Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 6

(Integrais de Campos Escalares em Variedades. Trabalho. Campos Gradientes. Potenciais)

1. Calcule o comprimento do arco de hélice descrito pelo caminho

$$\alpha(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

2. Determine a massa total do fio descrito por

$$\gamma(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t, t)\ ; \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

com densidade de massa por unidade de comprimento $\sigma(x, y, z) = z$.

3. Considere o fio descrito pelas equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1\ ;\ z = y,$$

com densidade de massa por unidade de comprimento $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2$.
Determine a massa total e as coordenadas do respectivo centro de massa.

4. Considere a variedade-1 definida por

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z,\ 2x + 2y + z = -1\},$$

e com densidade de carga eléctrica por unidade de comprimento dada por

$$\alpha(x, y, z) = \sqrt{5 - 8(x + 1)(y + 1)}.$$

Calcule a carga eléctrica total de C.

5. Considere a variedade-2

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x^2 + y^2)^2,\ x^2 + y^2 < 1\},$$

com densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = \sqrt{1 + 16(x^2 + y^2)^3}$. Calcule a massa total de S.

6. Calcule a área da superfície

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},\ \sqrt{3}|y| < |x|,\ z > 0\}.$$

7. Considere a superficíe

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy,\ 1 < x < 2,\ 1 < y < 2\},$$

com densidade de massa dada por $\alpha(x, y, z) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2+y^2}}$. Calcule o momento de inércia de B relativamente ao eixo Ox.

8. Calcule as coordenadas do centróide do hemisfério

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}, \qquad a > 0.$$

9. Considere o campo vectorial $f(x, y) = (-y, x)$.

   a) Calcule o trabalho realizado pelo campo f ao longo da elipse de equação $x^2 + 4y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário.

b) Calcule o trabalho realizado por f ao longo da linha que limita o quarto de círculo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$, percorrida no sentido horário.

c) Represente geometricamente o campo f e, sem efectuar os cálculos, confirme o resultado da alínea anterior.

10. Calcule o trabalho do campo vectorial $f(x,y,z) = (-y, x, xy+z^2)$ ao longo do caminho dado por $g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t), t \in [0, 2\pi]$.

11. Calcule o trabalho do campo vectorial $h(x,y,z) = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2)$ ao longo do caminho $g(t) = (t, t^2, t), t \in [-1, 1]$.

12. Calcule o trabalho realizado pelo campo vectorial $f(x,y,z) = (y, z, x)$ ao longo das seguintes curvas:

    (a) O segmento de recta que une o ponto $(1,0,1)$ a $(2,1,-3)$.

    (b) A intersecção das superfícies $x^2+y^2 = 1$ e $z = xy$ num sentido que parece o anti-horário quando visto desde um ponto no eixo dos zz muito acima do plano xy.

    (c) A intersecção das superfícies definidas pelas equações $x+y = 2$ e $x^2+y^2+z^2 = 2(x+y)$ num sentido que parece o horário quando visto desde o ponto $(10,10,0)$.

13. Considere os campos vectoriais seguintes:

$$\begin{cases} f(x,y) &=& (x-y, x-2), \\ g(x,y) &=& (3+2xy, x^2-3y^2). \end{cases}$$

Determine se f e g são ou não conservativos. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

14. Considere os campos vectoriais seguintes:

$$\begin{cases} f(x,y,z) &=& (e^x, e^y, e^z), \\ g(x,y,z) &=& (e^{yz}, xze^{yz}, xye^{yz}), \\ h(x,y,z) &=& (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, z). \end{cases}$$

    a) Determine se f, g e h são ou não conservativos. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

    b) Calcule o trabalho de f, g e h ao longo da curva definida pelas equações $y = x^3$, $z = 0$, percorrida desde o ponto $(0,0,0)$ até ao ponto $(1,1,0)$.

15. Determine se o campo $f(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})$ é ou não conservativo. Calcule o trabalho realizado pelo campo f ao longo da elipse definida por $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{20} = 1$, percorrida no sentido anti-horário.