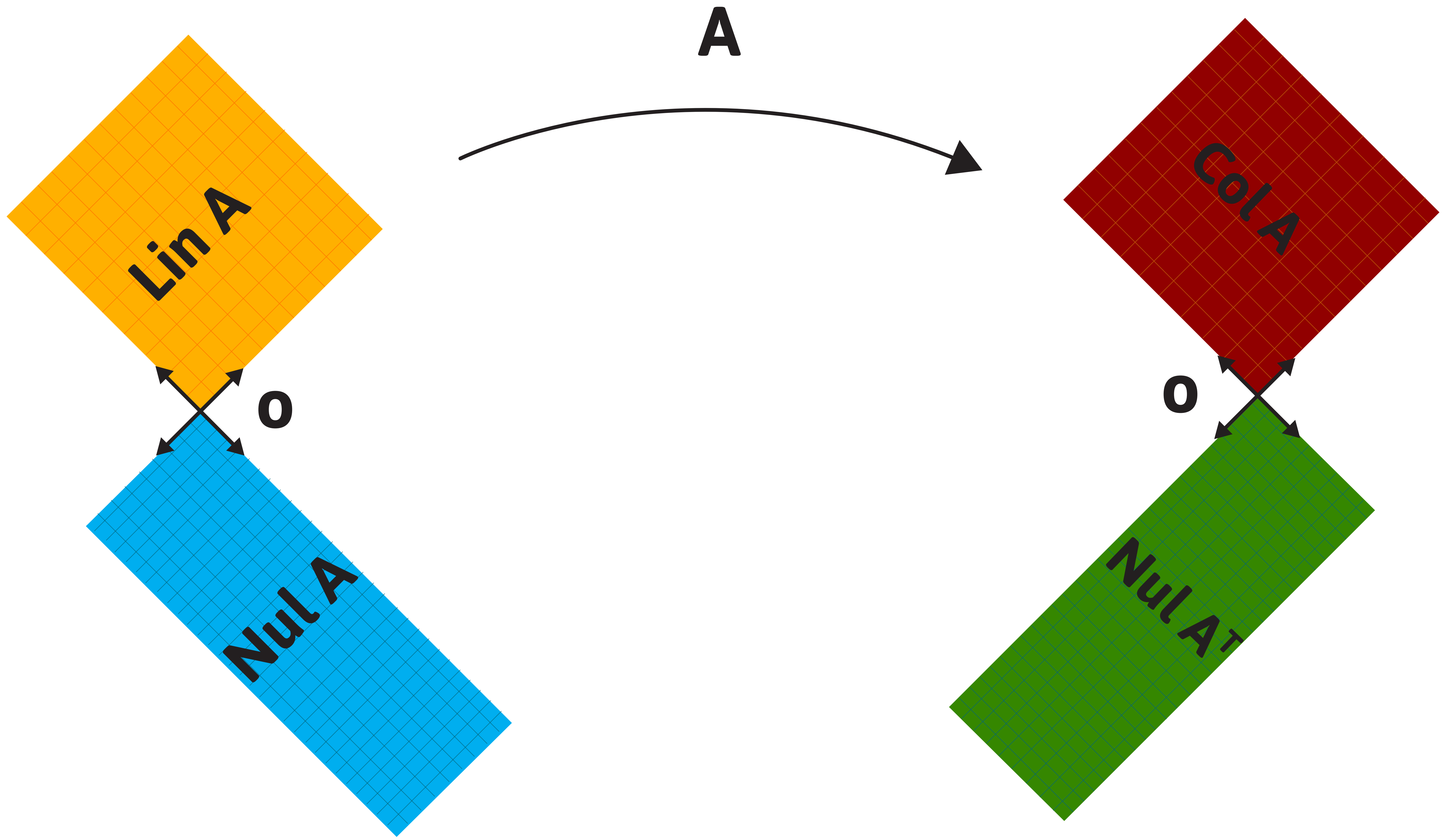
Decomposição em valores singulares (SVD)

Para qualquer matriz mxn t.q. car A=r, temos

$$A = U\Sigma V^T = u_1 \sigma_1 v_1^T + u_2 \sigma_2 v_2^T + \ldots + u_r \sigma_r v_r^T$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$$

Visão geral de uma matriz: os quatro espaços



Matriz simétrica (ex. 1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda\,(1-\lambda)\,(\lambda-3) = 0$$

va.p : λ_1 λ_2 λ_3

ve.p : $\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$

Matriz simétrica (ex. 1)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda\,(1-\lambda)\,(\lambda-3) = 0$$

va.p : $3 \qquad 1 \qquad 0$

ve.p : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

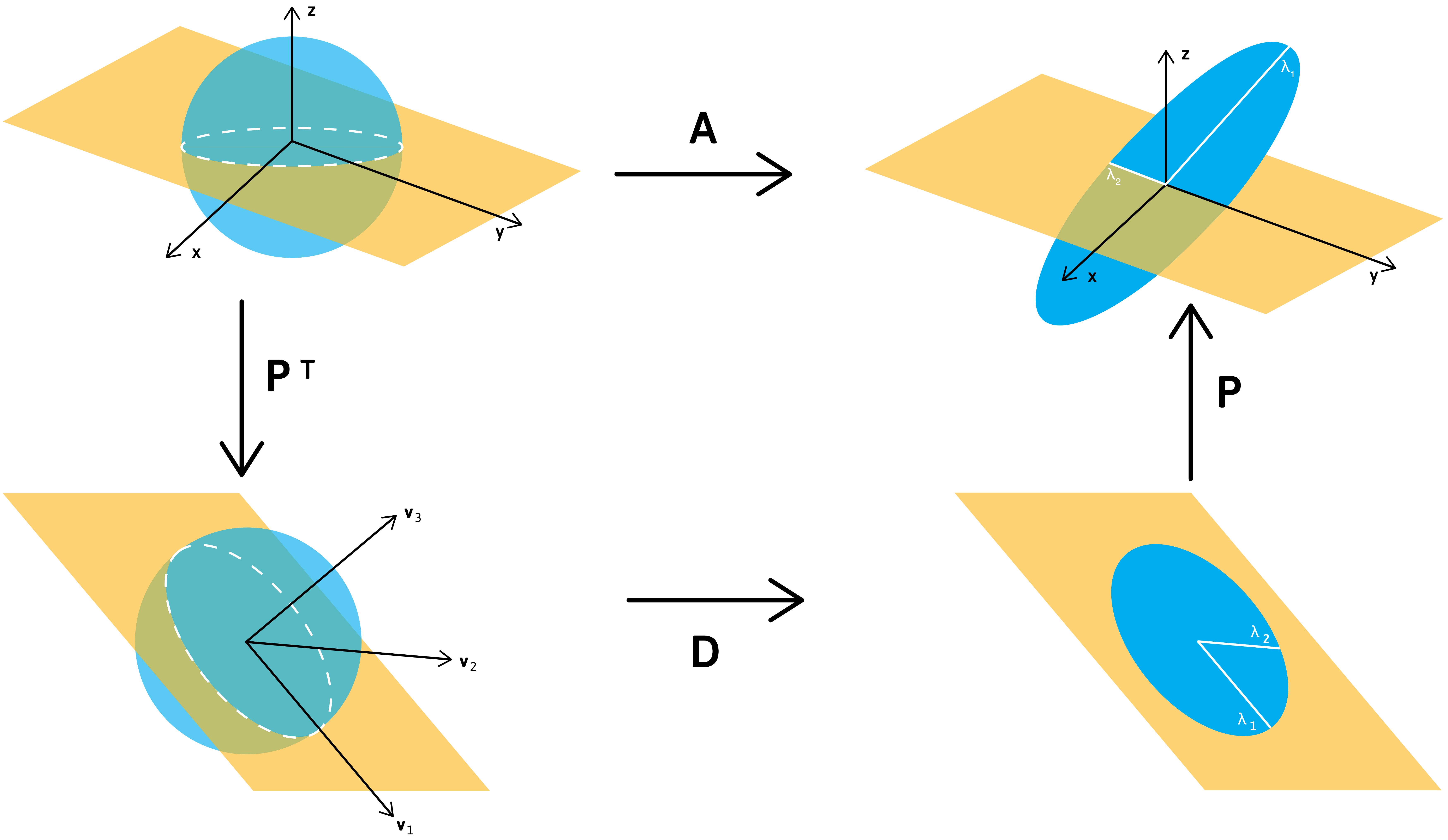
Diagonalização ortogonal

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & P & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & D & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & P^T & \end{bmatrix}$$

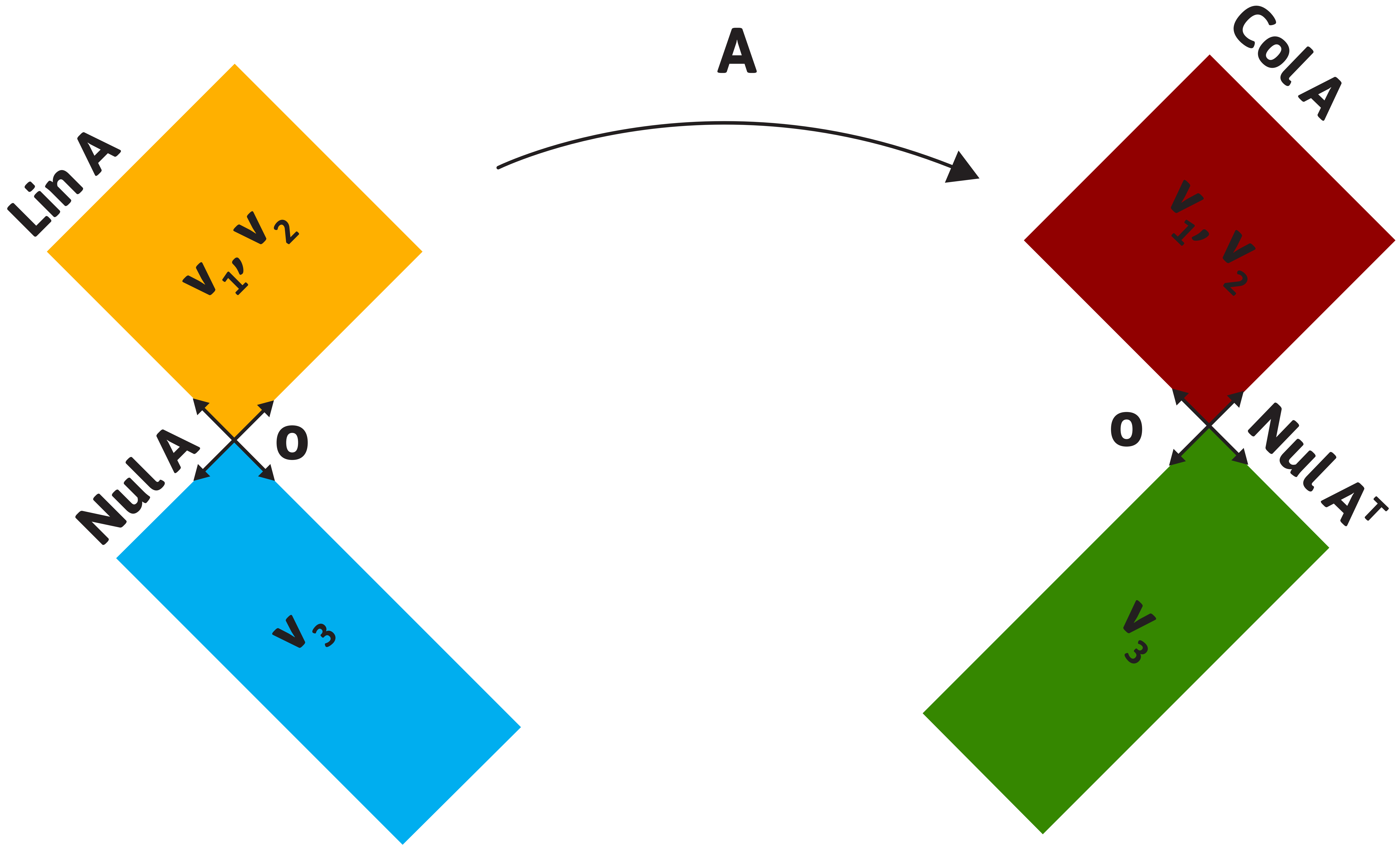
Diagonalização ortogonal

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underset{\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3}{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \mathbf{v}_3^T \end{matrix}$$

A geometria da fatorização $A = PDP^T$



Os quatro espaços



Matriz retangular (ex. 2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Lin } A = \text{Lin } A^T A$$

Matriz retangular (ex. 2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Col } A = \text{Col } AA^T$$

va.p. e ve.p de A^TA e de AA^T

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{matrix}$$

Passo 1: va.p. de $A^T A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p(\lambda) = \lambda\,(1-\lambda)\,(\lambda-2)$$

va.p : 2, 1, 0

Passo 2: base ortonormal de va.p. de $A^T A$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

va.p : 2 1 0

Passo 3: base ortonormal de ve.p. de AA^T

Usamos $A\mathbf{v}_1 = \sqrt{2}\mathbf{u}_1$, $A\mathbf{v}_2 = 1\mathbf{u}_2$,

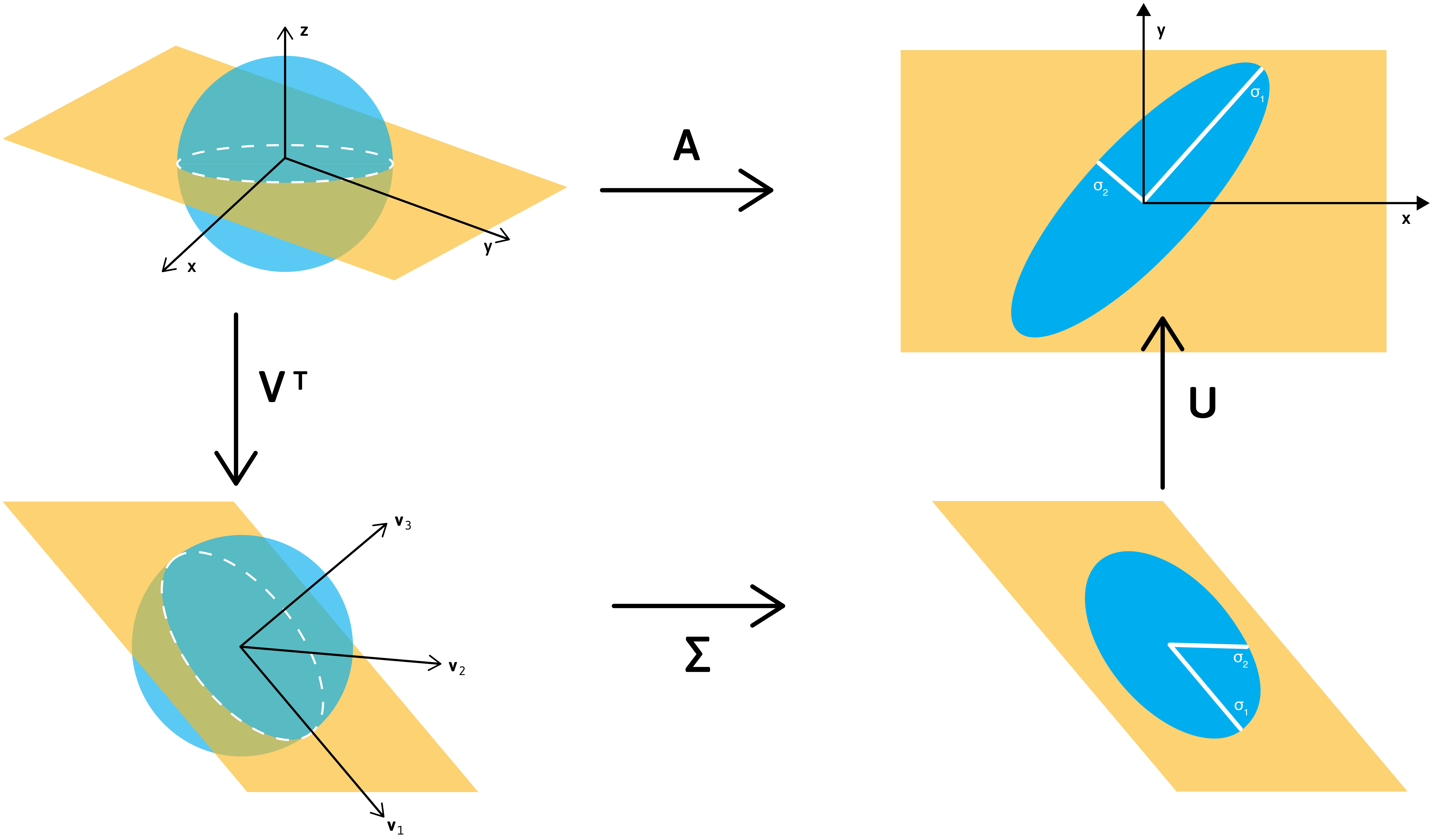
$$\mathbf{u}_1 = \frac{A\mathbf{v}_1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

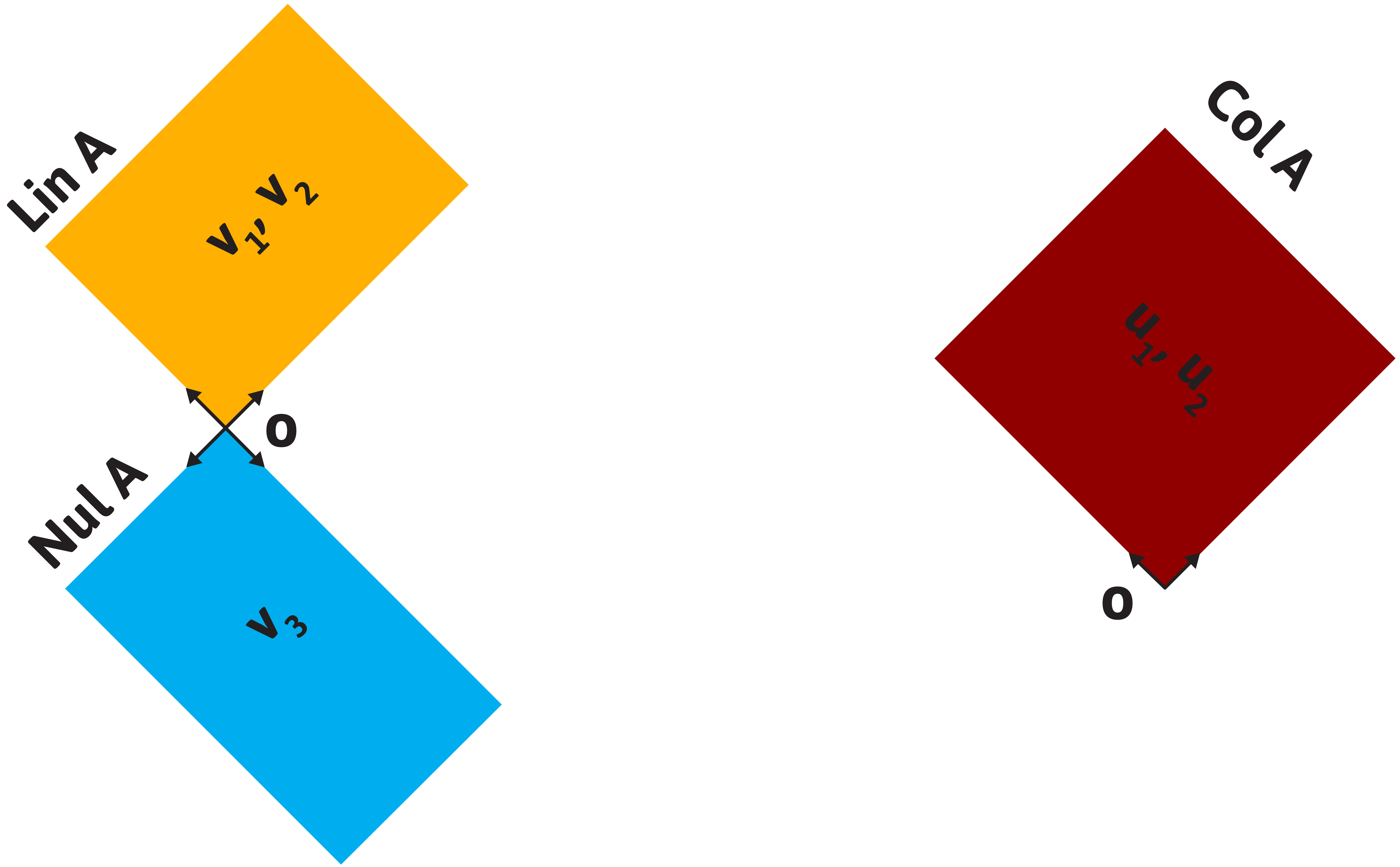
Fatorização SVD: $A = U\Sigma V^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

A geometria da fatorização $A = U\Sigma V^T$



A visão de uma matriz: os quatro espaços



Decomposição em fatores singulares

Temos car A=2 e

$$A = \mathbf{u}_1\sqrt{2}\mathbf{v}_1^T + \mathbf{u}_2\mathbf{1}\mathbf{v}_2^T = \sqrt{2}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Decomposição em valores singulares (SVD)

Para qualquer matriz mxn t.q. car A=r, temos

$$A = U\Sigma V^T = u_1 \sigma_1 v_1^T + u_2 \sigma_2 v_2^T + \dots + u_r \sigma_r v_r^T$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

Muito obrigada

mooc.tecnico.ulisboa.pt