

Visualização com SVD

EIM 2018

Ana Moura Santos

SVD

...the SVD finds application in problems involving large matrices, with dimensions that can reach into the thousands.

**Kalman (2002)*

Valores singulares de A $m \times n$

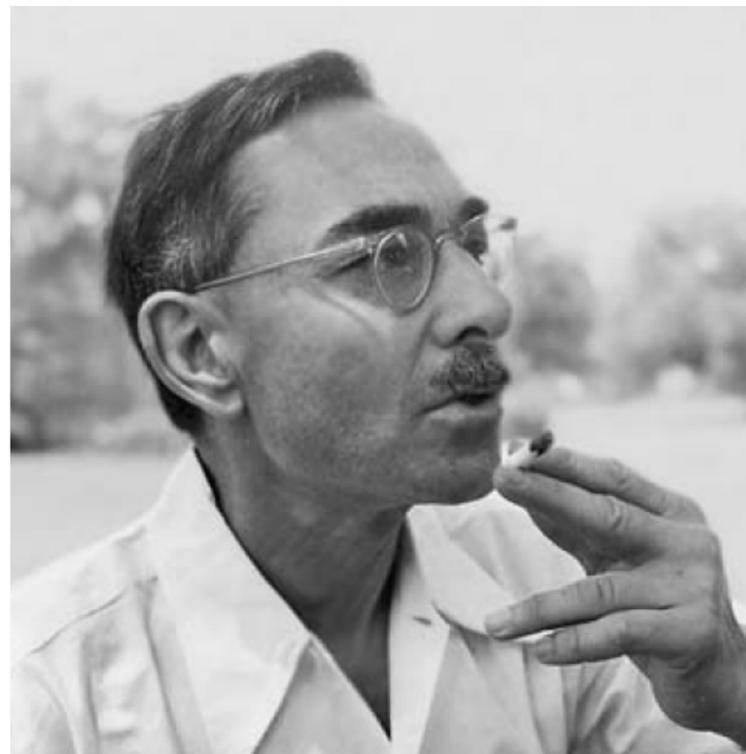
Temos $A\mathbf{v}_1 = \sigma_1 \mathbf{u}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \sigma_2 \mathbf{u}_2$, ..., $A\mathbf{v}_r = \sigma_r \mathbf{u}_r$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$ são ve.p. de $A^T A$

$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_r\}$ são ve.p. de AA^T

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

Métodos numéricos: Kogbetlianz (´55), Hestenes (´58), Golub (´65, ´70)



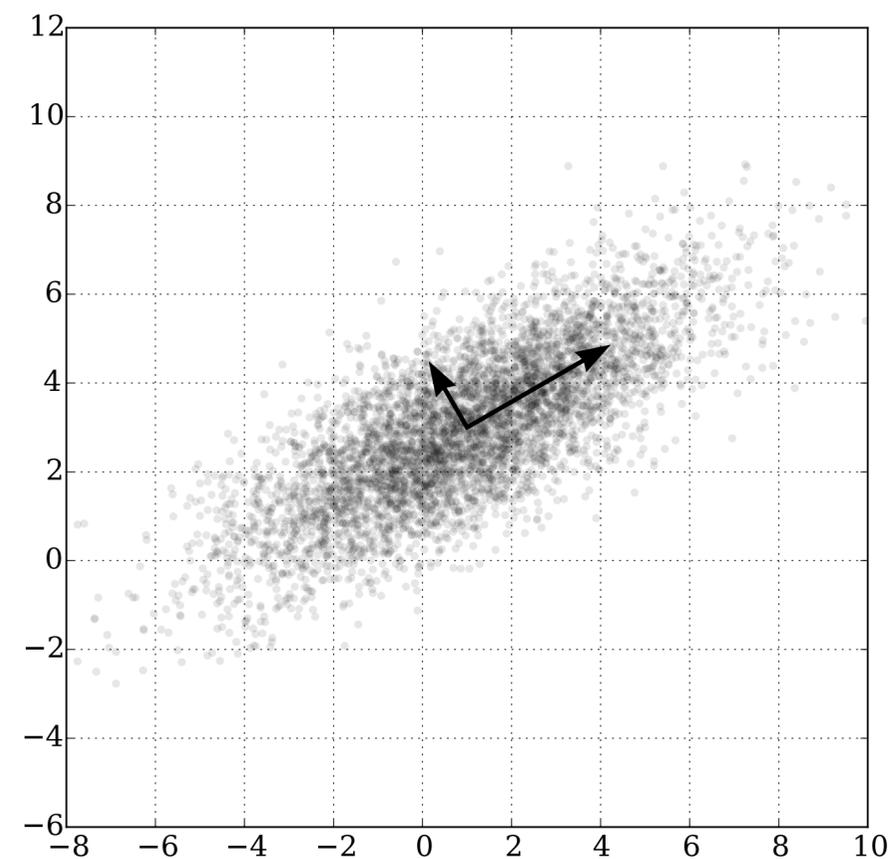
Decomposição em valores singulares (SVD)

Para qualquer matriz $m \times n$ t.q. $\text{car } A=r$, temos

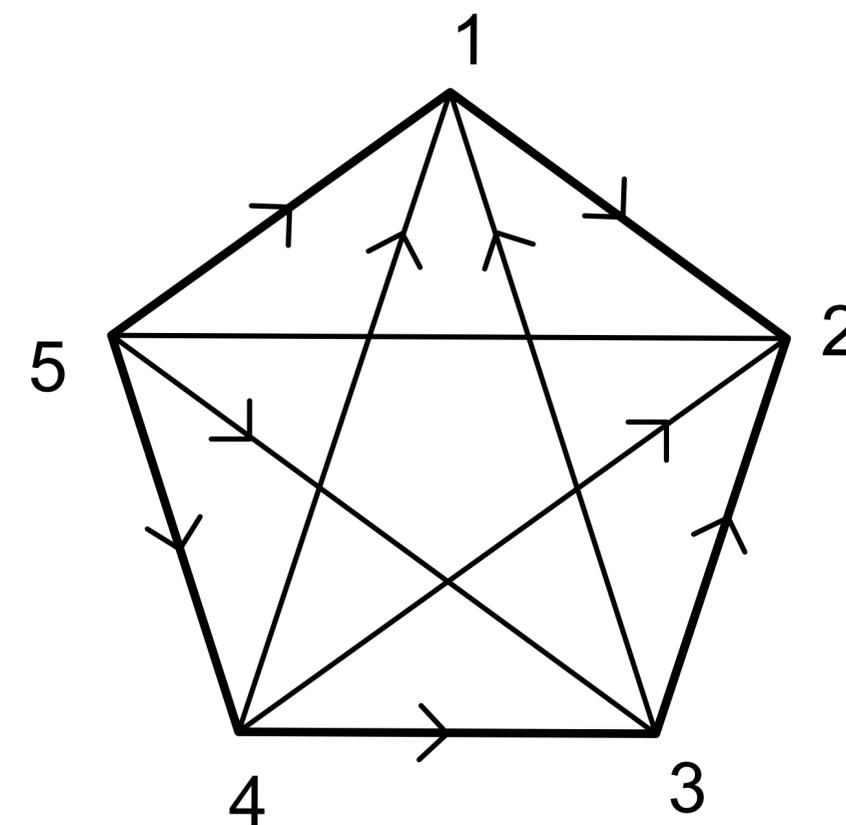
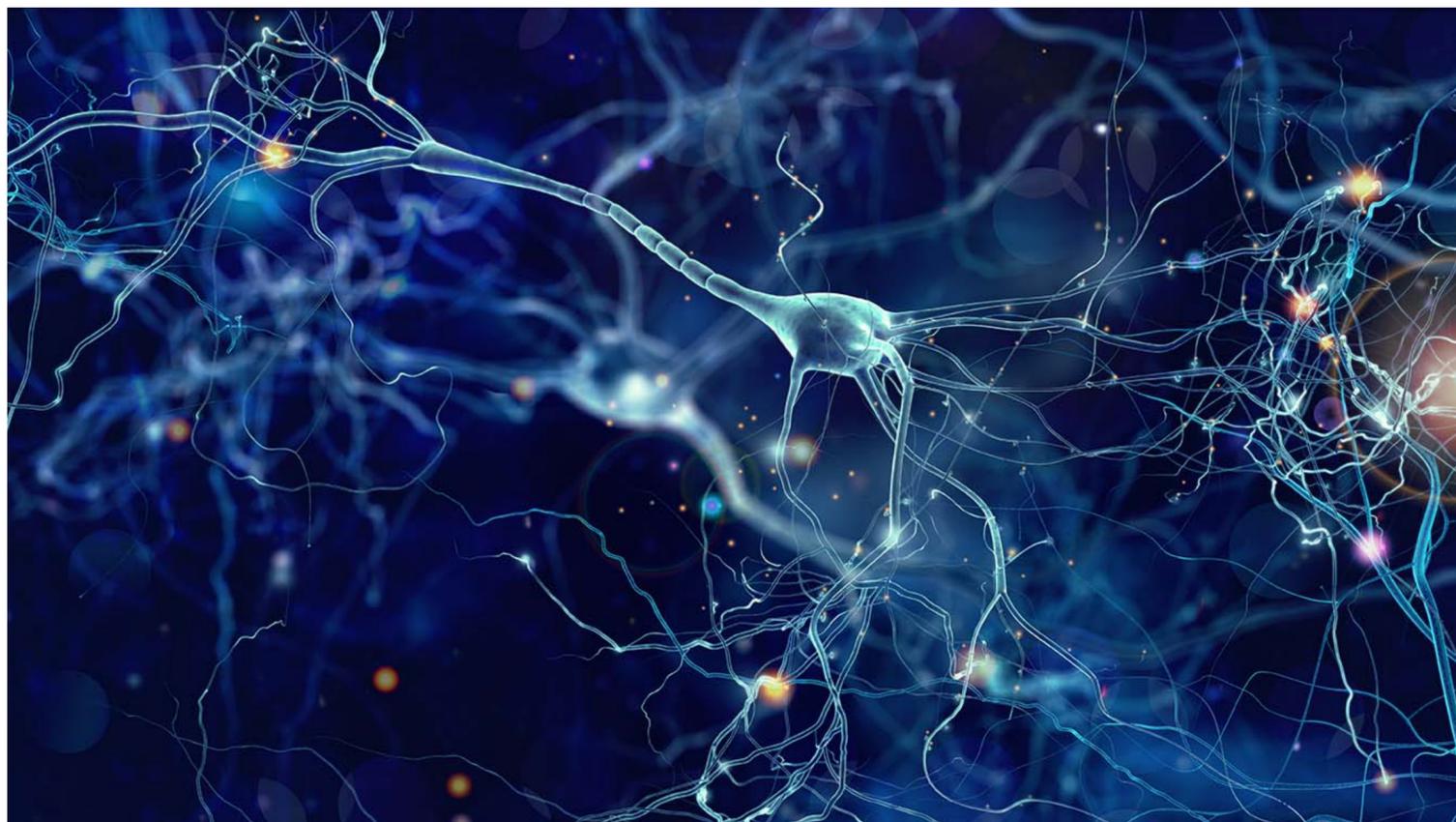
$$A = U \Sigma V^T = u_1 \sigma_1 v_1^T + u_2 \sigma_2 v_2^T + \dots + u_r \sigma_r v_r^T$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$$

PCA, JPEG e redes neuronais



PCA, JPEG e redes neuronais



Estatísticas

Dados estatísticos vêm, muitas vezes, em matrizes $p \times N$, com mais colunas do que linhas: muitas observações, para um número mais reduzido de parâmetros.

Altura	170	150	165	180
Peso	64	45	55	70

Média e covariância amostrais

Matriz de
observações

$$[X_1 \dots X_N]$$

$p \times N$

Média
Amostral

$$M = \frac{1}{N} (X_1 + \dots + X_N)$$

$$\hat{X}_K = X_K - M$$

$$1 \leq K \leq N$$

Matriz dos
desvios-médios

$$B = [\hat{X}_1 \dots X_N]$$

$p \times N$

Matriz de
covariância

$$S = \frac{1}{N-1} BB^T$$

$p \times p$
Simétrica

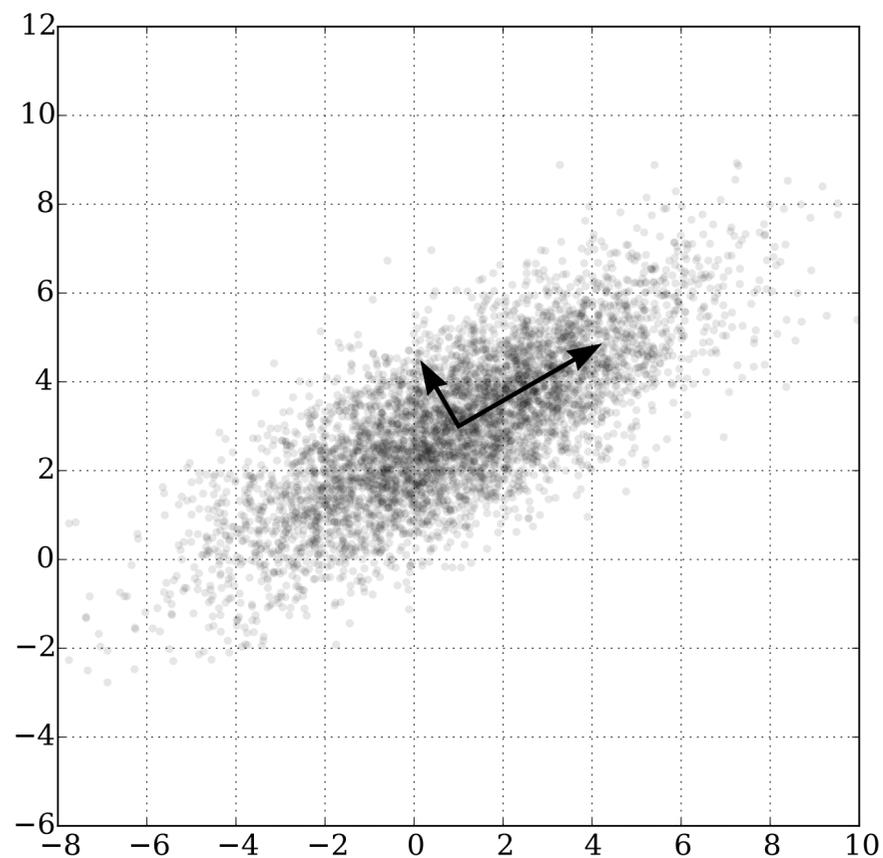
Valores singulares

- B_1 , $p \times p$, de desvios-médios
- $A = \frac{1}{\sqrt{N-1}} B^T$ e $A^T = \left(\frac{1}{\sqrt{N-1}} B^T \right)^T = \frac{1}{\sqrt{N-1}} B$; logo, $\frac{1}{\sqrt{N-1}} B B^T = S$
- O quadrado dos valores singulares de A são os valores próprios de S
- Os vetores em V (à direita de Σ está V^T) são os componentes principais dos dados

Valores singulares

- Os vetores em V (à direita de Σ está V^T) são os componentes principais dos dados
- Existem métodos iterativos que permitem calcular rapidamente e com bastante exatidão os valores e vetores singulares de uma matriz A , sendo preferível recorrer à decomposição em valores singulares (SVD) de A , em vez de calcular os valores e vetores próprios de S .

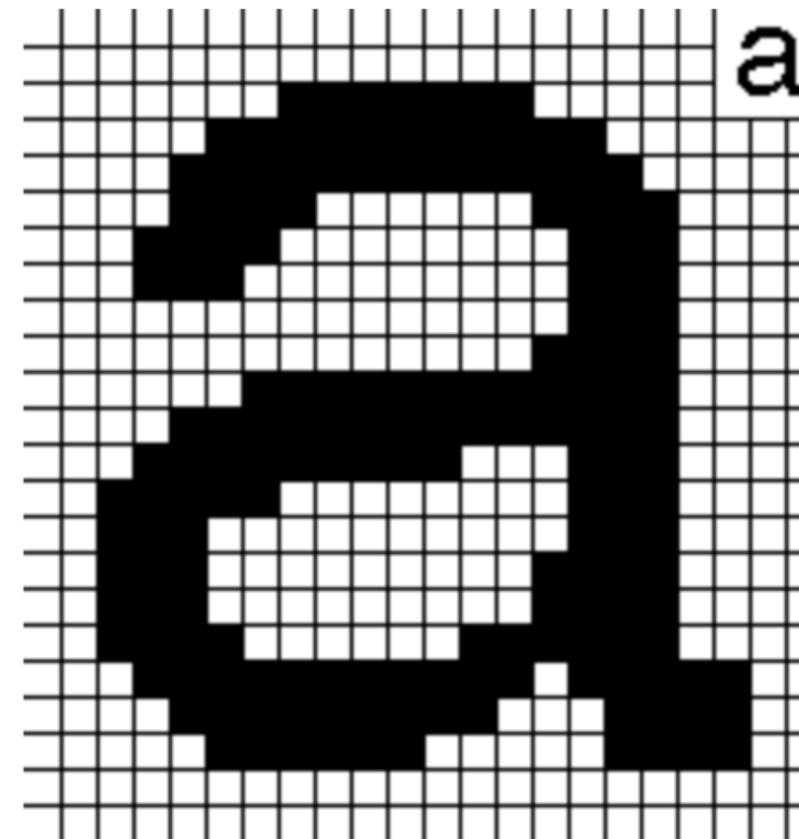
PCA e valores singulares



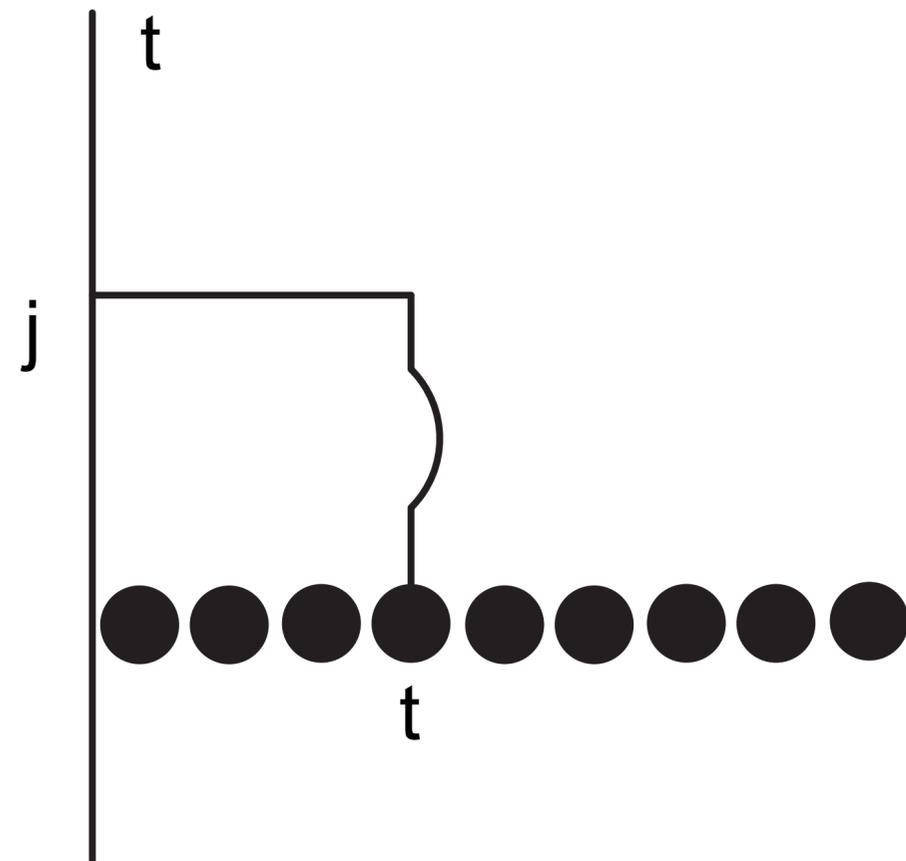
(**** matriz Σ dos valores singulares **)

$$\begin{bmatrix} 26.1176 & 0 & 0 \\ 0 & 3.53124 & 0 \\ 0 & 0 & 2.40459 \end{bmatrix}$$

Processamento de imagem: armazenar e comprimir um “a”



Rede de 9 neurónios com potenciais medidos em 16 instantes de tempo



Muito obrigada

ana.moura.santos@tecnico.ulisboa.pt