Funções

Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa:
António St. Aubyn, Maria Carlos Figueiredo,
Luís de Loura, Luísa Ribeiro, Francisco Viegas

Lisboa, Março de 2004

O documento presente foi obtido directamente do código TeX fornecido pelos autores com alterações de formatação e alguma revisão editorial. A versão corrente é de 23 de Fevereiro de 2006. A revisão deste texto do ponto de vista gráfico ainda não está completa. Novas versões poderão ficar disponíveis no futuro a partir de http://preprint.math.ist.utl.pt/files/ppgmutlfuncoes.pdf. O DMIST agradece ao Grupo de Matemática da UTL a possibilidade de facultar o texto aos alunos das disciplinas introdutórias de Matemática do IST.

Na mesma série:

- Lógica matemática.
- Conjuntos.
- Números reais.
- Sucessões.
- Funções.
- Funções reais de variável real.
- Funções trigonométricas.
- Função exponencial.
- Continuidade.
- Derivadas.

Funções

Na vida corrente é usual estabelecermos correspondências, muitas vezes de forma tão natural que nem tomamos consciência desse facto. Por exemplo, quando uma criança pequena se refere ao seu "urso verde" e ao "coelho amarelo", está a estabelecer uma correspondência

$$\begin{array}{rcl} \textbf{Boneco} & \longrightarrow & \textbf{Cor} \\ \text{urso} & \mapsto & \text{verde} \\ \text{coelho} & \mapsto & \text{amarelo} \end{array}$$

Este tipo de procedimento é fundamental em qualquer ciência. A Matemática pretende tornar esta ideia rigorosa (definindo *função*) de modo a eliminar qualquer ambiguidade.

Consideremos a seguinte situação comum: numa turma de quatro alunos, o professor faz a chamada

António	Sousa
Joana	Silva
Maria	Sá
Pedro	Sarmento

Temos dois conjuntos

$$A = \{\text{António, Joana, Maria, Pedro}\},$$
$$B = \{\text{Sá, Sarmento, Silva, Sousa}\},$$

e uma correspondência de A em B, que a cada elemento de A associa o respectivo apelido, elemento de B. Por outras palavras, dado um x em A a expressão "apelido de x" identifica um (e um só) elemento de B.

Imaginemos agora que, aos mesmos alunos, o professor pergunta onde passaram as férias grandes, obtendo as respostas

António	—	campo
Joana	—	praia
Maria	—	campo
Pedro	—	praia e campo

Tomando o conjunto $C = \{\text{campo, praia}\}$, temos acima uma correspondência de A em C. Há, no entanto, uma diferença fundamental: dado $x \in A$, a expressão "local onde se passou as férias grandes" não identifica um elemento único de C, visto que o Pedro passou férias no campo e na praia.

Esta ambiguidade na imagem não é aceitável em Matemática: no primeiro caso, a correspondência é uma função de A em B enquanto que, no segundo caso, a correspondência não é uma função de A em C.

Com rigor diremos que:

Definição 1. *Dados dois conjuntos*[1] *A e B, uma* função *(ou* aplicação*)* de A em *B é uma correspondência que a cada elemento $x \in A$ associa um e um só elemento $y \in B$.*

Recordando as notações habituais:

Definição 2. *Se f é uma função de A em B escrevemos $f : A \to B$; ao conjunto A chamamos* domínio de f *e ao conjunto B* conjunto de chegada de f*.*

Uma função está bem definida se conhecermos o seu domínio, o seu conjunto de chegada e a "regra" que permite determinar a imagem de qualquer elemento do seu domínio.

Suponhamos que alguém nos diz: seja uma função f de domínio $\mathbb{N}_1$, e com valores em $\mathbb{N}_1$, tal que

$$\begin{array}{lll} f(1) = 1, & f(2) = 2, & f(3) = 3, \\ f(4) = 3, & f(5) = 5, & f(6) = 5, \\ f(7) = 7, & f(8) = 7, & \cdots \end{array}$$

Ora, de acordo com a informação disponível, sabemos que 16 é elemento do domínio de f, mas não temos ideia de qual será o valor de $f(16)$: a função f não está bem definida.

No entanto, se em alternativa nos disserem o seguinte: seja $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ a função que a cada natural positivo n associa "o maior número primo inferior ou igual a n" (isto é, dão-nos a "regra"), então a função f está bem definida; em particular sabemos que $f(16) = 13$.

É frequente o uso de diagramas de Venn para, de forma sugestiva, representar uma função. Por exemplo, uma função $F : A \to B$, será representada como na figura 1.

[1] Para simplificar, vamos sempre supor que os conjuntos referidos são não vazios.

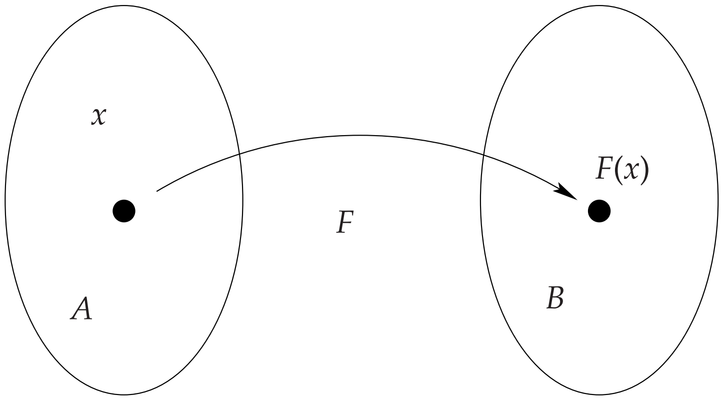

Figura 1: Diagrama de Venn de uma função F.

Consideremos agora alguns exemplos de funções:

Exemplo 1.

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Inês, António, Maria, Gil}\} \\ B &= \{\text{Sá, Sarmento, Silva, Sousa}\} \\ \varphi &: A \to B \\ \varphi(\text{Inês}) &= \text{Silva} \\ \varphi(\text{António}) &= \text{Sousa} \\ \varphi(\text{Maria}) &= \text{Sá} \\ \varphi(\text{Gil}) &= \text{Sarmento} \end{aligned}$$

ou,

$$\varphi(x) = \text{apelido de } x \quad \forall x \in A.$$

Exemplo 2.

B, o conjunto do exemplo 1
$C = \{\text{Rua da Rosa, Rua do Malmequer, Rua do Lírio, Rua do Cravo}\}$

$$\begin{aligned} \psi &: B \to C \\ \psi(\text{Sá}) &= \text{Rua da Rosa} \\ \psi(\text{Sarmento}) &= \text{Rua do Cravo} \\ \psi(\text{Silva}) &= \text{Rua da Rosa} \\ \psi(\text{Sousa}) &= \text{Rua do Malmequer} \end{aligned}$$

ou,

$$\psi(x) = \text{rua onde } x \text{ mora} \quad \forall x \in B.$$

Exemplo 3.

$$\begin{aligned} D &= \{(1,1),(2,3),(3,6)\} \\ h &: D \to \mathbb{R} \\ h((1,1)) &= 2 \\ h((2,3)) &= 5 \\ h((3,6)) &= 9 \end{aligned}$$

ou,

$$h((x,y)) = x + y \quad \forall (x,y) \in D.$$

Exemplo 4.

$$\begin{gathered} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ f(x) = 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{N}. \end{gathered}$$

Exemplo 5.

$$\begin{gathered} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{gathered}$$

Observemos que as funções dos exemplos 4 e 5 são diferentes, uma vez que têm domínios distintos. No entanto, a expressão designatória que as define é a mesma; além disso, o domínio de f é um subconjunto do domínio de g. Por esta razão, dizemos que f é a restrição de g ao conjunto $\mathbb{N}$. Mais geralmente,

Definição 3. *Dada uma função $\varphi : A \to B$ e um conjunto C tal que $C \subset A$, chamamos* restrição de φ a C *à função ψ definida por*

$$\begin{gathered} \psi : C \to B \\ \psi(x) = \varphi(x) \quad \forall x \in C \end{gathered}$$

e denotamos $\psi = \varphi|_C$.

Nas condições da definição, diremos também que φ é *um prolongamento* de ψ ao conjunto A.

No entanto, se bem que "restrição de φ a C" é uma afirmação precisa, "prolongamento de ψ a A" não o é.

Com efeito, dada uma função $\varphi : A \to B$ e o conjunto $C \subset A$, a restrição de φ ao conjunto C é uma função $C \to B$, única.

Por outro lado, dada uma função $\psi : C \to B$ e um conjunto $A \supset C$, em geral, podemos prolongar ψ a A de diversas maneiras, isto é, o prolongamento não é único. Mais precisamente, é fácil provar que o prolongamento de ψ a A é único sse $A = C$ (caso em que o prolongamento de ψ a A coincide com a própria ψ) ou B é um conjunto singular (caso em que o prolongamento de ψ a A é uma função constante).

Assim, a função

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \forall x \in \mathbb{N} \\ -1 & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

tem, como restrição a $\mathbb{N}$, a função f do exemplo 4, logo F é um prolongamento de f a $\mathbb{R}$. Mas g (no exemplo 5) também é um prolongamento de f a $\mathbb{R}$ e as funções F e g são distintas.

No que se segue, continuamos a fazer considerações sobre os cinco exemplos atrás, que nos irão sugerir novas definições importantes.

Notemos agora o seguinte:

No exemplo 1, todo o elemento do conjunto B é imagem por φ de algum elemento de A. Pelo contrário, no exemplo 2, nenhum elemento de B mora na Rua do Lírio. Do mesmo modo, no exemplo 3, apenas os números reais 2, 5 e 9 são imagem por h de elementos de D. Concluímos que o conjunto das imagens de uma dada função pode ser distinto do conjunto de chegada. Assim começamos por definir:

Definição 4. *Dada uma função $f : A \to B$ chamamos* contradomínio de f *ao subconjunto de B dado por*

$$\{y \in B;\ \exists x \in A \quad y = f(x)\} = \{f(x);\ x \in A\}.$$

Como vimos, há funções para as quais o contradomínio coincide com o conjunto de chegada e outras para as quais isto não acontece. Esta diferença sugere a definição seguinte:

Definição 5. *Uma função $f : A \to B$ é* sobrejectiva *sse o contradomínio de f coincide com B. Simbolicamente, f é sobrejectiva sse*

$$\forall y \in B\ \exists x \in A \quad y = f(x).$$

Caso a função f de A em B seja sobrejectiva, muitas vezes dizemos que f é função de A *sobre* B.

Assim, a função do exemplo 1 é sobrejectiva, enquanto que nem ψ (exemplo 2) nem h (exemplo 3) o é.

No exemplo 4, o ponto 0 não está no contradomínio, logo f não é sobrejectiva. Já no exemplo 5, g é sobrejectiva: dado um qualquer número real a,

$$b = \frac{a-1}{2}$$

é um número real e tem-se que $g(b) = a$; isto é,

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists b \in \mathbb{R} : \quad 2b + 1 = a.$$

A propósito da noção de contradomínio, introduzimos agora uma noção muito útil e sugestiva:

Definição 6. *Seja $f : A \to B$ e C um conjunto qualquer; designamos por* imagem de C por f, $f(C)$, *o subconjunto de B constituído pelas imagens por f de todos os elementos de C, isto é,*

$$f(C) = \{f(x);\ x \in C \cap A\}.$$

Nestas condições, se $C \cap A = \emptyset$, tem-se $f(C) = \emptyset$; se $C \cap A \neq \emptyset$, então $f(C)$ é o contradomínio da restrição de f ao conjunto $C \cap A$ e, em particular, com $C = A$, $f(A)$ designa o contradomínio da função f. Com esta notação, $f : A \to B$ é sobrejectiva sse $f(A) = B$.

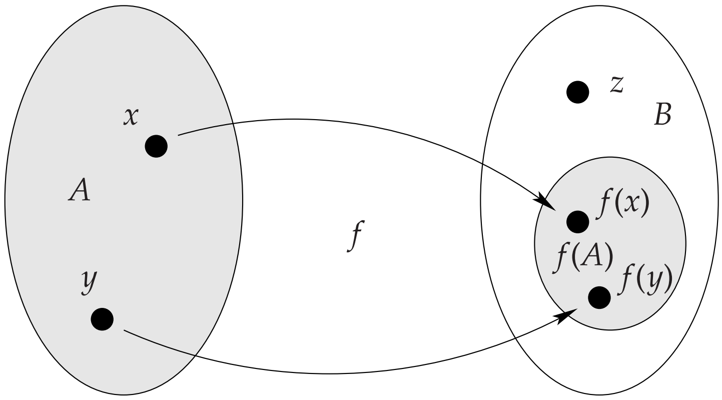

Figura 2: Diagrama de Venn para uma função *não* sobrejectiva.

Uma outra propriedade importante pode ser também motivada pelos exemplos anteriores:

No exemplo 2, Sá e Silva moram na mesma rua, ou seja,

$$\psi(\text{Sá}) = \psi(\text{Silva}) = \text{Rua da Rosa}.$$

Pelo contrário, em qualquer um dos outros exemplos, a função faz corresponder imagens diferentes a objectos diferentes; uma função nestas condições diz-se *injectiva*. Assim,

Definição 7. *Uma função $f : A \to B$ diz-se* injectiva *sse elementos distintos de A têm imagens distintas.*

De forma equivalente, f é injectiva sse

$$\forall x, y \in A \quad x \neq y \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(y),$$

ou, ainda, sse

$$\forall x, y \in A \quad f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y.$$

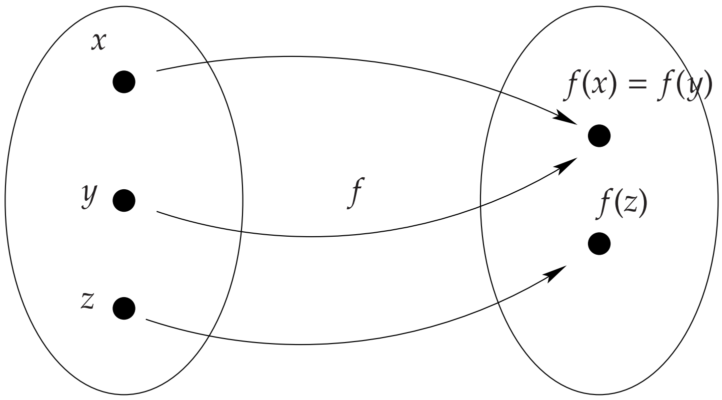

Figura 3: Diagrama de Venn para uma função *não* injectiva.

Então, a função ψ do exemplo 2 não é injectiva.

Reunindo as duas noções, de sobrejectividade e de injectividade,

Definição 8. *Uma função $f : A \to B$ diz-se* bijectiva *sse é sobrejectiva e injectiva.*

Em linguagem simbólica, $f : A \to B$ é bijectiva sse

$$\forall y \in B \; \exists^1 x \in A : \quad f(x) = f(y).$$

As funções φ do exemplo 1 e g do exemplo 5 são bijectivas.

ψ não é bijectiva porque não é injectiva nem sobrejectiva.

As funções h do exemplo 3 e f do exemplo 4 não são bijectivas porque, embora sejam ambas injectivas, não são sobrejectivas.

Exemplo 6.

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = (x-1)^2 + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A função F não é injectiva porque, por exemplo,

$$F(0) = F(2).$$

F também não é sobrejectiva, uma vez que se tem

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) \geq 2,$$

logo, por exemplo, $y = 1$ não pertence ao contradomínio de F.

Exemplo 7. Seja A um conjunto. À função i (dependente do conjunto A) definida por

$$\begin{aligned} i : A &\to A \\ i(x) = x &\quad \forall x \in A \end{aligned}$$

chamamos função *identidade em A*. É evidente que se trata de uma função bijectiva.

Retomemos a função φ do exemplo 1; como dissemos, trata-se de uma função bijectiva. Podemos, de forma natural, estabelecer a correspondência "inversa", agora de B em A e dada por

$$\begin{array}{rcl} \text{Sousa} & — & \text{António} \\ \text{Silva} & — & \text{Inês} \\ \text{Sá} & — & \text{Maria} \\ \text{Sarmento} & — & \text{Gil} \end{array}$$

Deste modo, definimos uma nova função.

Ao aplicarmos o mesmo tipo de procedimento à função ψ do exemplo 2, obtemos:

$$\begin{array}{rcl} \text{Rua da Rosa} & — & \begin{cases} \text{Sá} \\ \text{Silva} \end{cases} \\ \text{Rua do Cravo} & — & \text{Sarmento} \\ \text{Rua do Malmequer} & — & \text{Sousa} \\ \text{Rua do Lírio} & — & \text{(não tem imagem)} \end{array}$$

Ora, intuitivamente, não faz muito sentido falar de uma correspondência definida no conjunto C e depois, haver elementos de C sem imagem. Será mais natural, portanto, começar por considerar o contradomínio de ψ, $\psi(B)$, e depois definir a correspondência de $\psi(B)$ em B seguinte

$$\begin{array}{rcl} \text{Rua da Rosa} & — & \begin{cases} \text{Sá} \\ \text{Silva} \end{cases} \\ \text{Rua do Cravo} & — & \text{Sarmento} \\ \text{Rua do Malmequer} & — & \text{Sousa} \end{array}$$

No entanto, esta correspondência não é uma função!

Já no caso do exemplo 3, podemos definir uma função de $h(D) = \{2, 5, 9\}$ em D por

$$\begin{aligned} 2 &\mapsto (1, 1) \\ 5 &\mapsto (2, 3) \\ 9 &\mapsto (3, 6) \end{aligned}$$

As considerações anteriores tornam evidente que o facto da correspondência "inversa" ser uma função está relacionado com a injectividade da função inicial. Mais precisamente, a correspondência "inversa" de uma dada função f é uma função sse f é injectiva. Assim

Definição 9. *Seja $f : A \to B$ uma função injectiva. À função de $f(A)$ em A que a cada $x \in f(A)$ faz corresponder o (único) $y \in A$ tal que $f(y) = x$, damos o nome de* função inversa de f *e designamo-la por f^{-1}.*

De forma equivalente tem-se

$$f^{-1} : f(A) \to A$$
$$\forall x \in f(A) \quad f^{-1}(x) = y \;\Leftrightarrow\; f(y) = x.$$

Utilizando diagramas de Venn tem-se, de forma sugestiva,

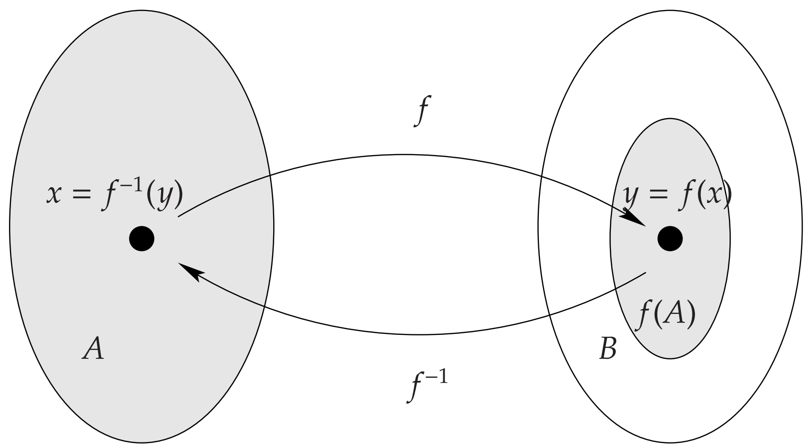

Figura 4: Diagrama de Venn de função inversa.

Observe-se que, nas condições da definição, f^{-1} é uma função bijectiva definida em $f(A)$ com valores em A.

Exemplo 8. A função (no exemplo 4)

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f(x) = 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

é injectiva, logo é invertível.

O seu contradomínio $f(\mathbb{N})$ é constituído pelos números naturais ímpares, isto é,

$$f(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{N};\ \exists m \in \mathbb{N} \quad x = 2m + 1\}.$$

A sua função inversa é, portanto, definida por

$$f^{-1} : f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \quad \forall x \in f(\mathbb{N}).$$

Analogamente, no exemplo 5, a função g também é invertível e tem-se

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Note-se que g é função sobrejectiva, pois $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$).

Exemplo 9. Consideremos a função

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\alpha(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Trata-se de uma função não sobrejectiva, visto que $\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$. Além disso, e este é o problema, α não é injectiva, logo não é invertível.

No entanto, já é injectiva a restrição de α ao conjunto $\mathbb{R}_0^+$; designemos esta restrição por β:

$$\beta : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$$
$$\beta(x) = x^2 \quad \forall x \geq 0.$$

A inversa β^{-1} é a função definida por

$$\beta^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \quad \beta^{-1}(x) = y \ \Leftrightarrow\ y^2 = x \ \wedge\ y \geq 0.$$

Como sabe, dado um real $x \in \mathbb{R}_0^+$, o único $y \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $y^2 = x$ é, por definição, designado por $\sqrt{x}$. Neste sentido, tem-se

$$\beta^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+.$$

Mas também a restrição de α ao conjunto $\mathbb{R}_0^- =]-\infty, 0]$ é função injectiva com contradomínio $\mathbb{R}_0^+$; designemo-la por γ:

$$\gamma : \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{R}$$
$$\gamma(x) = x^2 \quad \forall x \leq 0.$$

Como $\gamma(\mathbb{R}_0^-) = \mathbb{R}_0^+$, logo a inversa γ^{-1} é a função definida por

$$\gamma^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^-$$
$$\gamma^{-1}(x) = -\sqrt{x} \quad \forall x \geq 0.$$

Em seguida, propomo-nos recordar um processo muito comum de gerar novas funções: o método da composição.

De um ponto de vista intuitivo, a origem do processo da composição reside numa ideia muito simples, ilustrada pelo seguinte exemplo: uma pessoa sai de Lisboa, vai de carro até Coimbra, aí toma o comboio para o Porto, onde, finalmente, apanha o barco para a Régua. Omitindo os pormenores da viagem, a pessoa viajou de Lisboa até à Régua!

Exemplo 10. Consideremos, de novo, as funções φ e ψ dos dois primeiros exemplos. Em linguagem corrente, tomando um aluno do conjunto A, a função φ começa por lhe associar o respectivo apelido e, em seguida, a função ψ associa ao apelido, a rua onde mora. Tem-se, por exemplo,

$$\text{Inês} \overset{\varphi}{\mapsto} \text{Silva} \overset{\psi}{\mapsto} \text{Rua da Rosa.}$$

Seguindo este processo, a cada aluno acabamos por lhe associar a rua onde mora; mais precisamente, estamos a considerar uma (nova) função de A em C tal que

$$A \ni x \ \mapsto \ \text{rua onde } x \text{ mora,}$$

ou, usando a notação acima,

$$A \ni x \ \mapsto \ \psi(\varphi(x)) \in C.$$

A esta função damos o nome de "φ composta por ψ" e designamo-la por $\psi \circ \varphi$. Resumindo,

$$\psi \circ \varphi : A \to C$$
$$\psi \circ \varphi(x) = \psi(\varphi(x)) \quad \forall x \in A.$$

Observe-se que, neste caso, não tem sentido considerar a composição de ψ com φ, $\varphi \circ \psi$.

Exemplo 11. Vejamos ainda mais um exemplo, tomando a função no exemplo 6,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = (x-1)^2 + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Partindo de um número real x e até chegarmos ao número real $f(x)$, seguimos o seguinte "itinerário":

- A x começamos por associar o número real $x-1$; por outras palavras, consideramos a função

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Em seguida, ao real $x - 1$ associamos-lhe o seu quadrado $(x - 1)^2$; estamos pois a considerar a função

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h(y) = y^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

- Finalmente, ao número real $(x - 1)^2$ adicionamos-lhe o número 2:

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$j(z) = z + 2 \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Resumindo, dado um número real x,

$$x \overset{g}{\mapsto} x - 1 \overset{h}{\mapsto} (x - 1)^2 \overset{j}{\mapsto} (x - 1)^2 + 2,$$

isto é,

$$f(x) = j(h(g(x))) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ou ainda,

$$f = j \circ h \circ g.$$

Em termos gerais, a situação é pois a seguinte: são dadas funções $f : A \to B$ e $g : C \to D$ tais que o contradomínio de f é um subconjunto do domínio de g, $f(A) \subset C$. De acordo com esta condição, qualquer que seja o $x \in A$, a sua imagem $f(x)$ está no domínio de g e, consequentemente, existe $g(f(x)) \in D$.

Deste modo, podemos considerar a "cadeia"

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & f(A) \subset C & \longrightarrow & D \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

o que define uma nova função de A com valores em D.

Definição 10. *Damos o nome de g* composta com f, *e designamos por $g \circ f$, à função definida por*

$$g \circ f : A \to D$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A.$$

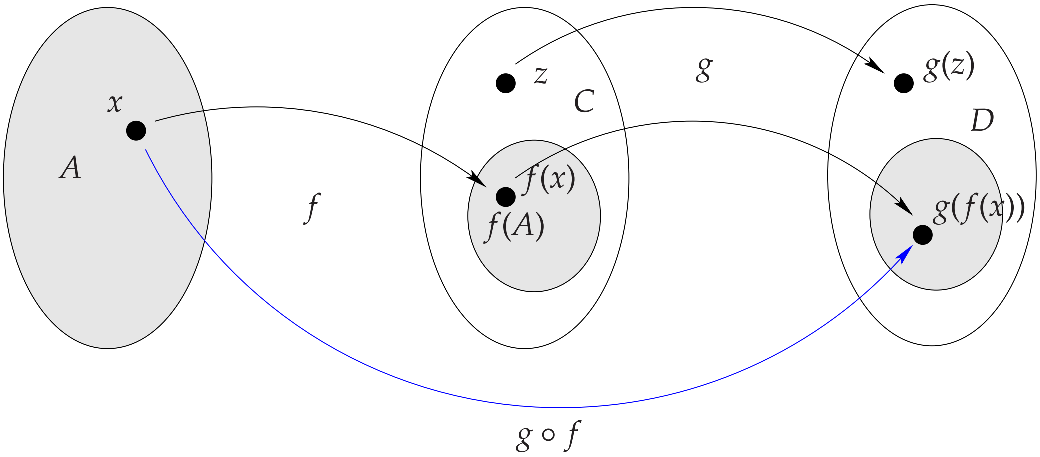

Figura 5: Diagrama de Venn de uma função composta.

Além disso, se supusermos que $g(C) \subset A$, podemos então definir uma função de C em B, notada por $f \circ g$ e dada por

$$f \circ g : C \to B$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in C.$$

Exemplo 12. Consideremos

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \sqrt{x} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

e

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0.$$

Ao pretendermos definir $g \circ f$, surge imediatamente um problema: $f(1) = 0$ e $0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$, isto é, o contradomínio de f não é um subconjunto do domínio de g.

Como se tem

$$\{x \in \mathbb{R}_0^+ : \ f(x) = 0\} = \{1\}$$

apenas podemos definir g composta com a restrição de f ao conjunto $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$, ou seja,

$$g \circ (f|_{\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}}) : \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto g(\sqrt{x} - 1) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}.$$

A notação é, no entanto, bastante pesada, o que é indesejável. Por isso, referir-nos-emos à função $g \circ f$, mas não esquecendo que esta função tem por domínio o conjunto

$$\begin{aligned}
&\{x \in \mathbb{R};\ x \in D_f \ \wedge\ f(x) \in D_g\} \\
&= \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0 \ \wedge\ \sqrt{x} - 1 \neq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R};\ x \geq 0 \ \wedge\ x \neq 1\}
\end{aligned}$$

onde D_f e D_g designam o domínio de f e o de g, respectivamente.

Temos, por fim

$$\begin{gathered}
g \circ f : \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\
(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}.
\end{gathered}$$

De forma análoga, designamos por $f \circ g$ a função que tem por domínio o conjunto

$$\begin{aligned}
\left\{x \in \mathbb{R};\ x \in D_g \ \wedge\ g(x) \in D_f\right\} &= \left\{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0 \ \wedge\ \frac{1}{x} \geq 0\right\} \\
&= \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0 \ \wedge\ x > 0\} = \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[\,.
\end{aligned}$$

Além disso

$$\forall x > 0 \quad (f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1.$$

Então, tem-se

$$\begin{gathered}
f \circ g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \\
(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \quad \forall x > 0.
\end{gathered}$$

Observemos que $f \circ g \neq g \circ f$.

O senso comum sugere-nos que, dada uma função f injectiva, compondo f com a sua inversa f^{-1} obtemos a função identidade. O que é verdade se mantivermos esta imprecisão. O ponto de vista matemático, no entanto, impõe-nos rigor pelo que:

Exemplo 13. Seja $h : A \to B$ uma função injectiva; nestas condições, h^{-1} é a função definida no conjunto $h(A) \subset B$ por

$$\forall x \in h(A) \quad h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow h(y) = x.$$

A função composta $h \circ h^{-1}$ está, portanto, definida em

$$\{x \in B;\ x \in D_{h^{-1}} \ \wedge\ h^{-1}(x) \in D_h\} = \{x \in B;\ x \in h(A) \ \wedge\ h^{-1}(x) \in A\} = h(A)$$

e tem-se

$$\forall x \in h(A) \quad (h \circ h^{-1})(x) = h(h^{-1}(x)) = x.$$

Concluindo, $h \circ h^{-1}$ é a função identidade em $h(A)$.

Por outro lado $h^{-1} \circ h$ tem por domínio

$$\{x \in A;\ h(x) \in D_{h^{-1}}\} = \{x \in A;\ h(x) \in h(A)\} = A$$

e tem-se

$$\forall x \in A \quad (h^{-1} \circ h)(x) = h^{-1}(h(x)) = x$$

e $h^{-1} \circ h$ é a função identidade em A.

Note-se que, em geral, as funções $h \circ h^{-1}$ e $h^{-1} \circ h$ têm domínios diferentes, logo são funções distintas. Mais precisamente, tem-se

$$h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h \quad \Leftrightarrow \quad A = h(A).$$

Para terminar, faremos ainda referência a uma noção já conhecida. Então, à excepção dos exemplos 1 e 2, em todos os outros, o conjunto de chegada da função respectiva é um subconjunto de $\mathbb{R}$; por outras palavras, cada uma dessas funções tem números reais por imagens ou, abreviadamente, é uma função real.

Nos exemplos anteriores, agora à excepção de 1, 2 e 3, também o respectivo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$, razão pela qual diremos que qualquer uma destas funções tem variável real.

Formalizando,

Definição 11. *Seja uma função $f : A \to B$.*

A função f é real *sse $B \subset \mathbb{R}$.*

A função f é de variável real *sse $A \subset \mathbb{R}$.*

Podemos então dizer que:

As funções φ e ψ dos exemplos 1 e 2, não são reais nem são de variável real.

A função h do exemplo 3 é real, mas não é de variável real.

Todos os restantes exemplos são de funções reais de variável real.

Nomenclatura

$\psi \circ \varphi$ composição de funções, 13

$f(C)$ imagem de um conjunto por uma função, 8

f^{-1} função inversa, 11

$f|_C$ restrição de uma função a um conjunto, 6

Índice remissivo