

O GPS e a Teoria da Relatividade

José Natário

(Instituto Superior Técnico)

Lisboa, Março de 2014

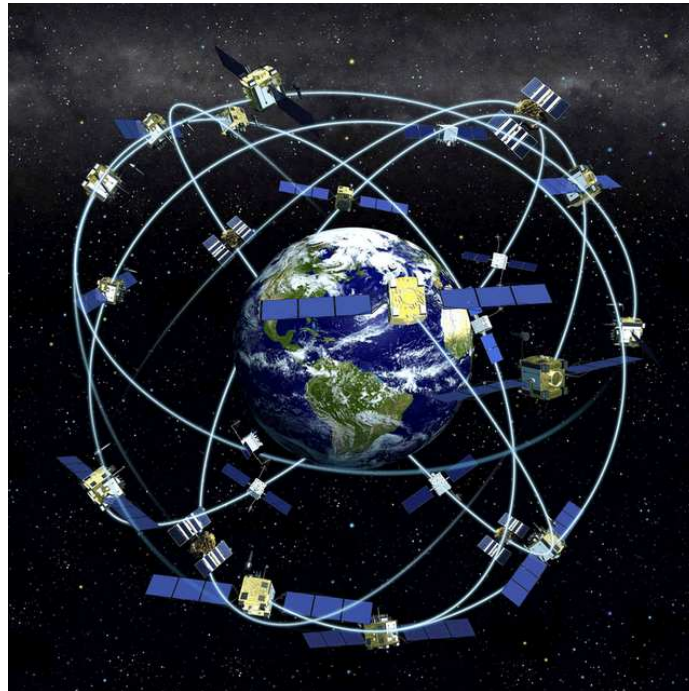
<http://www.math.ist.utl.pt/~jnatar/lectures/GPS.pdf>

GPS

Como funciona um receptor de GPS?

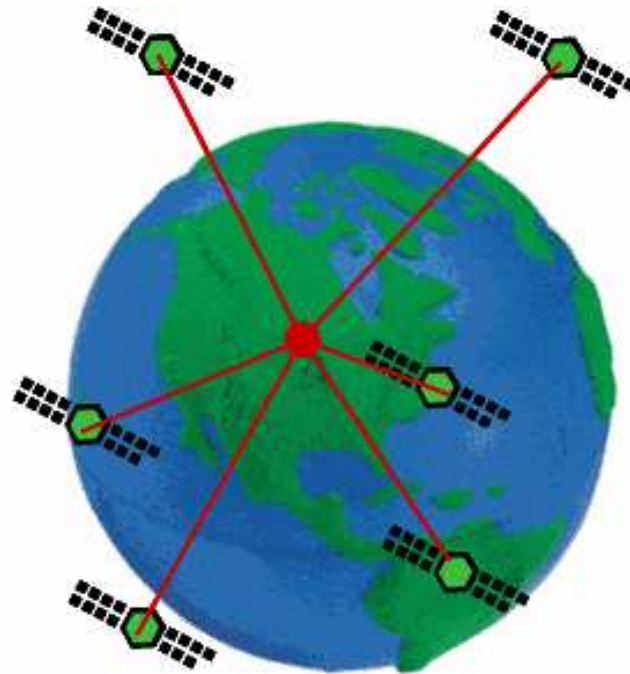


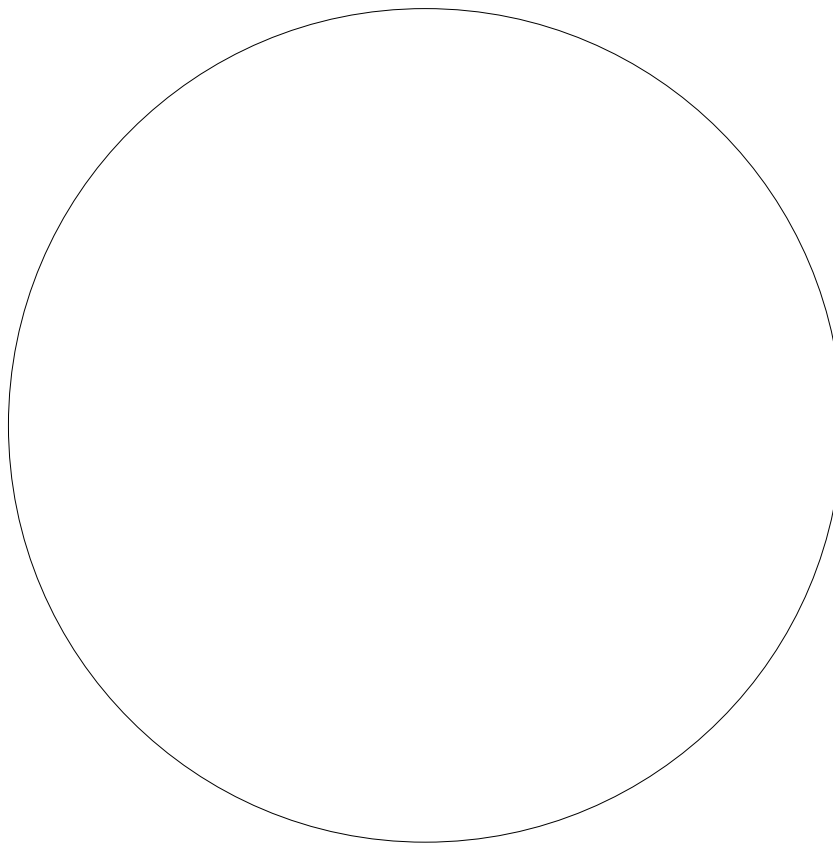
Baseado numa **constelação** de satélites em órbita.

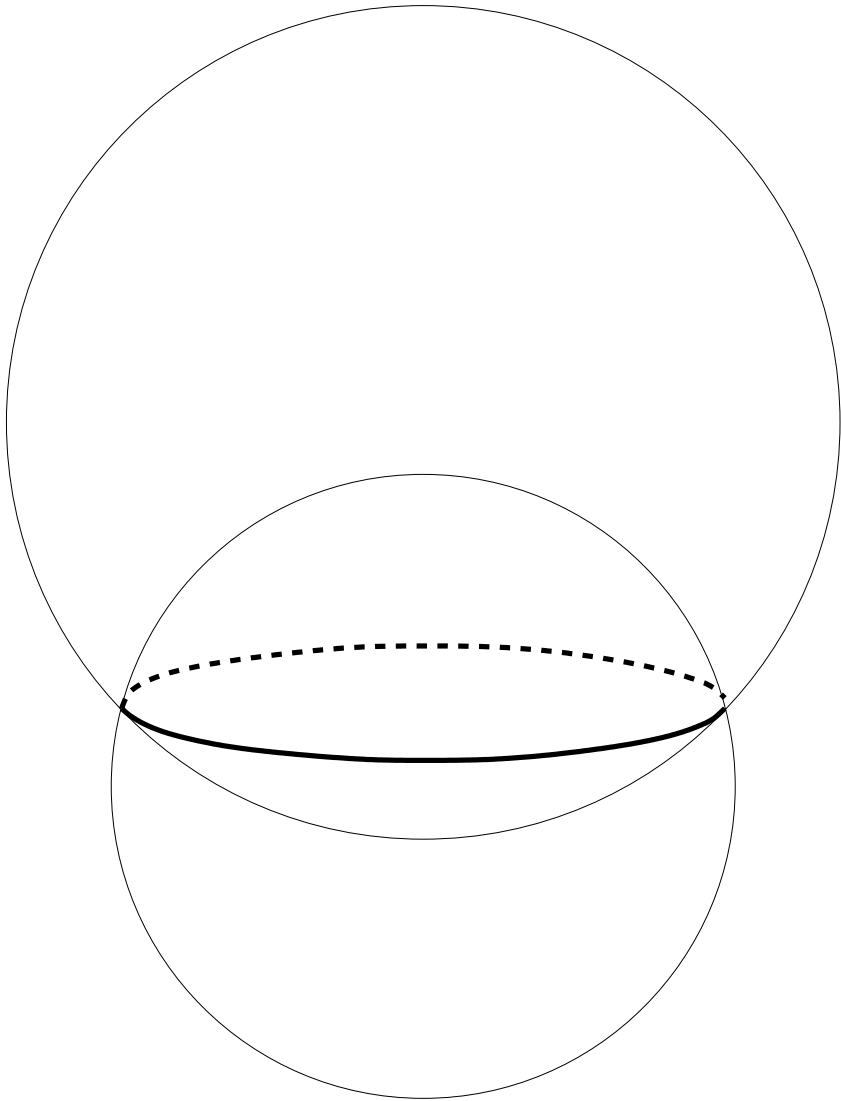


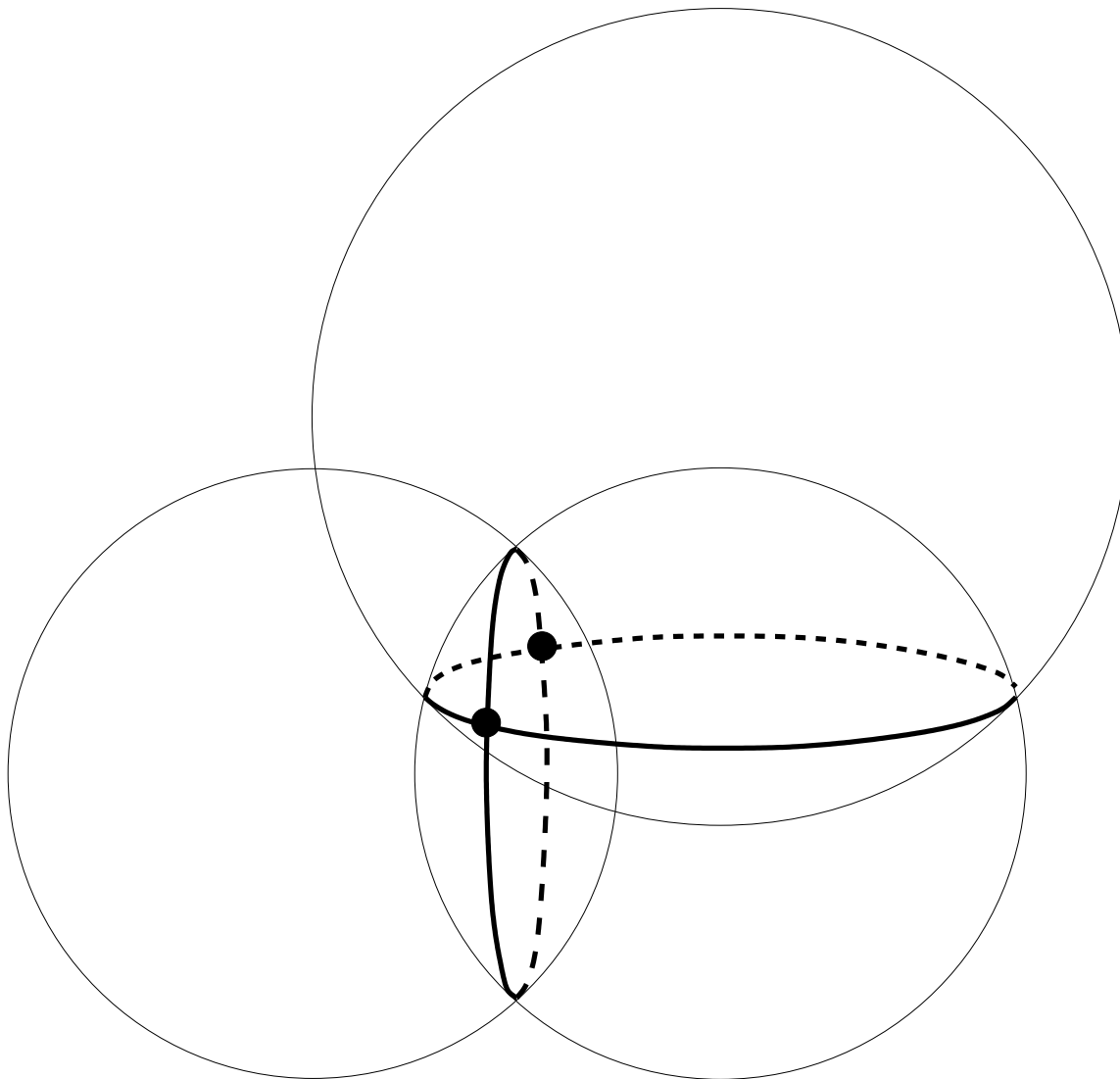
Os satélites emitem sinais com indicação da **hora** e do **local exacto** em que se encontram.

O receptor calcula a distância aos satélites pela **diferença** entre a **hora de emissão** e a **hora de recepção**, e obtém a sua posição por **trilateração**.









Matematicamente, o receptor resolve um sistema de três equações quadráticas

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t - t_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t - t_3)^2 \end{cases}$$

para obter a sua posição (x, y, z) no instante t em que recebe os sinais.

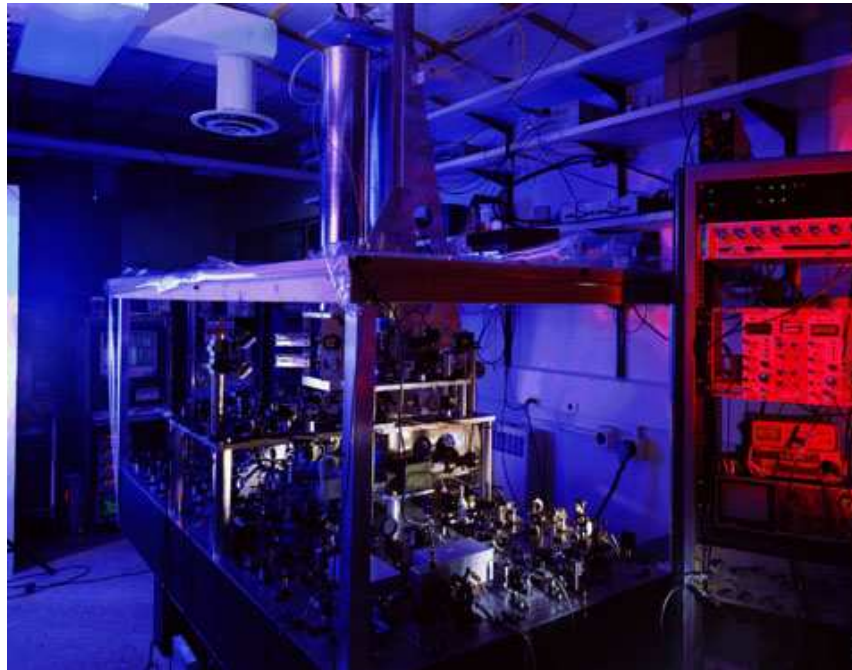
Velocidade da luz: $c = 30$ centímetros por nano-segundo!

1 segundo = 1000 mili-segundos

1 mili-segundo = 1000 micro-segundos

1 micro-segundo = 1000 nano-segundos

Para conseguir esta precisão é preciso usar relógios atômicos nos satélites.



Mas o receptor possui apenas um relógio vulgar!

Matematicamente, o receptor resolve o sistema de **quatro** equações quadráticas

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t - t_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t - t_3)^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = c^2(t - t_4)^2 \end{cases}$$

para obter a sua posição (x, y, z) e o instante t em que recebe os sinais. Deste modo o receptor pode também funcionar como um relógio muito preciso (**tempo GPS**).

Que horas são?

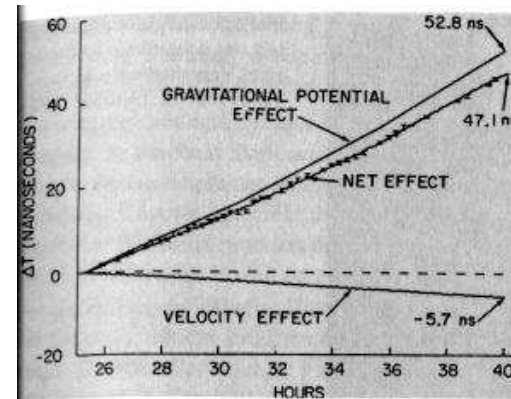
Será que o tempo medido por todos os relógios coincide?



À primeira vista: sim!

Medindo cuidadosamente: **não!**

Em Outubro de 1971, Hafele e Keating levaram quatro relógios de césio em voos comerciais à volta da Terra (uma vez para leste e uma vez para oeste) e compararam com os relógios do Observatório Naval dos Estados Unidos. Os relógios atrasaram-se/adiantaram-se 60/270 nano-segundos!

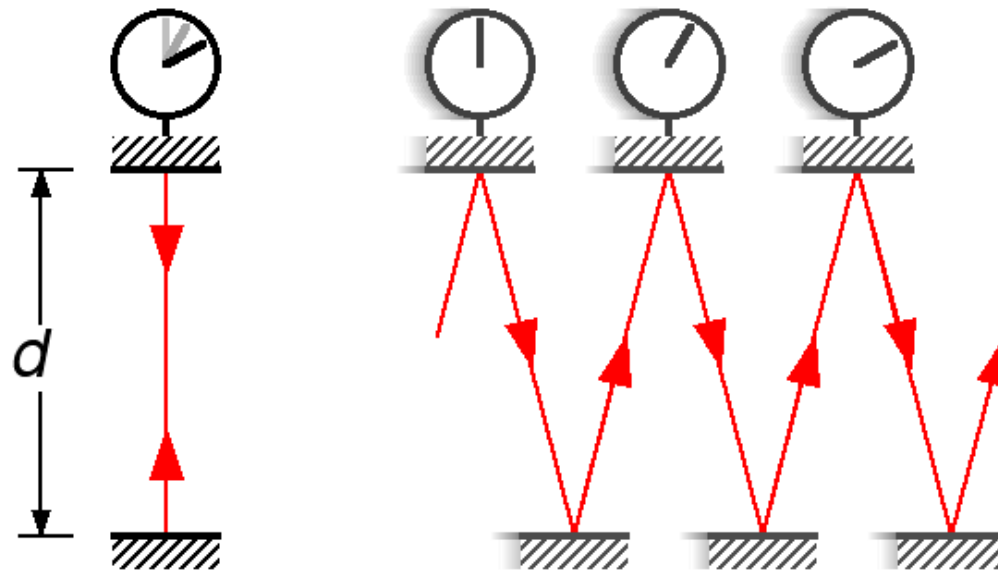


Relatividade Restrita (1905)

É um facto experimental que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores!

O que é a velocidade? $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

A solução de Einstein: o tempo decorre a ritmos diferentes observadores com diferentes velocidades!



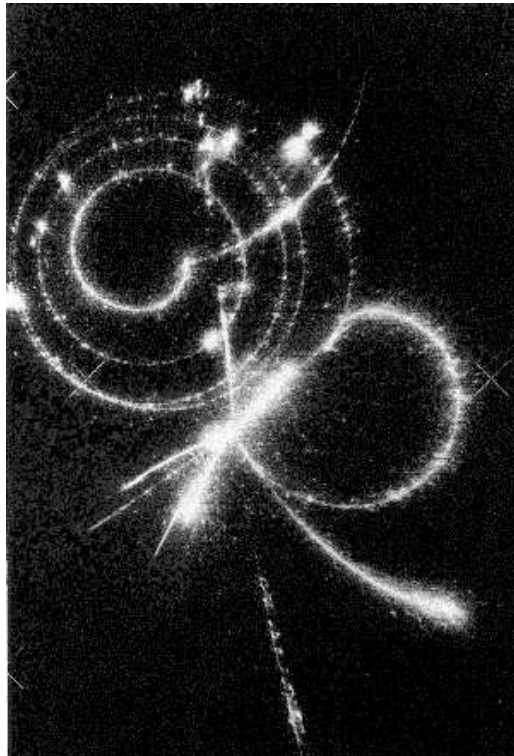
Relógios em movimento **atrasam-se**: $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$

Esta diferença só é apreciável para velocidades comparáveis à da luz (300 000 quilómetros por segundo).

Velocidade do veículo mais rápido jamais construído (sonda Helios 2, lançada em 1976): 70 quilómetros por segundo (0,02% da velocidade da luz).



Em Física de partículas esta dilatação do tempo é observada rotineiramente.



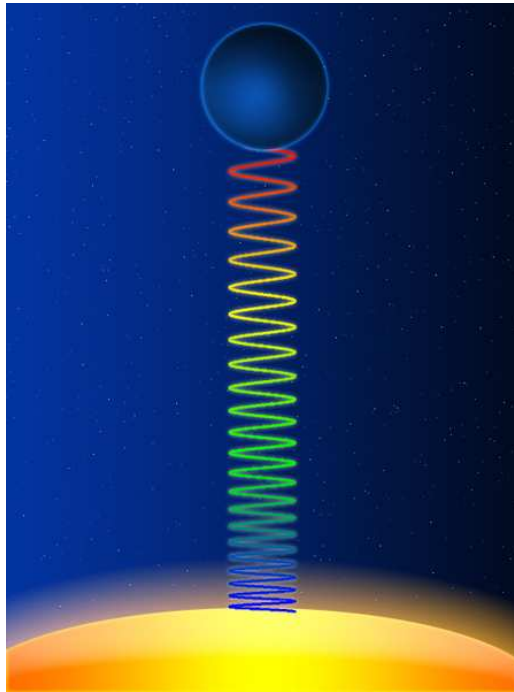
Relatividade Geral (1915)

Um objecto atirado para cima perde energia cinética $\Delta E = mgh$ à medida que sobe.

Isto tem que ser verdade também para um fóton, com $m = E/c^2$.

Da relação de Planck $E = hf$ vemos que a **frequência** do fóton diminui, ou seja, o seu **período** aumenta.

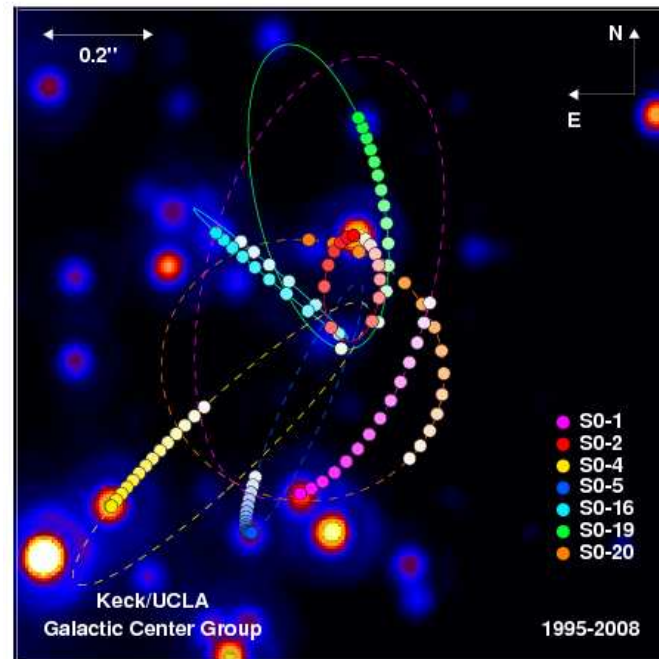
O resultado mantém-se se substituirmos o período dos fótons pelo período de uma luz intermitente. **Como é possível?**



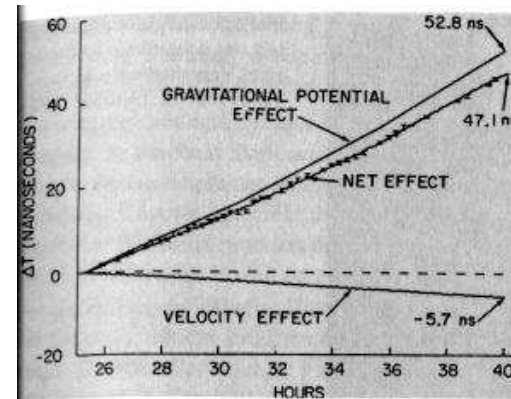
A solução de Einstein: o tempo decorre a ritmos diferentes para observadores em diferentes locais num campo gravitacional!

Relógios a grande altitude **adiantam-se**: $\Delta t' = \Delta t \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right)$

Na vizinhança de um **buraco negro** existem locais onde o tempo passa a um ritmo arbitrariamente baixo.



Em Outubro de 1971, Hafele e Keating levaram quatro relógios de césio em voos comerciais à volta da Terra (uma vez para leste e uma vez para oeste) e compararam com os relógios do Observatório Naval dos Estados Unidos. Os relógios atrasaram-se/adiantaram-se 60/270 nano-segundos!



GPS e Relatividade

Dessincronização entre os relógios de Terra e os relógios dos satélites:

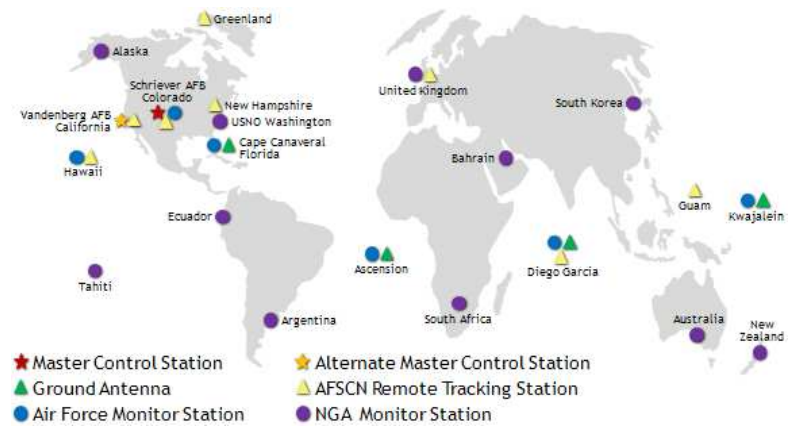
$$\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{TERRA}} \simeq 1 - \frac{3v^2}{2c^2} + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{gR}{c^2} \simeq 1 + 4,5 \times 10^{-10}$$

Ao fim de um dia:

$$4,5 \times 10^{-10} \times 24 \times 3600 \times 10^9 \simeq 40\,000 \text{ nano-segundos.}$$

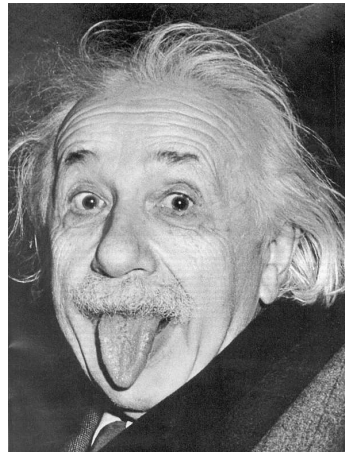
À velocidade da luz, isto corresponde a $40\,000 \times 0,3 = 12\,000$ metros!

Na realidade o problema não é tão grave, porque o receptor usa o tempo dos satélites. Mas para os satélites saberem a sua posição têm que recorrer a **estações de rastreio** em Terra.



Para pensar

Quando Einstein desenvolveu a Teoria da Relatividade não tinha nenhuma aplicação prática em mente.



“A alta tecnologia que tanto apreciamos hoje em dia é essencialmente uma tecnologia matemática.” – Edward B. David, ex-presidente da Exxon Research.