Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 4

(Variedades. Espaço Tangente. Espaço Normal. Extremos Condicionados)

1. Mostre que cada um dos conjuntos seguintes é uma variedade, determine a respectiva dimensão e descreva-o parametricamente:

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1\}$.

   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = \tan x \,;\, -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}\}$.

   c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1 \,;\, y > |x| \,;\, |z| < 2\}$.

   d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 < z = 1 - x^2 - y^2\}$.

   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; (\sqrt{x^2+y^2} - 4)^2 + z^2 = 1 \,;\, z > 0\}$.

   f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,;\, z > \dfrac{1}{2}\}$.

   g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = z^2 + 1 \,;\, |z| < 1\}$.

   h) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = z^2 + 1 \,;\, y + z = 1\}$.

2. Considere o conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, x = y, x > 0\}.$$

   a) Mostre que A é uma variedade e determine a sua dimensão.

   b) Determine um vector tangente a A no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

   c) Parametrize A.

3. Determine a recta tangente e o plano normal à linha definida por

$$\{(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(\frac{t}{2})) \;;\; -\pi < t < \pi\}$$

   no ponto $(1,0,0)$.

4. Determine a recta normal e o plano tangente ao cone

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = 3 - \sqrt{x^2+y^2}\,\}$$

   no ponto $(3,4,-2)$.

5. Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade

$$L = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1 \,;\, z = x^2 - y^2\right\},$$

   no ponto $(1,0,1)$.

6. Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = x^2 - y^2 \,;\, x^2 + y^2 < 2\right\},$$

   no ponto $(1,0,1)$.

7. Para cada um dos casos seguintes, determine os extremos da função f no conjunto S:

   a) $f(x,y,z) = x + y + z, \qquad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 2 \,;\, x + z = 1\}$.

b) $f(x,y,z) = xyz, \qquad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

8. Use o Método dos Multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos de máximo da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ no disco de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

9. Determine os extremos absolutos da função $f(x,y,z) = x + y - z$ que se encontram na bola $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

10. As faces de uma caixa rectangular sem tampa têm área total igual a 16 m^2. Determine as dimensões da caixa que maximizam o respectivo volume.

11. Determine os extremos da função $f(x,y,z) = x + y + z$ na superfície definida por $xyz = 1$.

12. Determine os pontos da linha definida por $\big(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(\frac{t}{2})\big)$; $t \in \mathbb{R}$, mais afastados da origem.