

The mathematical work of J. Sotomayor: bifurcation theory and qualitative theory of principal lines

Ronaldo A. Garcia

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal de Goiás



I



8th IST -IME Meeting

Tribute to Jorge Sotomayor (03/25/1942 - 01/ 07/2022)

September 2, 2022



Honoring Giorgio Fusco

8th IST-IME Meeting

September 5-9, 2022
Instituto Superior Técnico
Lisboa, Portugal

<https://istime.math.tecnico.ulisboa.pt>

This meeting, whose scope comprises Ordinary and Partial Differential Equations and related topics, aims to promote integration of researchers of both IST and IME (and other institutions), with the presentation of research works and plenary lectures of the participants.

This edition will honor **Giorgio Fusco** who has been a major contributor to the IST-IME link.

The meeting will also include a special session in memoriam **Jorge Sotomayor** (1942-2022) who had strong ties with the IST-IME meeting series and whose absence is sadly missed.

FCT Fundação
para a Ciência
& a Tecnologia
UID/MAT/04459/2019
UIDB/04459/2020

Tese - Sotomayor/ IMPA (1964)

COMISSÃO DE POS-GRADUAÇÃO DA UNIVERSIDADE DO BRASIL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

JORGE SOTOMAYOR

ESTABILIDADE ESTRUTURAL DE PRIMEIRA ORDEM

E

VARIEDADES DE BANACH

TESE DE DOUTORAMENTO

RIO - 1964

COMISSÃO EXAMINADORA

Professôres:

Mauricio Matos Peixoto
do Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Alexandre Augusto Martins Rodrigues
da Universidade de São Paulo

Chaim Samuel Hönig
da Universidade de São Paulo

.-.-.-.

PREFÁCIO

O presente trabalho estende às variedades diferenciáveis compactas e orientáveis de dimensão dois, os resultados de A. Andronov e E. Leontovich sobre estabilidade estrutural de primeira ordem dos campos de vetores definidos num disco plano; e estabelece a estrutura de variedade diferenciável de Banach do conjunto de campos estruturalmente estáveis de primeira ordem.

Agradeço ao professor Mauricio Peixoto, por ter me sugerido o problema e acompanhado com seu constante conselho e alento o seu desenvolvimento; os seus artigos [2,3] foram o ponto de partida da presente investigação.

Desejo agradecer também aos colegas do IMPA professor I. Kupka, A. Augusto, M.L. Peixoto e A.C. Barreto pela troca de idéias sobre temas relacionados com o aqui tratado, o que teve influência positiva na presente tese.

Este trabalho contou com a ajuda parcial do Office Scientific Research U.S.A.F.

Jorge Sotomayor

I. Introdução

Consideremos uma variedade M^2 , compacta, conexa, ω -diferenciável de dimensão dois, e o conjunto \mathcal{B} de campos de vetores tangentes a M^2 .

No presente trabalho nos interessamos por campos de vetores que possuem um certo "grau de Estabilidade Estrutural"; esta frase é vaga mas pode ser precisada por meio das seguintes definições:

Definição 1. (Topologia da Proximidade Qualitativa).

Sejam δ uma métrica em M^2 , \mathcal{H} o grupo de homeomorfismos de M^2 em M^2 e $\mathcal{H}(X, Y)$ o subconjunto de \mathcal{H} constituído por homeomorfismos que transformam trajetórias do campo X em trajetórias do campo Y .

Chamamos Topologia da Proximidade Qualitativa à topologia em \mathcal{B} definida pela pseudométrica seguinte

$$e(X, Y) = \inf_H \left[\sup_p (\delta(H(p), p), p \in M^2, H \in \mathcal{H}(X, Y)) \right]$$

$$e(X, Y) = \infty \text{ se } \mathcal{H}(X, Y) = \emptyset.$$

O conjunto \mathcal{B} munido desta topologia será denotado (\mathcal{B}, Q) . Por outro lado define-se em \mathcal{B} da maneira clássica a topologia C^r $r \geq 0$, que é uma topologia de "Proximidade Quantitativa", o conjunto \mathcal{B} com esta topologia será denotado (\mathcal{B}, C^r) .

Nestes termos a definição clássica de Estabilidade Estrutural de Andronov-Pontrjagin [1] encontra o seguinte enunciado e-

quivalente.

Definição 2 - Um campo X de classe C^r $r \geq 1$ é Estruturalmente Estável se X é um ponto de continuidade da identidade de (\mathcal{G}, C^r) em $(\mathcal{G}, \mathcal{Q})$.

Noutras palavras, X é estruturalmente estável se todo campo quantitativamente próximo dele é também qualitativamente próximo.

Estes campos foram caracterizados por M.M. Peixoto [2,3], no caso $r \geq 1$ (observando-se que o caso $r = 0$ carece de interesse), sendo os resultados principais os seguintes

Teorema A - X é Estruturalmente Estável se e só se as seguintes condições são satisfeitas:

1. Possui um número finito de singularidades tôdas genéricas.
2. Os conjuntos α e ω -limite de cada trajetória só podem ser singularidades, ou trajetórias fechadas.
3. Não possui trajetórias conectando pontos de sela.
4. Possui um número finito de trajetórias fechadas tôdas genéricas.

Teorema B - O conjunto Σ de campos Estruturalmente Estáveis é aberto e denso em (\mathcal{G}, C^r) .

O complementar de Σ o denotaremos com $\mathcal{B}(1)$, aparece de forma natural o problema de caracterizar os campos $X \in \mathcal{B}(1)$ tais que todo campo $Y \in \mathcal{B}(1)$ quantitativamente próximo dêle seja também qualitativamente próximo. A êste respeito Andronov-Leontovich [4], definiram o conceito de Estabilidade Estrutural de Primeira Ordem, que em nossa terminologia se exprime pela

Definição 3 - Um campo $X \in \mathcal{H}(1)$ é Estruturalmente Estável de Primeira Ordem se X é ponto de continuidade da injeção de $(\mathcal{H}(1), C^r)$ em $(\mathcal{H}, \mathcal{Q})$, $r \geq 3$.

O conjunto de campos estruturalmente estáveis de primeira ordem será denotado por $\Sigma(1)$.

Andronov-Leontovich no trabalho acima citado anunciaram uma caracterização (provas omitidas) dos campos estruturalmente estáveis de primeira ordem, no caso de campos definidos no disco B^2 , sem contato respecto de ∂B^2 , e considerando topologia C^2 neste conjunto de campos.

Neste trabalho entendemos a caracterização de Andronov-Leontovich para o caso de campos de classe C^r $r \geq 3$ com topologia C^r , sobre uma variedade M^2 orientável. (Teorema 1) Também demonstramos que o conjunto de campos Estruturalmente Estáveis de primeira ordem é uma subvariedade de Banach de classe C^r é de codimensão um do espaço de Banach (\mathcal{H}, C^r) $r \geq 3$ de campos de classe C^r com topologia C^r . (Teorema 2).

O fato de considerar classe e topologia C^r $r \geq 3$ é fundamental e isso por razões puramente locais; na realidade a caracterização de Andronov-Leontovich só é válida para classe $r \geq 3$ e não para $r = 2$, ao contrário do que se encontra dito em [4]. Na demonstração do Teorema 1 para o caso de ser M^2 não orientável encontramos uma dificuldade que não conseguimos superar; o Teorema 2, porém, continua válido para M^2 não orientável (Observação 1).

O Teorema 2 constitui um análogo do Teorema B de M. Peixoto e fornece exemplos claros de bifurcação de famílias a um parâ-

metro de campos de vetores, (i.e. curvas diferenciáveis em $(\mathbb{R}^r, \mathbb{C}^r)$) nos pontos de interseção transversal com $\Sigma(1)$.

II. Os Teoremas de Caracterização e Imersão

A fim de enunciar os teoremas, fixaremos a seguinte terminologia e notação.

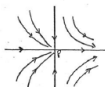
1. Singularidades: Se $\Delta(X)$ e $\sigma(X)$ denotam o determinante e o traço da matriz jacobiana das componentes contravariantes de X num sistema de coordenadas, diremos que uma singularidade p de X é genérica se $\Delta(X)(p) < 0$ ou se $\Delta(X)(p) > 0$ e $\sigma(X)(p) \neq 0$. No primeiro caso p é uma sela e no segundo um nó ou um foco segundo as raízes características da matriz jacobiana sejam reais ou complexas. A seguir definiremos duas singularidades ditas genéricas de primeira ordem.

Sela-nó - Uma singularidade p do campo X é denominada sela-nó se $\Delta(X)(p) = 0$, $\sigma(X)(p) \neq 0$, e $\frac{\partial^2 \sigma(X)}{\partial v_0^2} \neq 0$, onde $\sigma(X) = \langle X, v_0 \rangle \langle v_1, v_1 \rangle - \langle X, v_1 \rangle \langle v_0, v_1 \rangle$, sendo v_0, v_1 os vetores característicos da matriz jacobiana de X no ponto p , num sistema de coordenadas em torno de p , \langle, \rangle denota a métrica euclídeana em \mathbb{R}^2 , e v_0 o vetor associado à raiz característica nula. Escolhendo eixos coordenadas paralelos e os vetores característicos um campo com uma sela-nó na origem tem componentes

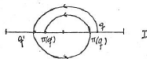
$$X_1(x_1, x_2) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2 + o((x_1^2 + x_2^2))$$

$$X_2(x_1, x_2) = \lambda x_2 + o((x_1^2 + x_2^2)^{1/2}), \text{ onde } a, \lambda \neq 0.$$

Uma sela-nó, apresenta dois setores hiperbólicos, um setor nodal, três separatrizes e o seu índice de Poincaré é igual a zero. [5]. Fig. 1a



a



b

Fig. 1

A outra singularidade genérica de primeira ordem é o foco composto i.e. $\Delta(X)(p) > 0$, $\sigma(X)(p) = 0$, $\Pi^*(X)(p) \neq 0$ donde $\Pi(X)$ é a transformação de um segmento I com origem em p tal que $\Pi(X)(p) = 0$, e $\Pi(X)(q)$ é o ponto onde a trajetória positiva que passa por q corta pela primeira vez o semi-segmento de I que contém o ponto q , ver Fig. 1 b.

A transformação $\Pi(X)$ é da mesma classe de diferenciabilidade que X e a relação $\sigma(X)(p) = 0$ implica

$$1- \Pi^*(X)(p) = \Pi^*(X)(p) = 0. \text{ (Lema 3).}$$

Verifica-se facilmente que as definições das singularidades genéricas de primeira ordem independem do sistema de coordenadas escolhido.

2- Trajetórias fechadas: Sejm. γ uma trajetória fechada e I

um segmento transversal a γ num ponto p , se chamamos $\Pi(X)(q)$ ao ponto onde a trajetória positiva que passa por q corta pela primeira vez ao segmento I , a transformação $q \rightarrow \Pi(X)(q)$ é um difeomorfismo definido num subsegmento $I_0 \subset I$ contendo o ponto p , e é chamada Transformação de Poincaré (associada a γ , p , X , I_0 , I). É clássico que $\Pi(X)$ é da mesma classe de diferenciabilidade que X , a aplicação $Y \rightarrow \Pi(Y)$ está definida numa vizinhança $V(X)$ de X e é contínua de $(V(X), C^r)$ em $(\text{Dif}(I_0, I), C^r)$, $r \geq 0$.

Uma trajetória fechada γ dum campo X é dita genérica se com a notação acima $\Pi'(X)(p) \neq 1$.

γ é dita genérica de primeira ordem se $\Pi'(X)(p) = 1$ e $\Pi''(X)(p) \neq 0$.

3 - Separatrizes - Uma separatriz é dita p, α - hiperbólica (resp. ω -hiperbólica) se o seu α -limite (resp. ω -limite) é uma singularidade p , e pertence a fronteira dum setor hiperbólico desta singularidade.

Uma separatriz é dita (p, q) hiperbólica (ou simplesmente hiperbólica, quando não for preciso especificar os pontos p e q) se é p, α e q, ω hiperbólica.

Um gráfico é a reunião de um número finito de pontos singulares (P_0, P_1, \dots, P_k) e separatrizes $(P_0, P_1), (P_1, P_2), \dots, (P_{k-1}, P_k), (P_k, P_0)$ hiperbólicas.

Um gráfico γ é dito genérico de primeira se é reunião de um ponto de sela p e uma separatriz (p, p) hiperbólica, $\sigma(p) \neq 0$, e não é α (nem ω) limite de separatriz $\omega(\alpha)$ hiperbólica.

4 - Subvariedade de Banach - Se \mathcal{B} é uma variedade de Banach de classe C^r , $r > 1$, um subconjunto S de \mathcal{B} é dito uma subvariedade de \mathcal{B} de classe C^s , $s \leq r$ e co-dimensão um pròpriamente imersa em \mathcal{B} se para cada ponto $X \in S$ existe uma vizinhança $V(X)$ de X em \mathcal{B} e uma função $f: V(X) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^s tal que $df(Y)$ é sobrejetiva para $Y \in V(X)$ e $f^{-1}(0) = S \cap V(X)$.

A seguir destacamos certos subconjuntos de $\mathcal{B}(1)$.

S_1 - denotará o conjunto de campos que possuem uma singularidade genérica de primeira ordem como única singularidade não genérica, as trajetórias fechadas são tôdas genéricas, e não possui separatrizes hiperbólicas.

S_2 - denotará o conjunto de campos que possuem uma trajetória fechada genérica de primeira ordem como única trajetória fechada não genérica, que não é α e ω limite de nenhuma trajetória, nem α -limite de separatrizes ω -hiperbólicas se é ω -limite de separatrizes α -hiperbólicas.

S_3 - denotará o conjunto de campos que possuem uma única separatriz hiperbólica, tôdas suas singularidades e trajetórias fechadas são genéricas, em caso de possuir um gráfico, este é genérico de primeira ordem.

R - denotará o conjunto de campos tais que o α é ω -limite de cada trajetória, só pode ser uma singularidade, trajetória fechada, ou um gráfico (i.e. os campos para os quais se verifica o Teorema de Poincaré-Bendixon).

We now state the characterization theorem.

THEOREM 1. *In order that the vector field X be structurally stable on M^2 it is necessary and sufficient that the following conditions be satisfied:*

- (3.1) *there is only a finite number of singularities, all generic;*
- (3.2) *the α and ω -limit sets of every trajectory can only be singularities or closed orbits;*
- (3.3) *no trajectory connects saddle points;*
- (3.4) *there is only a finite number of closed orbits, all simple.*

Conditions (3.1), (3.3) and (3.4) are the ones formulated by Andronov and Pontrjagin for the case of the ball B^2 and it is immediate to see that they hold also for the sphere S^2 . Condition (3.2) implies that the theorem of Poincaré–Bendixon holds for the vector field X , a fact that is automatic when M^2 is S^2 . Thus all complicated types of recurrent motions are excluded so that structurally stable systems exhibit the simplest possible features. Conditions (3.1)–(3.4) were generalized in [3] to dimension n , the corresponding systems being the so-called Morse–Smale systems. For $n > 2$ it is known that the Morse–Smale systems are not dense in the space \mathcal{B} of all systems (Levinson, Thom, Smale) but as remarked above it is quite probable that they are structurally stable; it is also known that there are structurally stable systems exhibiting an infinite number of closed orbits (Smale).

Morse-
Smale

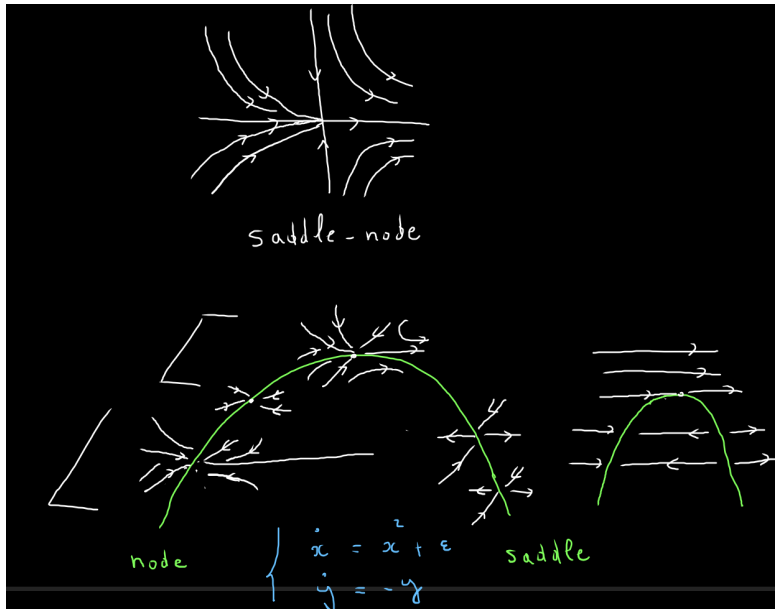
$\Sigma \subseteq \mathcal{X}^r(M^2)$, $X \in \Sigma$ structurally stable

Th. (Peixoto) i) Σ is open and dense in $\mathcal{X}^r(M^2)$

if M is orientable

ii) Only C^1 sense when M is nonorientable

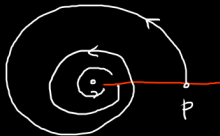
Saddle-node: codimension one. The subset \mathcal{S}_1



Hopf: codimension one. The subset \mathcal{S}_1

Return map

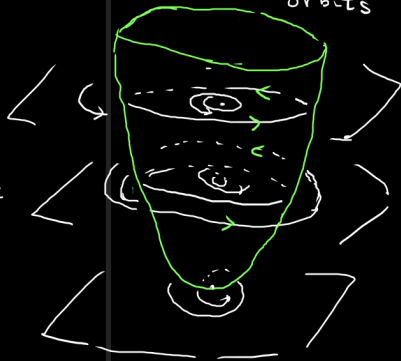
$$\pi'(0) = 1, \pi''(0) = 0, \pi'''(0) \neq 0$$



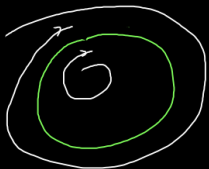
Hopf
cod 1

$$\begin{cases} \dot{r} = r + \lambda r^3 + h.o.t \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

surface of periodic orbits



Periodic orbit: codimension one. The subset \mathcal{S}_2

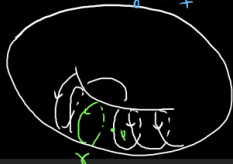


$$\pi'(0) = 1, \pi''(0) \neq 0$$



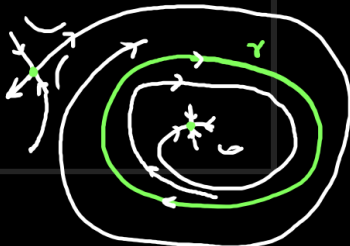
$$\begin{aligned} \pi'(0) &= -1 \\ \pi''(0) &= 0, \\ \pi'''(0) &\neq 0 \end{aligned}$$

blue sky bif.



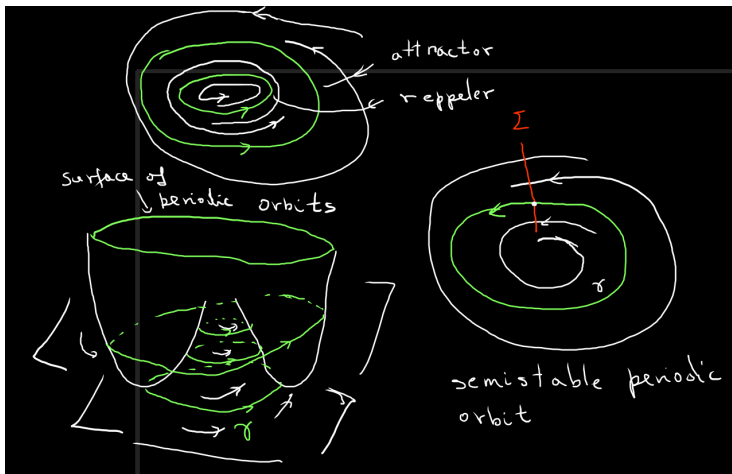
not allowed

$$\gamma = \alpha(p) = \omega(p)$$

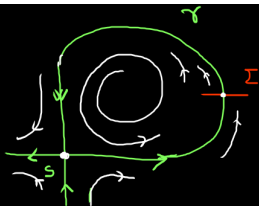


not allowed.

Surface of Periodic orbits



Saddle connection: codimension one. The subset \mathcal{S}_3

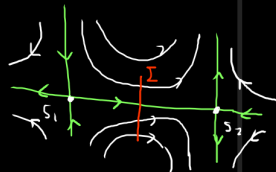


homoclinic orbit + condition
on the Dulac map

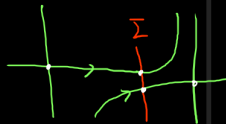
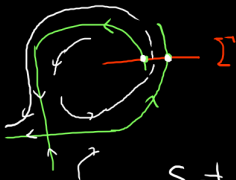
$$W^u(s) = W^s(s) = \gamma$$

$$D(x_1) = x_1 \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \dots \end{pmatrix}$$

$$\lambda \neq 1$$



$W^u(s_1) \cap W^s(s_2) = \gamma$
saddle connection



Sotomayor-Melnikov
separation function

Saddle connection: codimension one. Regularity of S_3

$$(8) \quad \frac{\partial q}{\partial Z}(Y) = - \frac{|X(q(X))|}{\langle X(q(X)), Y(q(Y)) \rangle} \int_0^{\infty} \exp(-\int_0^z \sigma(Y) du) \det(Y, Z) dz.$$

Teorema 1 (de Caracterização) - Se M^2 é uma variedade orientável, $\sum(1) = (\bigcup_{i=1}^3 S_i) \cap R$.

Teorema 2 (de Imersão) - $\sum(1)$ é uma subvariedade de Banach de (\mathbb{R}, C^r) $r \geq 3$, de classe C^1 e codimensão um.

A demonstração destes teoremas depende da série de Lemas seguinte.

III. Lemas de Caracterização Local

Neste parágrafo demonstramos alguns lemas sobre certos campos de $\mathbb{R}^3(1)$.

Os campos considerados são de classe C^r , $r \geq 3$.

Lema 1 - Seja X um campo que possui uma sela-nó p .

Existe então uma vizinhança $V(p)$ de p , uma vizinhança $V(X)$ de X , e uma função $f: V(X) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $df(X) \neq 0$ para $Y \in V(X)$ e

- a) $f(Y) = 0$ se e só se Y possui uma sela-nó como única singularidade em $V(p)$;
- b) $f(Y) < 0$ se e só se Y possui uma sela e um nó como únicas singularidades em $V(p)$;
- c) $f(Y) > 0$ se e só Y não possui singularidades em $V(p)$.

Demonstração: Existe um sistema de coordenadas em torno de p , tal que as componentes contravariantes de X neste sistema são $X_1(x_1, x_2)$, $X_2(x_2, x_2)$ onde

$$X_1(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + o((x_1^2 + x_2^2))$$

$$X_2(x_1, x_2) = dx_1 + o((x_1^2 + x_2^2)^{1/2})$$

Theorem (Sotomayor)

Let M^2 be an orientable surface. Then

$$\Sigma(1) = (\cup_{i=1}^3 \mathcal{S}_i) \cap \mathcal{R}$$

Here \mathcal{R} is the set of vector fields on M^2 without recurrences, i.e., the Poincaré-Bendixson theorem is valid for vector fields in \mathcal{R} .

Theorem (Sotomayor)

$\Sigma(1)$ is a Banach submanifold of (\mathcal{B}, C^r) of codimension one and of class C^1 . Here \mathcal{B} is the Banach space of vector fields of class C^r of M^2 .

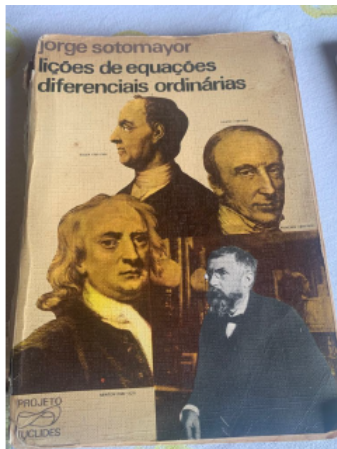
Jorge Sotomayor (25/03/1942— 07/01/2022) and Ivan Kupka (03/11/1937– xxxx) finished their thesis at IMPA in 1964 under the guidance of Maurício Peixoto. Also Aristides C. Barreto (1935–2009) finished his thesis in 1964 under guidance of Maurício Peixoto

Publications:

- J. Sotomayor. Structural stability of first order and Banach varieties. Univ. Nac. Ingen. Inst. Mat. Puras Apl. Notas Mat. 4 (1966), 11–52.
- J. Sotomayor, *Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 722–726.
- J. Sotomayor. *Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43 (1974), 5–46.
- Ivan Kupka. *Contribution à la théorie des champs génériques*. Contributions to Differential Equations 2 (1963), 457–484.
- Barreto, Aristides C. Structural stability on a cylinder. Proc. 5^o Brazilian Math. Colloq. (1965) pp. 101–102

- J. Sotomayor, *La mesure de l'ensemble de bifurcation des champs de vecteurs dans le plan*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 293 (1981), no. 8, 405–407.
- J. Sotomayor, *Curvas definidas por equações diferenciais no plano*. 13^o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 1981. iii+166 pp.

Books: Lessons of Differential Geometry and Curves defined by Differential Equations



Let M be a compact connected region in the plane \mathbb{R}^2 , and denote for $r = 1, 2, \dots, \infty$ by χ^r the space of all C^r vector fields on M with the C^r topology. Moreover, $\chi_1^r = \chi^r \setminus \Sigma^r$, where Σ^r is the set of all structurally stable vector fields in χ^r .

As shown by Marília C. Peixoto (1921-1961) and Maurício M. Peixoto (1921-1919) [Ann. Acad. Brasileira Ciências **31** (1959), 135–160], χ_1^r is a closed subset of χ^r without interior points.

It is the aim of the present paper to prove the following results which indicate that χ_1^r is a "thin" subset of χ^r in the sense, that, for certain finite-dimensional subsets \mathcal{Y} of χ^r which carry a natural measure, the intersection $\mathcal{Y} \cap \chi_1^r$ is of measure 0.

(1) For $X \in \chi^r$ and $\theta \in \mathbb{R}$, let $R(\theta, X) \in \chi^r$ be obtained from X by rotating all vectors counterclockwise by the angle θ . If all singular points of X are simple (Jacobian $\neq 0$) and contained in $\text{Int}(M)$, then the Lebesgue measure of the subset $\{\theta : R(\theta, X) \in \chi_1^r\}$ of \mathbb{R} is 0.

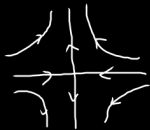
(2) If S is a finite-dimensional C^1 submanifold of χ^r containing only vector fields whose singular points are simple and belong to $Int(M)$ and if for each $X \in S$ the vector field $R(\frac{\pi}{2}, X)$ lies in the tangent space $TX(S)$, then χ_r^n has measure 0 (remember that sets of measure 0 in S are defined by the C^1 structure of S).

(3) If \mathcal{W}^n denotes the set of all $X \in \chi^r$ whose coordinate functions are polynomials of degree not exceeding n , then the measure of $\mathcal{W}^n \cap \chi_1^r$ is 0.

(4) The corresponding result holds for the set \mathcal{F}^n of all vector fields which can be written in complex form as

$$P + iQ = \sum_{|k|+|l|\leq n} a_{kl} e^{i(xk+y'l)} ((x, y) \in M).$$

Local phase portrait



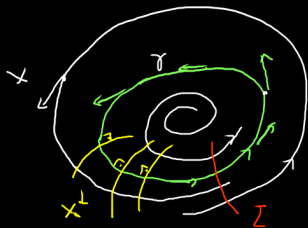
saddle



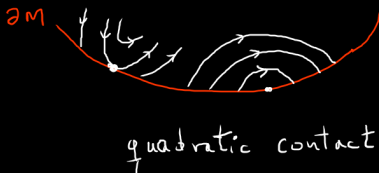
focus



node

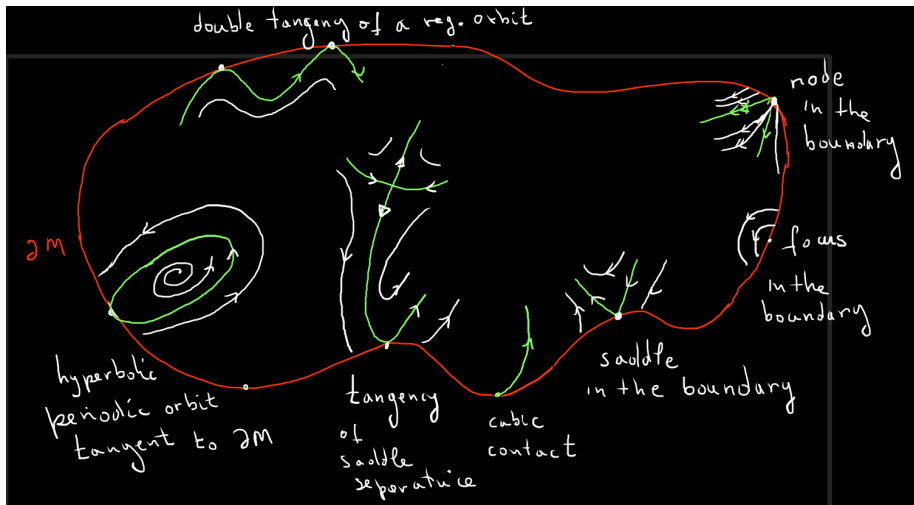


$$\begin{aligned} \ln \pi'(0) &= \int_0^T \operatorname{div} X(t) dt \\ &= \int_0^L \kappa^\perp(s) ds \end{aligned}$$



quadratic contact

Phase portrait of codimension one (contact with the boundary)



Thesis from 1964 to 1973 (incomplete)

1973

1. JORGE LEWOWICZ. Stability Properties Of A Class Of Attracton, Public. No Trans. Am. Math. Soc., Vl. **185**, **1973**. Tese - Brown University, . 1973.
Orientador: Mauricio Matos Peixoto.
2. Mário Barone Júnior. **Classificacao dos Campos Quase-Genericos Em Variedades de Dimensao Dois**. Tese - Universidade de São Paulo, . 1973.
Orientador: Mauricio Matos Peixoto.
3. RUBENS LEA'O DE ANDRADE. **Hipersuperficies Convexas Em Espac,Os de Hilbert**. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, . 1973.
Orientador: Manfredo Perdigao do Carmo.

1972

1. GUILLERMO FLEITAS MORALES. **Sobre A Canificacao de Fluxos Em Variedades Nas Dimensoes Dois e Tres**.. Tese - Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, . 1972.
Orientador: Mauricio Matos Peixoto.
2. KETI TENENBLAT. **Uma Estimativa dos Comprimentos de Geodesicas Fechadas Em Variedades Riemannianas**. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Apl
Orientador: Manfredo Perdigao do Carmo.

1969

1. ENRIQUE GONZALEZ. Generic Properties Of Polynomial Vector Fields At Infinity, Public. No Trans. Am. Math. Soc., Vol. **143** ,**1969**. Tese - Brown University, . 1969.
Orientador: Mauricio Matos Peixoto.

1968

1. Alberto Verjowsky. **Trabalho em Sistemas Dinâmicos, posteriormente publicado**.. Tese (Doutorado em Phd In Mathematics) - Brown University, . 1968.
Orientador: Mauricio Matos Peixoto.

1964

1. ARISTIDES CAMARGOS BARRETO. **Estabilidade Estrutural das Equacoes Diferenciais da Forma $\dot{X} = S(X, X)$** . Tese - Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, . 1964.
Orientador: Mauricio Matos Peixoto.
2. IVAN KUPKA. **Contribuicao A Teoria dos Campos Genericos**. Tese - Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, . 1964.
Orientador: Mauricio Matos Peixoto.
3. JORGE MANUEL SOTOMAYOR TELO. **Estabilidade Estrutural de Primeira Ordem e Variedades de Bananch**. Tese - Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, . 1964.
Orientador: Mauricio Matos Peixoto.

We recall that the principal lines are defined by the differential equation

$$(Fg - Gf)dv^2 + (Eg - Ge)dvdu + (Ef - Fe)du^2 = \text{Jac}(II_\alpha, I_\alpha) = 0,$$

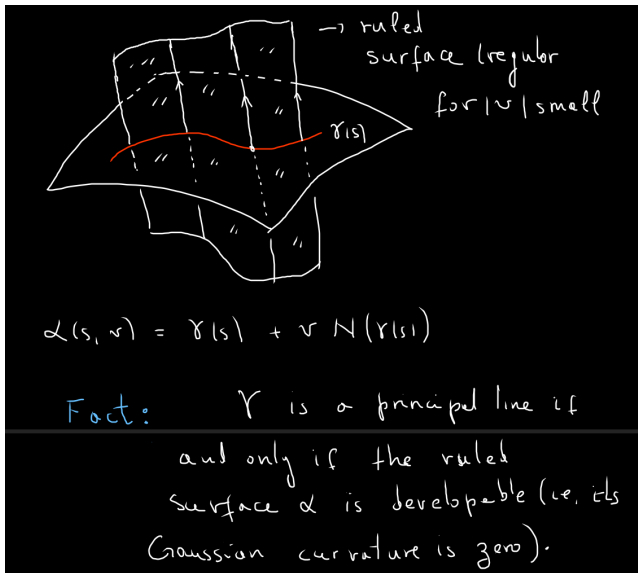
where

$$I_\alpha = \langle d\alpha, d\alpha \rangle = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

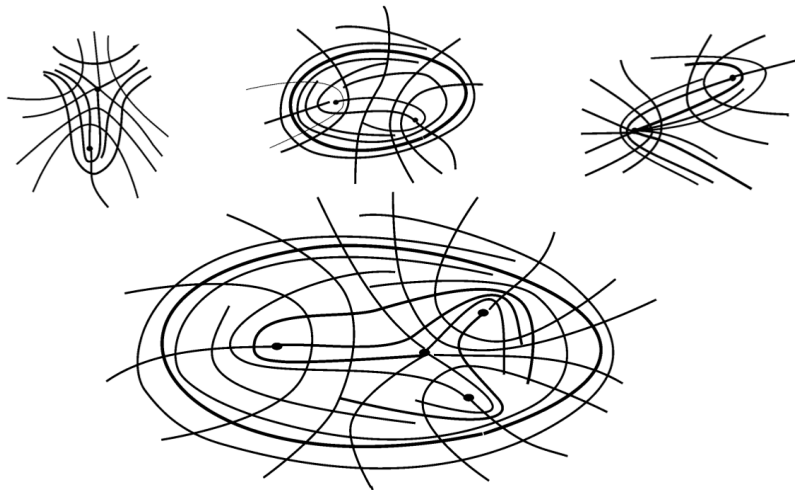
$$II_\alpha = - \langle d\alpha, dN \rangle = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

are, respectively, the first and second fundamental forms of the immersion .

Principal lines : developable surface



Principal Configuration of Principal Lines on Surfaces



Principal Configuration of Principal Lines on Surfaces

In ([Mo]) Monge presents the principal curvature lines of an ellipsoid. They form two orthogonal foliations which present four singular points, the four umbilics of the surface.

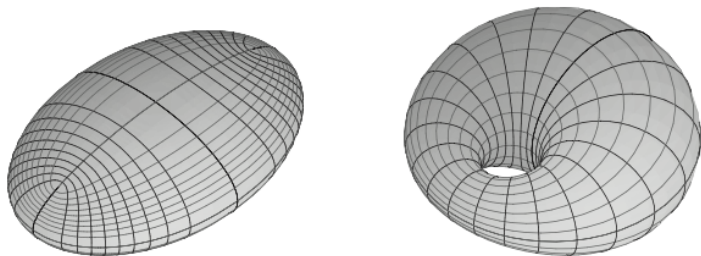
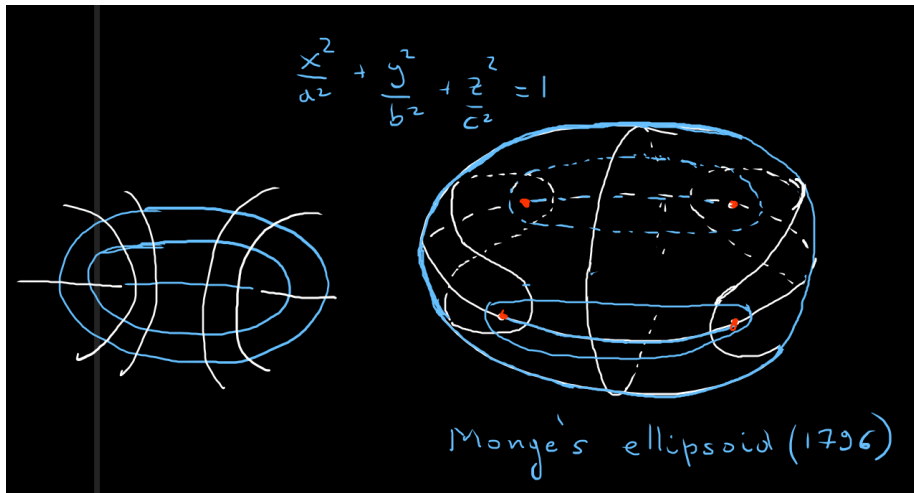


FIGURE 1. The lines of curvature of an ellipsoid and of a Dupin cyclide

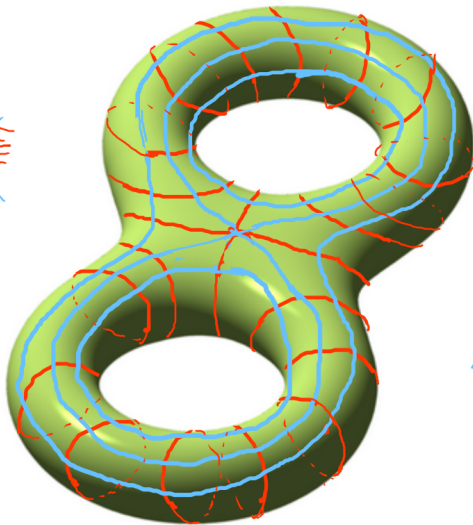
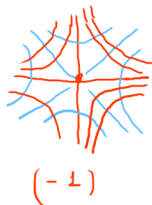
A systematic qualitative study of the behaviour of principal curvature lines on surfaces of \mathbb{R}^3 was initiated by C. Gutierrez and J. Sotomayor ([GS1, GS2, GS3]).

Principal Configuration: triaxial ellipsoid



Principal Configuration: bitorus

Principal configuration (bitorus)



Problem 2 The fundamental problem on the study of the Principal Curvature Configurations of the differentiable, compact and oriented surfaces immersed into \mathbb{R}^3 , consists in establishing the following two theorems:

Theorem 4 *The necessary and sufficient conditions for a surface to have its Principal Configuration Structurally Stable, with respect to C^3 small deformations of its immersion into \mathbb{R}^3 , are the following:*

4a) The umbilic points must all be Darbouxian.

4b) The periodic curvature lines (principal cycles) must be all hyperbolic. That is, their Poincaré Transformation, or First Return Map, must have a derivative different of 1 (Fig. 6).

4c) It must not admit connections, or self-connections, of umbilical separatrices.

4d) The limit sets of any non-periodic principal curve must be an umbilic point or a principal cycle.

Theorem 5 *Within the space of immersions of compact oriented surfaces, endowed with the C^3 topology, the surfaces that satisfy the conditions (4a) to (4d) form a set that is 5a: open and 5b: dense.*

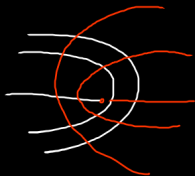
A rough scheme of demonstration for Theorems 4 and 5, revealed that part (5a) of Theorem 5, as well as the sufficiency of conditions (4a) to (4d) for Theorem 4, seemed feasible. However, serious difficulties in establishing global aspects of the necessity of the conditions and, above all, the density, part (5b) of Theorem 5, became apparent.

At that time no example was known of a compact surface satisfying the conditions (4a) to (4d).

The influence that Peixoto's work on the genericity of the *Structurally Stable vector fields on two-dimensional manifolds*, Topology, 1962, was crucial in the formulation of the Fundamental Problem 2. This matter has been evoked in the author's essay:

- *On a list of ordinary differential equations problems, São Paulo Journal of Mathematical Sciences*, <https://doi.org/10.1007/s40863-018-0110-3>. Zbl1417.01036 Zbl1028.34001. MR3947401.
- The article <https://www.maths.ox.ac.uk/about-us/departmental-art/theory/differential-geometry>, in an Oxford University webpage, contains a very objective outline of Differential Geometry, with pertinent links.

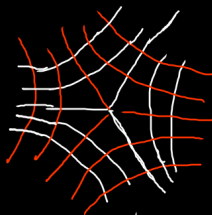
Darboxian umbilic points



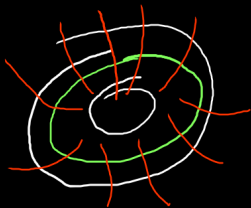
+ 1/2



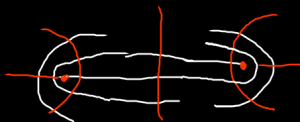
+ 1/2



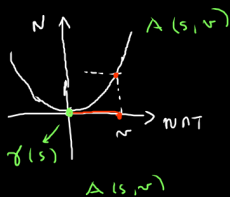
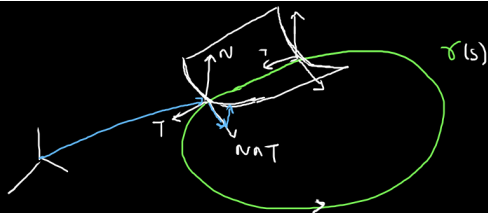
- 1/2



$$\ln \pi'(0) = - \int_{\gamma} \frac{dk_2}{k_2 - k_1}$$



no connection
of umbilic separatrices



$$\left[\alpha(s, \nu) = \gamma(s) + \nu (NAT)(s) + \left[\frac{k_2(s)}{2} \nu^2 + \frac{a(s)}{6} \nu^3 + \dots \right] NAT(s) \right]$$

Darboux frame

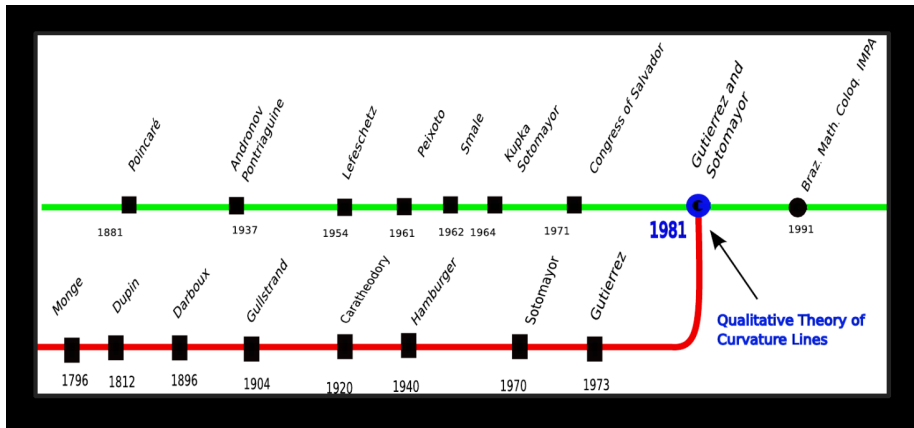
$$\begin{cases} \gamma' = T \\ T' = k_g NAT + k_1 N \\ (NAT)' = -k_g T + 0 \cdot N \\ N' = -k_1 T + 0 \cdot NAT \end{cases} \quad \tau_g = 0$$

γ - closed principal line
 α - local parametrization of a tubular neigh. of γ .

Principal Lines on Surfaces

- J. Sotomayor and C. Gutierrez *Structurally stable configurations of lines of principal curvature*. Bifurcation, ergodic theory and applications (Dijon, 1981), 195–215, Astérisque, 98–99, Soc. Math. France, Paris, 1982.
- J. Sotomayor and C. Gutierrez *An approximation theorem for immersions with stable configurations of lines of principal curvature*. Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981), 332–368, Lecture Notes in Math., 1007, Springer, Berlin, 1983.
- J. Sotomayor and C. Gutierrez. Structurally stable configurations of lines of curvature and umbilic points on surfaces. Monografías del Instituto de Matemática y Ciencias Afines, IMCA, Lima; 1998. viii+84 pp
- J. Sotomayor. *An encounter of classical differential geometry with dynamical systems in the realm of structural stability of principal curvature configurations*. São Paulo J. Math. Sci. 16 (2022), no. 1, 256–279.

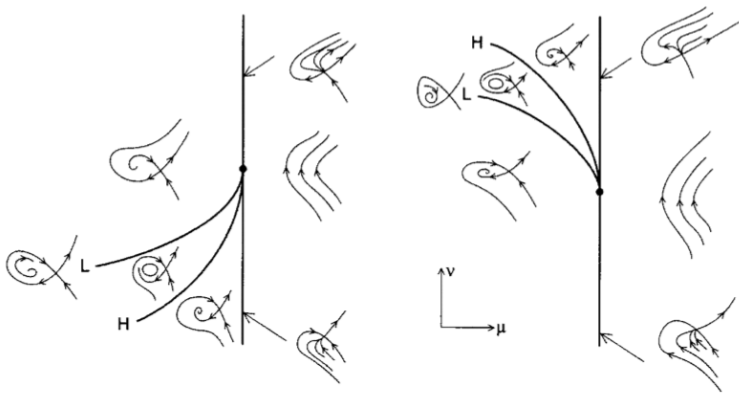
Timeline



Bifurcations of codimension two (Bogdanov-Takens)

A cusp type germ of vector fields of codimension two is a C^∞ germ at $0 \in \mathbb{R}^2$, whose 2-jet is C^∞ -conjugate to:

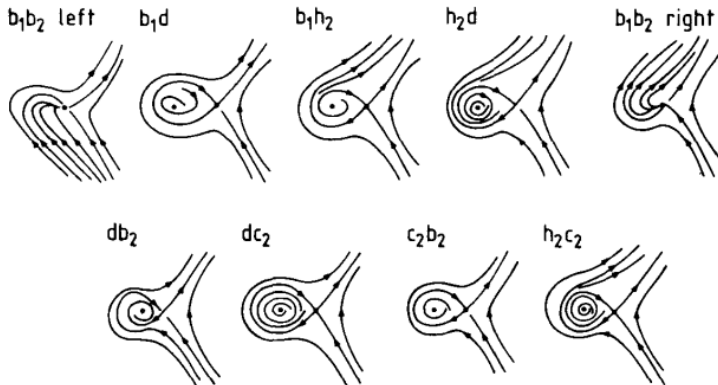
$$y \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha x^2 + \beta xy) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha\beta \neq 0.$$



Bifurcations of codimension one in BT

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + \mu + \nu y \pm xy) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha\beta \neq 0.$$

codimension 1 phase portraits ($\mu \leq 0$)



Bifurcation of codimension three (cusp of cod.3)

A cusp type germ of vector fields is a C^∞ germ at $0 \in \mathbb{R}^2$, whose 2-jet is C^∞ -conjugate to

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (\alpha x^2 + \beta xy) \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha \neq 0.$$

Let $\Sigma_{C^\pm}^3$ (codimension five submanifold of 5-jets) consisting of germs of cusp type whose 4-jet is C^0 equivalent to

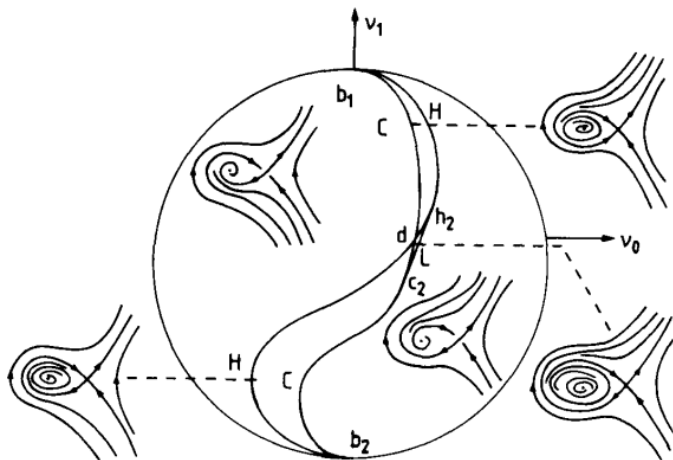
$$y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 \pm x^3 y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Theorem (DRS, 1987)

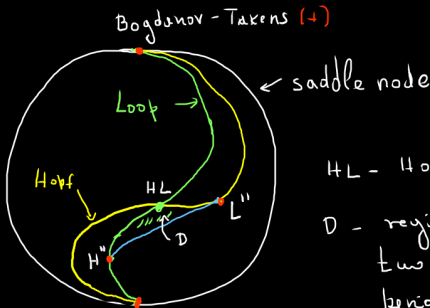
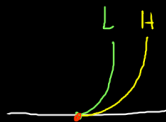
Any local 3-parameter family in $(0, 0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$, cutting $\Sigma_{C^\pm}^3$ transversally in $(0, 0)$ is fibre C^0 equivalent to

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (x^2 + \mu + (\mu_0 + \mu_1 x \pm x^3) y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Bifurcation diagram of a cusp of codimension 3



Bifurcation diagram of a cusp of codimension 3



HL - Hopf + Loop

D - region with two hyperbolic periodic orbits

$H''L''$ - one semi-hyperbolic periodic orbit

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 + \mu + (\mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2) y \end{cases}$$



H'' - Hopf of cod. 2

L'' - Loop of cod. 2.

Others bifurcations of codimension three: Nilpotent singularities

$$y \frac{\partial}{\partial x} + (\epsilon_1 x^3 + bxy + \epsilon_2 x^2 y + f x^3 y) \frac{\partial}{\partial y} \text{ with } \epsilon_{1,2} = \pm 1, b > 0. \quad (3'')$$

The topological type falls into one of the following categories :

- 1) The saddle case : $\epsilon_1 = 1$, any ϵ_2 and b . (a degenerate saddle). Here we make a distinction according to the sign of ϵ_2 .

We denote by $\Sigma_{S_{\pm}^3}^3$ ($\epsilon_2 = \pm 1$), the subsets of germs with such a 4-jet. They all have the same topological type.

- 2) The focus case : $\epsilon_1 = -1$ and $0 < b < 2\sqrt{2}$. (a degenerate focus). We denote by $\Sigma_{F_{\pm}^3}^3$ ($\epsilon_2 = \pm 1$) the corresponding subsets of germs.

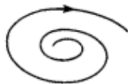
- 3) The elliptic case : $\epsilon_1 = -1$ and $b > 2\sqrt{2}$. Notation $\Sigma_{E_{\pm}^3}^3$ with $\epsilon_2 = \pm 1$. They all have the same topological type.

$$\text{Index} = 1 + \frac{\# e - \# h}{2}$$

3



Topological
Saddle case
Index = -1



$\epsilon_2 = 1$

Top. Focus cases
Index ≤ 1



$\epsilon_2 = -1$



elliptic
sector

Top. Elliptic case
Index 1

Fig. 1. : The different topological types

$$X_{(\mu_1, \mu_2, \nu)} \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = \epsilon_1 x^3 + \mu_2 x + \mu_1 + y(\nu + bx + \epsilon_2 x^2) \end{array} \right. \quad \epsilon_1 = \pm 1, \epsilon_2 = \pm 1$$

The genericity condition consists in the transversality of the mapping $(m, \lambda) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow j^4 X_\lambda(m)$ to the sets Σ_{S+}^3 , Σ_{F+}^3 and Σ_{E+}^3 . An example of such a family in each case, called standard family, is given by :

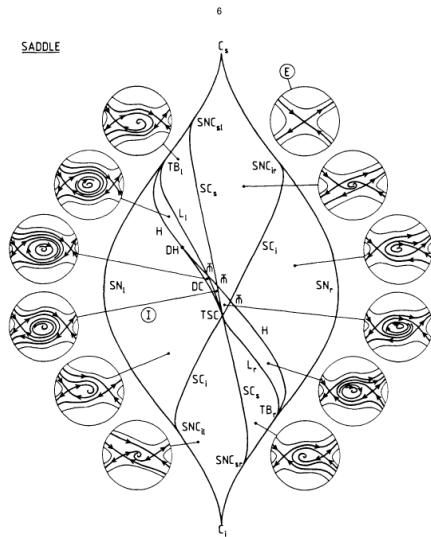
$$\left[\tilde{X}_\lambda = y \frac{\partial}{\partial x} + (\epsilon_1 x^3 + \mu_2 x + \mu_1 + y(\nu + bx + \epsilon_2 x^2)) \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (4)$$

where $\lambda = (\mu_1, \mu_2, \nu)$, and of course : $b > 0$, $b \neq 2\sqrt{2}$, $\epsilon_{1,2} = \pm 1$.

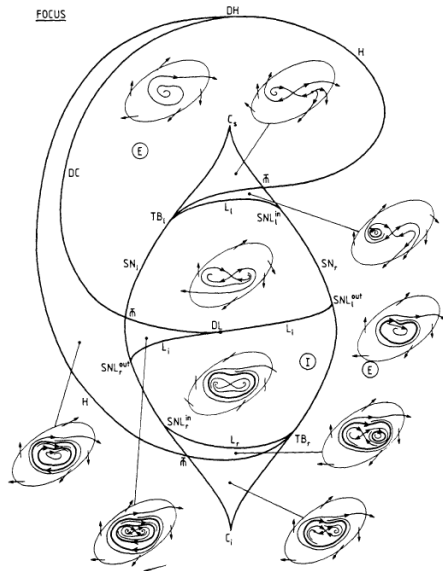
The present article is devoted to establish several basic facts, in support of the following conjecture :

Let X_λ and Y_λ be two local 3-parameter families, with X_0, Y_0 belonging to the same set : $\Sigma_{S+}^3, \Sigma_{F+}^3$ or Σ_{E+}^3 . Suppose that both families are transversal to this set (in the sense defined above). Then they are fiber- C^0 equivalent (in the sense of Chapter II).

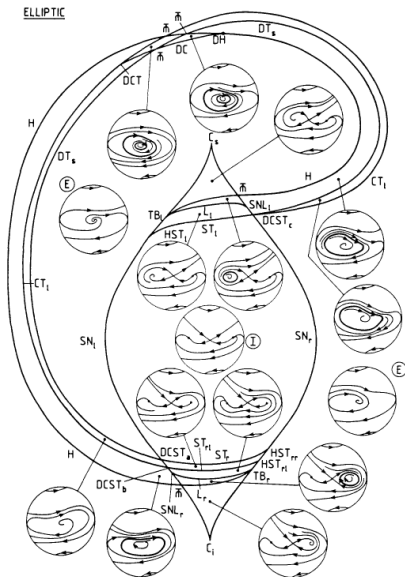
Bifurcations of codimension three (saddle)



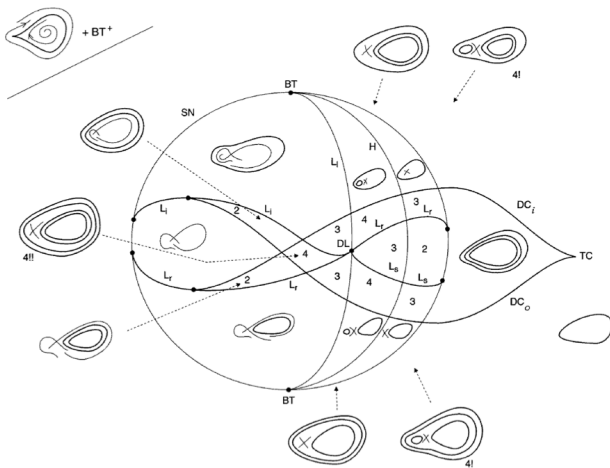
Bifurcations of codimension three (focus)



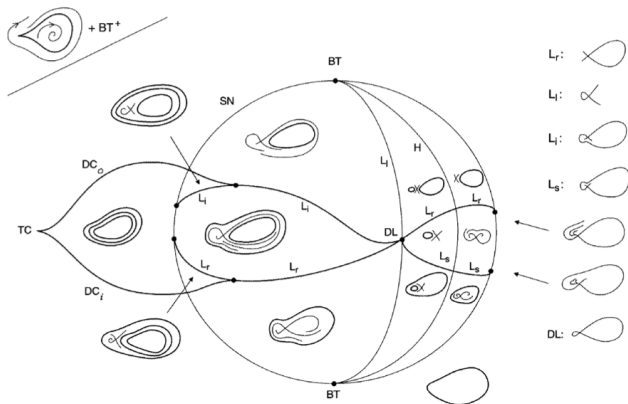
Bifurcations of codimension three (elliptic)



Bifurcations of codimension three (cuspidal loop)



Bifurcations of codimension three (cuspidal loop)



- F. Dumortier, R. Roussarie and J.Sotomayor. *Generic 3-parameter families of vector fields on the plane, unfolding a singularity with nilpotent linear part. The cusp case of codimension 3.* Ergodic Theory Dynam. Systems 7 (1987), no. 3, 375–413.
- F. Dumortier, R. Roussarie, J.Sotomayor and H. Zoladek. *Bifurcations of planar vector fields. Nilpotent singularities and Abelian integrals.* Lecture Notes in Mathematics, 1480. Springer-Verlag, Berlin, 1991. viii+226 pp.
- F. Dumortier, R. Roussarie and J.Sotomayor. *Bifurcations of cuspidal loops.* Nonlinearity 10 (1997), no. 6, 1369–1408.



Sotomayor, Jorge

MR Author ID: **165080**

Earliest Indexed Publication: [1962](#)

Total Publications: **109**

Total Related Publications: **3**

Total Citations: **1008**

Published as: Sotomayor Tello, J. (1)

[Publications](#)

[Related Publications](#)

[Reviews](#)

[Refine Search](#)

[Co-Authors](#)

[Collaboration Distance](#)

[Mathematics Genealogy Project](#)

[Citations](#)

Co-authors (by number of collaborations)

[Braga, Denis de Carvalho](#) [Chavarriga Soriano, Javier](#) [Chicone, Carmen](#)

[C. Dumortier, Freddy](#) **[Garcia, Ronaldo Alves](#)**

[Gasull, Armengol](#) [Guadalupe, Irwen Válle](#) [Gutiérrez, Carlos](#)

[Llibre, Jaume](#) [Lopes, Débora](#) [Machado, Ana Lúcia F.](#) [Mello, Luis](#)

[Fernando O.](#) [Paterlini, Roberto Ribeiro](#) [Pessoa, Claudio](#) [Roussarie,](#)

[Robert Santos, Danilo Braun](#) [Siersma, Dirk](#) [Spindola, F.](#) [Teixeira,](#)

[Marco Antonio Tribuzy, Renato de Azevedo](#) [Zhitomirskii, Michail](#)

[Zolqdek, Henryk](#)

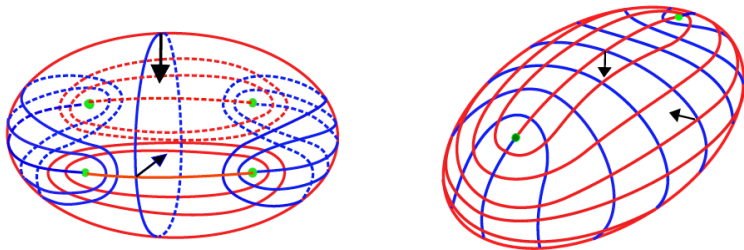
Publications (by number in area)

[Differential geometry](#) [Dynamical systems and ergodic theory](#) [Global analysis, analysis on manifolds](#) [History and biography](#) [Manifolds and cell complexes](#) [Mechanics of particles and systems](#) [Ordinary differential equations](#)

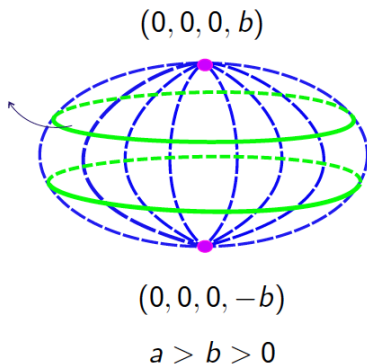
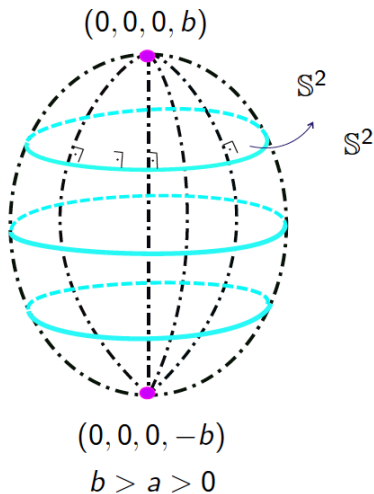
Publications (by number of citations)

[Differential geometry](#) [Dynamical systems and ergodic theory](#) **[Global analysis, analysis on manifolds](#)** [History and biography](#) [Manifolds and cell complexes](#) [Mechanics of particles and systems](#) [Ordinary differential equations](#)

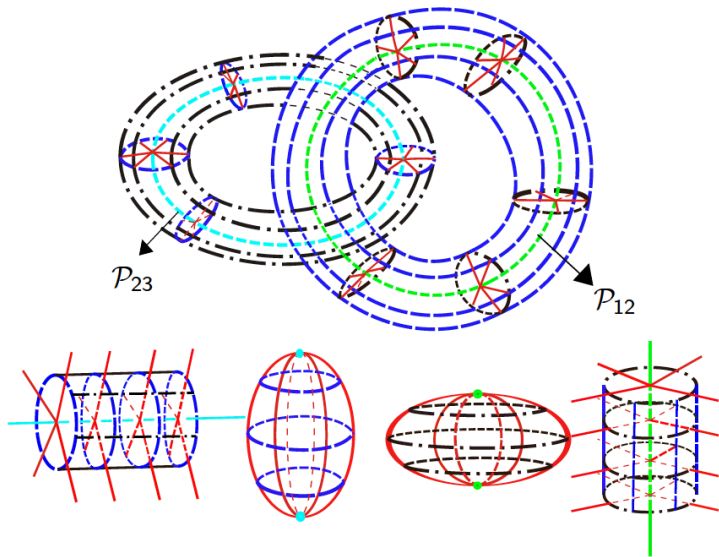
Principal lines: Ellipsoid of \mathbb{R}^3 with three different axes



Principal lines: Ellipsoid $(x^2 + y^2 + z^2)/a^2 + w^2/b^2 = 1$

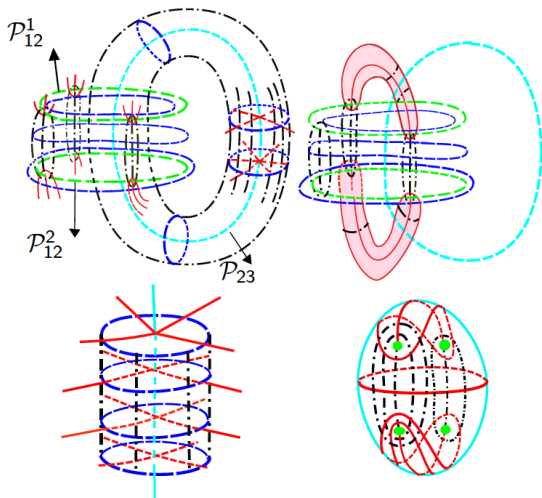


Principal lines: Ellipsoid $(x^2 + y^2)/a^2 + (z^2 + w^2)/b^2 = 1$



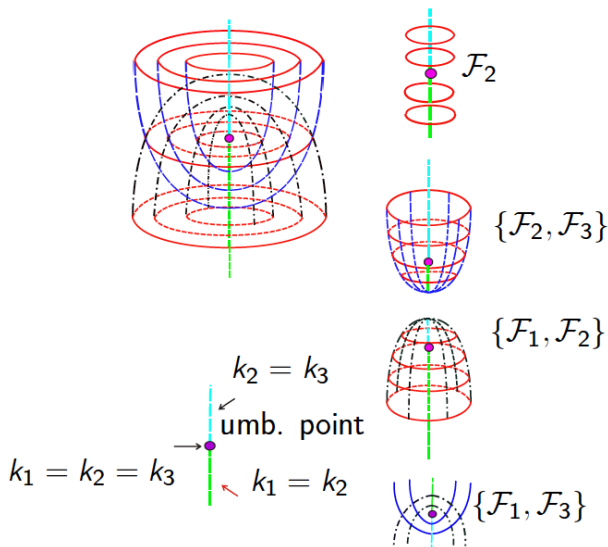
Principal lines: Ellipsoid

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + (z^2 + w^2)/c^2 = 1, \quad a > b > c > 0$$



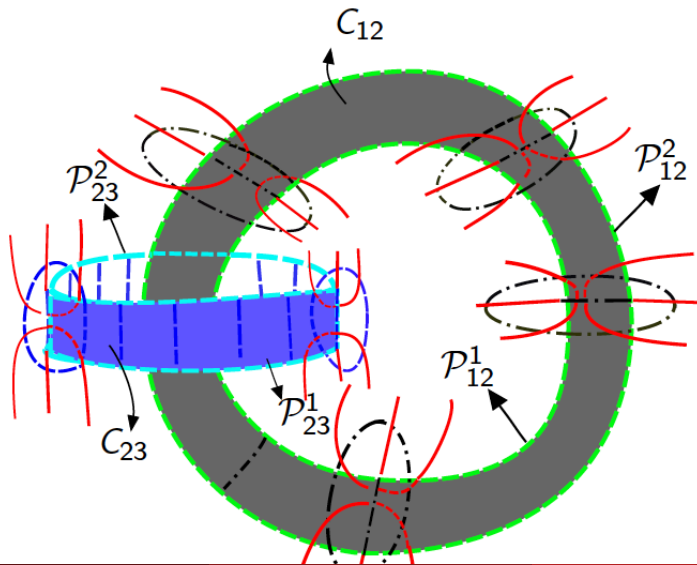
Principal lines near an umbilic point of Ellipsoid

$x^2/a^2 + y^2/b^2 + (z^2 + w^2)/c^2 = 1, a > c > b > 0$



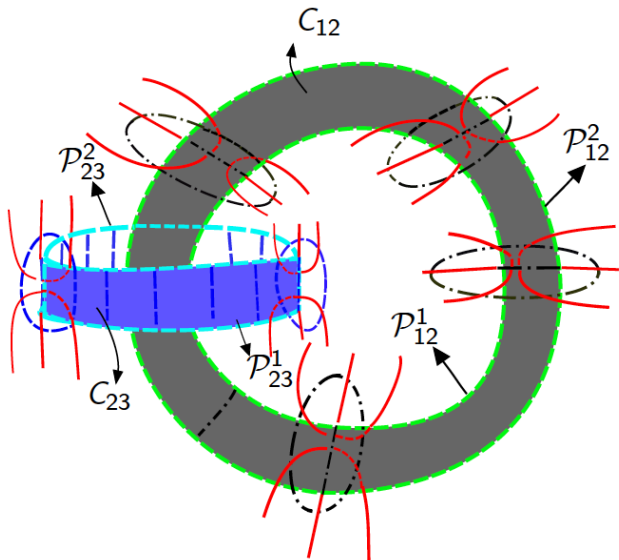
Principal lines: Ellipsoid

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 + w^2/d^2 = 1, \quad a > b > c > d$$



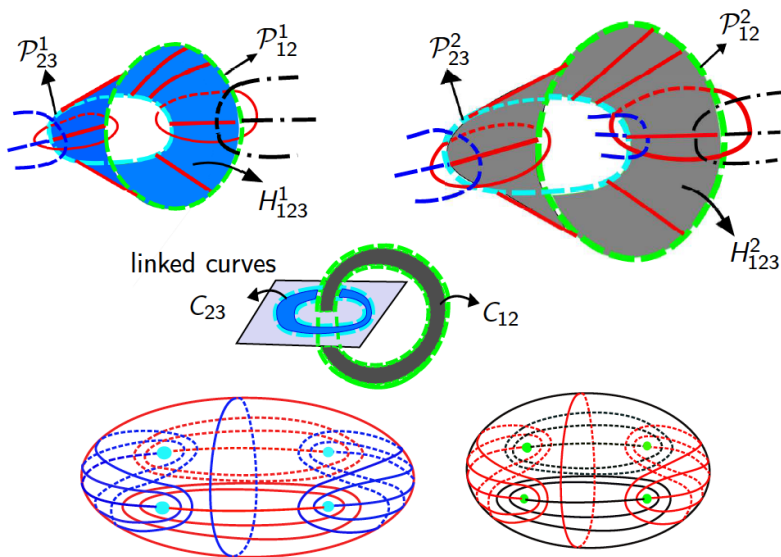
Principal lines: Ellipsoid

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 + w^2/d^2 = 1, \quad a > b > c > d$$



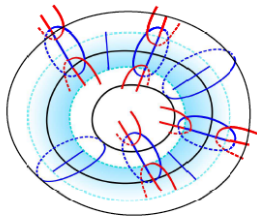
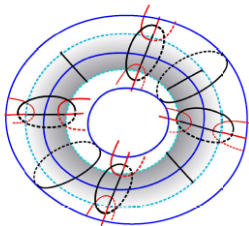
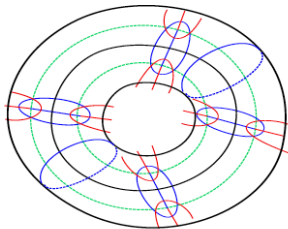
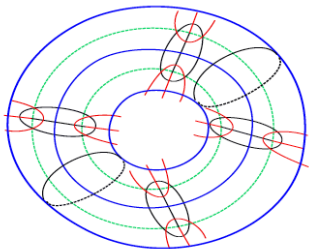
Principal lines: Ellipsoid

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 + w^2/d^2 = 1, \quad a > b > c > d$$



Principal lines: Ellipsoid

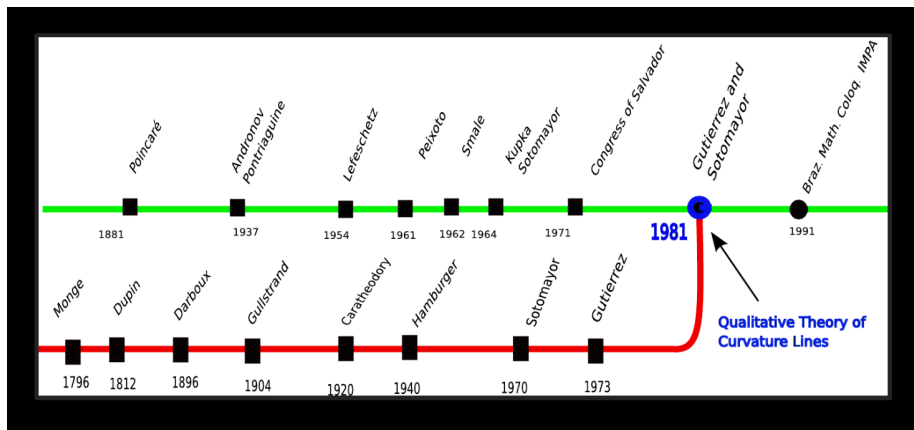
$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 + w^2/d^2 = 1, \quad a > b > c > d$$



- Sotomayor, J.; Garcia, R. (2016). *Historical Comments on Monge's Ellipsoid and the Configurations of Lines of Curvature on Surfaces*. *Antiquitates Mathematicae*. 10: 348–354.
- Sotomayor, J. (1993). *O elipsóide de Monge*. *Revista Matemática Universitária*. 15: 33–47.
- Sotomayor, J. (2020). *On an encounter of two men of mathematics in Lima*. *Revista Brasileira de História da Matemática*. 20 (40): 01–07.
- Lopes, D.; Sotomayor, J.; Garcia, R. *Partially umbilic singularities of hypersurfaces of \mathbb{R}^4* . *Bull. Sci. Math.* 139 (2015), no. 4, 431–472.
- Lopes, Débora; Sotomayor, Jorge; Garcia, Ronaldo. *Umbilic singularities and lines of curvature on ellipsoids of \mathbb{R}^4* . *Bull. Braz. Math. Soc.* **45** (2014), no. 3, 453–483.

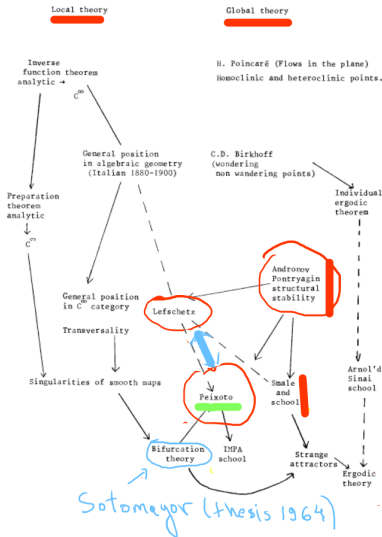
- J. Sotomayor. Um Poeta, um Matemático e um Físico: Três Ensaios Biográficos por Henri Poincaré, EDUSP, (2008).
- J. Sotomayor. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias, Projeto Euclides, IMPA (1979).
- J. Sotomayor. Curvas Definidas por Equações Diferenciais no Plano, 13 Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1981).
- Garcia, Ronaldo; Sotomayor, Jorge. Differential equations of classical geometry, a qualitative theory. Publicações Matemáticas do IMPA. 27o Colóquio Brasileiro de Matemática. (IMPA), Rio de Janeiro, 2009. ii+256 pp

Timeline (EDO's and Diff. Geometry)



René Thom (local and global panorama)


René Thom



Memorial Day in honor of

Sotomayor

March 25, 2022



Speakers

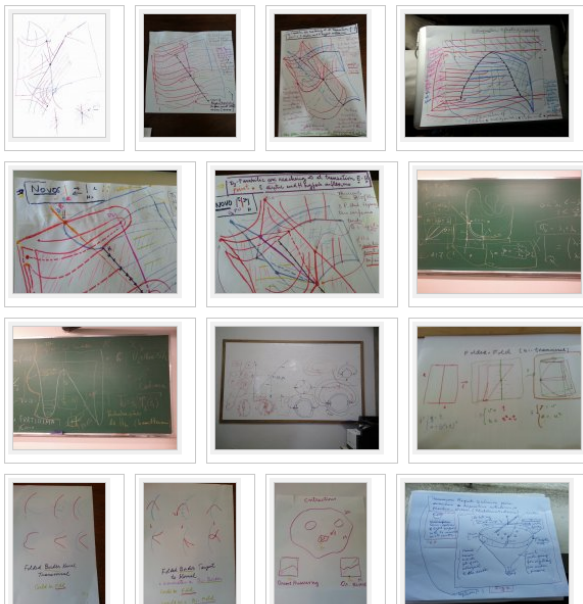
- Armengol Gasull** (UAB Barcelona, Centro de Recerca Matemática)
- César Camacho** (IMPA, Fundação Getúlio Vargas)
- Carmen Chicone** (University of Missouri)
- Débora Lopes** (Univ. Federal de Sergipe)
- Jaume Llibre** (Universitat Autònoma de Barcelona)
- Marco Antonio Teixeira** (Univ. Estadual de Campinas)
- Michail Zhitomirski** (Technion- Israel Institute of Technology)
- Robert Roussarie** (Université de Bourgogne)
- Ronaldo Alves Garcia** (Univ. Federal de Goiás)

Organizers

- Joan Torregrosa (UAB Barcelona, Centro de Recerca Matemática)
- Luís Fernando de O. Mello (Univ. Federal de Itajubá)
- Paulo Ricardo da Silva (UNESP-S. J. do Rio Preto)
- Ronaldo Alves Garcia (Univ. Federal de Goiás)

<http://www.gsd.cat/soto>

By Carmen e Lopes



Sotomayor (Lima)



Sotomayor Gallery



Como resumir em poucas palavras o legado do Soto?

Poderia dizer que foi um matemático com contribuições pioneiras nas bifurcações das edo's e na teoria qualitativa das linhas de curvatura. Ele possuía grande capacidade de síntese, intuição aguçada, habilidade excepcional em fazer *croquis* de diagramas de bifurcações e retratos de fase (verdadeiras obras de arte moderna). Alguns ficavam pendurados nas paredes do seu escritório, organizado à sua maneira, onde era possível entrar (caso conseguisse) mas não podia mudar a ordem das pastas, etc.

Conheci o Soto, por intermédio do Prof. Genésio Lima dos Reis (1940-2017) quando ainda fazia minha graduação na UFG. O acaso me fez reencontrá-lo no IMPA em 1986 quando me aceitou para orientação no doutorado, concluído em janeiro/1989. Ao longo da minha carreira tivemos uma parceria profícua e uma amizade estabeleceu-se. Toda vez que foi a Goiânia íamos, sempre por sua sugestão, ao restaurante Tucunará na Chapa.

Com o testemunho da Marilda (sua esposa), acompanhei a sua luta pela vida nos últimos seis meses (julho/2021 a janeiro/2022), mas ele pediu para não dar publicidade. Acredito que cumpri quase fielmente a sua vontade. Na penúltima vez que falamos por telefone disse-me que eu teria um compromisso com ele no dia 25/03/2022.

Agora, espero que ele esteja junto ao meu filho Breno relembrando e recontando a história “E os cisnes ficaram doidinhos...”

How to summarize in a few words Soto's legacy?

I could say that he was a mathematician with pioneering contributions in the bifurcations of edo's and the qualitative theory of curvature lines. He had a great capacity for synthesis, sharp intuition, exceptional ability to make sketches of bifurcation diagrams and phase portraits (true works of modern art). Some of them hung on the walls of his office, organized in his own way, where you could enter (if you could) but could not change the order of the folders, etc.

I met Soto through Prof. Genésio Lima dos Reis (1940-2017) when I was still an undergraduate at UFG. By chance I met him again at IMPA in 1986 when he accepted me as a PhD supervisor, which I finished in January 1989. Throughout my career we had a fruitful partnership and a friendship was established. Every time he came to Goiânia we went, always on his suggestion, to the restaurant Tucunaré na Chapa (Roasted Tucunaré(fish) on a Plate).

With the testimony of Marilda (his wife), I accompanied his fight for life for the last six months (July/2021 to January/2022), but he asked me not to publicize it. I believe that I have almost faithfully followed his wishes. The second-to-last time we spoke on the phone he told me that I would have an appointment with him on 3/25/2022. Now I hope he will be with my son Breno, reminiscing and retelling the story "And the swans went crazy..." .

Obrigado!