

Introdução à Análise Complexa

1^o Semestre de 2024/25

LMAC

Exercícios

I Números complexos

1. Escreva os seguintes números complexos na forma algébrica e represente-os no plano de Argand:

a) $(2 + i)(1 - i) = 3 - i$,

b) $\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$,

c) $\frac{2+i}{1+i} = \frac{3-i}{2}$,

d) $(2 - 3i)^2 = -5 - 12i$,

e) $(1 - 2i)^3 = -11 + 2i$,

f) $i^{81} = i$.

2. Determine o módulo e o argumento dos seguintes números complexos e represente-os no plano de Argand:

a) $3 = 3E(i0)$,

b) $-2 = 2E(i\pi)$,

c) $1 + i = \sqrt{2}E(i\frac{\pi}{4})$,

d) $3 - 4i = 5E(-i \arctan \frac{4}{3})$,

e) $-1 - i = \sqrt{2}E(i\frac{5\pi}{4})$.

3. Verifique as seguintes propriedades do conjugado:

a) $\overline{\overline{z}} = z$.

b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

c) $\overline{zw} = \overline{z} \overline{w}$,

d) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

4. Verifique as seguintes propriedades do módulo:

a) $|\overline{z}| = |z|$.

b) $|zw| = |z| |w|$,

- c) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$,
 d) $|z + w| \leq |z| + |w|$,
 e) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.

5. Calcule as raízes cúbicas de $-8i$ e assinale-as no plano complexo. Resposta: $2E(-i\frac{\pi}{6})$, $2E(i\frac{\pi}{2})$, $2E(i\frac{7\pi}{6})$.

6. Determine para que valores de θ , pertencentes ao intervalo $] -\pi, \pi]$, se tem

$$|1 + E(i\theta)| = \sqrt{2}.$$

Resposta: $\pm\frac{\pi}{2}$.

7. Sejam z_1 , z_2 e z_3 três números complexos de módulo unitário satisfazendo $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Mostre que esses complexos são vértices de um triângulo equilátero. Sugestão: Comece por reduzir ao caso em que $z_1 = 1$; verifique que então z_2 e z_3 são conjugados; logo $z_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z_3 = -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8. Determine as soluções das seguintes equações:

(i) $(1 - z)^6 = (1 + z)^6$. Resposta: $0, \pm i\sqrt{3}, \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$.

(ii) $1 - z + z^2 = 0$. Resposta: $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

(iii) $z^6 - z^4 + z^2 - 1 = 0$. Resposta: $\pm 1, E(\pm i\frac{\pi}{4}), E(\pm i\frac{3\pi}{4})$.

(iv) $1 + z + z^2 + \dots + z^7 = 0$. Resposta: $-1, \pm i, E(\pm i\frac{\pi}{4}), E(\pm i\frac{3\pi}{4})$.

9. Calcule e represente no plano de Argand:

a) $\sqrt[3]{i}$. Resposta: $E(i\frac{\pi}{6}), E(i\frac{5\pi}{6}), E(i\frac{3\pi}{2})$.

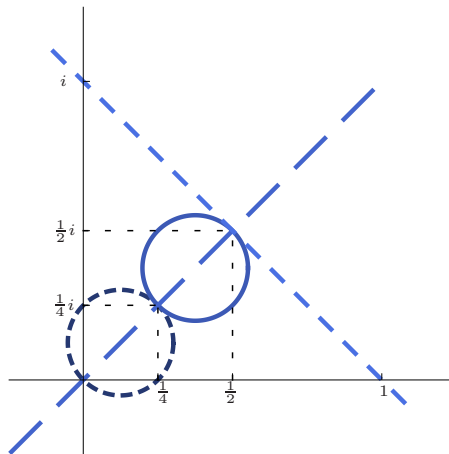
b) $\sqrt[4]{-1}$. Resposta: $E(i\frac{\pi}{4}), E(i\frac{3\pi}{4}), E(i\frac{5\pi}{4}), E(i\frac{7\pi}{4})$.

c) $\sqrt[4]{1-i}$. Resposta: $\sqrt[4]{2}E(-i\frac{\pi}{8}), \sqrt[4]{2}E(i\frac{7\pi}{8})$.

10. Verifique se $\{(\sqrt[3]{z})^2\} = \{\sqrt[3]{z^2}\}$ para todo o $z \in \mathbb{C}$.

II Funções complexas

- Determine a equação da recta que passa por -1 e i . Resposta: $(-1+i)\bar{z} + (-1-i)z - 2 = 0$.
 - Determine a equação da circunferência que tem centro em -1 e passa por i . Resposta: $|z+1| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z|^2 + z + \bar{z} - 1 = 0$.
 - Determine dois pontos da recta $(1-2i)z + (1+2i)\bar{z} - 2 = 0$. Resposta: 1 e $\frac{i}{2}$.
 - Determine o centro e o raio da circunferência $|z|^2 - (1-i)z - (1+i)\bar{z} + 1 = 0$. Resposta: $1+i$ e 1 .
- Represente a imagem das duas rectas e das duas circunferências por $z \mapsto \frac{1}{z}$:



- Calcule as imagens das regiões R pelas funções f :
 - $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \pi/4 < \arg z < \pi/2\}$, $f(z) = z^3$.
 - $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, $f(re^{i\theta}) = \sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}$ com $-\pi < \theta \leq \pi$.
 - $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f(z) = \frac{1}{z+1}$.
Resposta: $\{z \in \mathbb{C} : \Re z > \frac{1}{2}\}$
 - $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $f(z) = \frac{z-1}{iz+1}$.
Resposta: $\{z \in \mathbb{C} : \Im(1-i)z > 0\}$.
 - $R = \{z \in \mathbb{C} : 1 < \Re z < 2, 0 < \Im z < 1, |z-2| > 1\}$, $f(z) = \frac{1}{z-1}$.
Resposta: $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < \frac{1}{2}, |z + \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}, \Im z < 0\}$.

- f) $R = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 1, \Im z < 0\}$, $f(z) = \frac{1}{z+i}$.
Resposta: $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}, |z + \frac{i}{2}| > \frac{1}{2}\}$

4. Sejam a e b números complexos. Prove usando complexos que

$$\Re \left(\frac{z-a}{z-b} \right) = 0$$

representa a equação de uma circunferência com diâmetro de extremidades em a e b .

5. Calcule as imagens das regiões R pelas funções f :

- a) $R = \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$, $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ (transformação conforme de um semiplano num disco).
- b) $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ e } \Im z > 0\}$, $f(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ (transformação conforme de um semidisco num semiplano).
- c) $R = \mathbb{C} \setminus \{z = x+i0 \in \mathbb{C} : x \in [-1, 1]\}$, $f(z) = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$ (transformação conforme do complemento de um segmento de recta num semiplano).

III Diferenciabilidade de funções complexas

1. Estude a diferenciabilidade de $x + iy \mapsto e^x E(iy)$.

Resposta: A função é diferenciável em qualquer $z = x + iy \in \mathbb{C}$ e com derivada igual à função.

2. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy + \cos y).$$

Resposta: f é diferenciável quando $y = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Neste caso, $f'(z) = 2z$.

3. Estude a diferenciabilidade das funções $z \mapsto \bar{z}^2$, $z \mapsto z^2 \bar{z}$ e $z \mapsto |z| \bar{z}$.

Resposta: Qualquer das funções é diferenciável apenas em $z = 0$ e com derivada nula.

4. Estude a diferenciabilidade da função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(x + iy) = \frac{1}{3}(x + 1)^3 + y^2 + iy.$$

Resposta: $f'(-2, 0) = 1$ e $f'(0, 0) = 1$.

5. Determine o conjunto dos pontos onde a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(x + iy) = -(x + 1)E(iy) + i(x - 1)E(-iy),$$

é diferenciável.

Resposta: f é diferenciável quando $x = 0$ ou quando $y = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$.

IV Diferenciabilidade de funções complexas em coordenadas polares, séries de potências complexas, exponencial, logaritmo

1. Usando a equação de Cauchy-Riemann na forma polar, prove a diferenciabilidade e calcule a derivada de
 - a) $z \mapsto 1/z^n$ com $n \in \mathbb{N}_1$;
 - b) $z \mapsto \sqrt[n]{z}$ onde $\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}$ com $-\pi < \theta \leq \pi$, onde $n \in \mathbb{N}$. Esta função é diferenciável no eixo real negativo? E em zero?
2. Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada da função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = r^2 + i\theta$ para $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, e por $f(0) = 0$.
3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(re^{i\theta}) = (r \ln r - r^2)e^{i\theta}.$$

- a) Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada de f .
 - b) Determine se f pode ser prolongada por continuidade à origem. Em caso afirmativo, estude a diferenciabilidade do prolongamento na origem.
4. Determine o raio de convergência de
 - a) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, Resposta: $R = 1$,
 - b) $\sum_{n=0}^{\infty} nz^n$, Resposta: $R = 1$,
 - c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^n z^n$, Resposta: $R = e^{-1}$,
 - d) $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$, Resposta: $R = 0$,
 - e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} z^n$, Resposta: $R = 4$,
 - f) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2(-1)^n} z^n$, Resposta: $R = 0$,
 - g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} z^n$, Resposta: $R = 1/2$.
 5. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < 1, 0 < \Im z < \pi\}$ por $z \mapsto e^z$.
 6. Obtenha o desenvolvimento em série de potências de $\sin z$.

7. Estude a diferenciabilidade de $z \mapsto \log z$, onde

$$\log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta \quad \text{com } -\pi < \theta \leq \pi$$

é o logaritmo principal.

8. Esboce a imagem de $\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0, |z| > 1\}$ por $z \mapsto \log z$ onde \log designa o logaritmo principal.

9. Calcule

a) $\log(-i)$, Resposta: $-i\pi/2$,

b) $\log(1-i)$, Resposta: $\ln 2/2 - i\pi/4$,

c) $\log(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)$, Resposta: $i\pi/3$,

d) i^i . Resposta: $e^{-\pi/2}$,

10. Estabeleça as seguintes identidades (onde $z \in \mathbb{C}$):

a) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,

b) $\cos(iz) = \cosh(z)$,

c) $\sin(iz) = i \sinh z$,

d) $\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w$.

e) $\sin\left(-i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)\right) = z$.

11. Mostre que a função $\sin z$ é ilimitada em qualquer recta não paralela ao eixo real.

12. Resolva as seguintes equações:

a) $e^z = -1$, Resposta: $z = i(2k+1)\pi$,

b) $\log(i-z) = 1$, Resposta: $z = -e + i$,

c) $\sin z - \cos z = i$, Resposta: $z = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$ ou
 $z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k - i \ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)$ com $k \in \mathbb{Z}$.

V Integrais de Funções Complexas, Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy

1. Usando a definição, calcule

- $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ onde γ é o segmento de recta que une 1 a $2 + 3i$. r: $6 + 3i$.
- $\int_{\gamma} z^2 dz$, onde γ é o arco de circunferência que une 3 a $1 - 2i$ e que passa por $1 + 2i$. r: $\frac{(1-2i)^3}{3} - \frac{3^3}{3}$.
- $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ onde γ é o troço de parábola $\{x + iy \in \mathbb{C} : y = x^2\}$ com início em 0 e fim em $1 + i$. r: $1 + \frac{i}{3}$.
- $\int_{|z|=r} \arg z |dz|$, onde $\arg z$ designa o argumento principal. r: 0.

2. Calcule ao longo de uma curva no primeiro quadrante:

- $\int_2^{1+i} z dz$; r: $-2 + i$
- $\int_1^i (1 + \sqrt{z}) dz$, onde \sqrt{z} designa a raiz principal; r: $i - 1 + \frac{2}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i - 1 \right)$;
- $\int_0^{1+i\pi/2} e^{2z} dz$; r: $-\frac{1+e^2}{2}$
- $\int_1^i \frac{1}{z} dz$; r: $\frac{i\pi}{2}$.

3. Justifique que

- $z \mapsto \int_0^z e^{\sin w} dw$,
- $z \mapsto \int_0^{z^2} \sin(w^2) dw$, e
- $z \mapsto \int_0^{\sin z} e^{w^2} dw$

são funções bem definidas. Calcule as suas derivadas. r: $e^{\sin z}$, $2z \sin(z^4)$, e $\cos z e^{\sin^2 z}$.

4. Calcule

- $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz$; r: $2\pi i$;
- $\int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz$; r: 0;
- $\int_{|z|=3} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz$; r: $\frac{2\pi i}{9}$;
- $\int_{|z|=5} \frac{z}{(z-2)^2(z+4)} dz$; r: 0.

5. Calcule

- a) $\int_{|z|=2.5} \frac{1}{z^2+5z+6} dz$; r: $2\pi i$;
- b) $\int_{|z|=2} \frac{1}{(z+1)^n} dz$, $n \in \mathbb{Z}$; r: 0 se $n \neq -1$, $2\pi i$ se $n = 1$;
- c) $\int_{|z|=2} \frac{e^{2z}}{(z+1)^n} dz$, $n \in \mathbb{Z}$; r: 0 se $n \leq 0$, $\frac{2\pi i}{(n-1)!} 2^{n-1} e^{-2}$ se $n > 0$;
- d) $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z^2-1)^2} dz$; r: $-\frac{\pi i}{2}$;
- e) $\int_{|z|=3\pi} \frac{\sin z}{z} dz$; r: 0.
6. Seja f uma função inteira que satisfaz $|f(z)| \leq c(1 + |z|^3)$ para determinado c em \mathbb{R}^+ . O que pode afirmar quanto a f ? Sugestão: Prove uma generalização do Teorema de Liouville.
7. Sejam $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Suponha f é inteira e que o seu contradomínio não intersecta a bola aberta de raio r centrada em a . Prove que f é constante.

VI Séries de Taylor e de Laurent, Teorema dos Resíduos

1. Calcule o desenvolvimento em série de Taylor ou Laurent em torno do ponto zero, indicando a maior região onde é válido:

- a) $z \mapsto \frac{1}{1-z}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ para $|z| < 1$;
- b) $z \mapsto \frac{1}{1+z}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n$ para $|z| < 1$;
- c) $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$ para $|z| < 1$;
- d) $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^2}$; r: $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}$ para $|z| < 1$;
- e) $z \mapsto \log(1+z)$; r: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$ para $|z| < 1$;
- f) $z \mapsto e^z$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ para todo o z ;
- g) $z \mapsto \sin z$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ para todo o z ;
- h) $z \mapsto \cos z^3$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{6n}}{(2n)!}$ para todo o z ;
- i) $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$. r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ para todo o $z \neq 0$;

2. Calcule o desenvolvimento em série de Taylor ou Laurent em torno do ponto a , indicando a maior região onde é válido:

- a) $z \mapsto \frac{1}{z}$ em torno de a ; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-a)^n}{a^{n+1}}$ para $|z-a| < |a|$;
- b) $z \mapsto \frac{1}{z^2}$ em torno de $a = 1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n (z-1)^n$ para $|z-1| < 1$;
- c) $z \mapsto \frac{2z}{(z-1)(z-3)}$ em torno de $a = 2$; r: $-\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)(z-2)^n$, válido para $|z-2| < 1$;
- d) $z \mapsto z^3$ em torno de $a = 1$; r: $(z-1)^3 + 3(z-1)^2 + 3(z-1) + 1$ para todo o z ;
- e) $z \mapsto \frac{e^z}{(z-a)}$ em torno de a ; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!} (z-a)^{n-1}$ para $|z-a| > 0$;
- f) $z \mapsto \frac{1}{z^2-5z+6}$ em torno de $a = 1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (z-1)^n$ para $|z-1| < 1$;
- g) $z \mapsto \log(z^2 + 2z + 2)$ em torno de $a = -1$; r: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z+1)^{2n+2}$ para $|z+1| < 1$.

3. Calcule

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{\pi}{2}$;

- b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$;
- c) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(4+x^2)} dx = \frac{\pi}{6}$.
- d) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$;
- e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$; sugestão: integre ao longo de um contorno que contenha um terço de circunferência de raio R e dois segmentos de recta, de zero a R e de zero a $Re^{i2\pi/3}$.

4. Calcule o desenvolvimento em série de Laurent da função $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$:

- a) na região $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{-(n+1)} - 1)z^n$;
- b) na região $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} + \frac{z^n}{2^{n+1}}$;
- c) na região $\{z \in \mathbb{C} : 2 < |z|\}$; resposta: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{z^{n+1}}$.
- d) Calcule $\int_{|z|=r} f(z) dz$ para $r = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ e $\frac{5}{2}$; r: $0, 2\pi i$ e 0 .

5. Em que regiões se pode desenvolver em série $z \mapsto \frac{1}{z^4+4}$ em torno de $2+2i$? Resposta: Em 4 regiões, $|z-(2+2i)| < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < |z-(2+2i)| < \sqrt{10}$, $\sqrt{10} < |z-(2+2i)| < 3\sqrt{2}$ e $|z-(2+2i)| > 3\sqrt{2}$.

6. Calcule

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz,$$

com a circunferência descrita no sentido direto. Classifique as singularidades da função integrada. Resposta: $-\frac{\pi i}{3}$, singularidade essencial em 0 .

7. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \frac{\log(1-z)}{z^4}$, onde \log designa o logaritmo principal.

- a) Desenvolva f em série de Laurent, em torno de 0 . R: $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n}$.
- b) Calcule $\int_{\partial\{z \in \mathbb{C} : |\Re z| < \frac{1}{2}, |\Im z| < 2\}} f(z) dz$, integrando e série de Laurent e usando a Fórmula Integral de Cauchy. R: $-\frac{2\pi i}{3}$.

Referências

- [1] **L.V. Ahlfors**. Complex Analysis, 3rd ed., McGraw-Hill, 1979.
- [2] **P.M. Girão**. Introdução à Análise Complexa, Séries de Fourier e Equações Diferenciais, IST Press, 2014.
- [3] **L.T. Magalhães**. *Análise Complexa em Uma Variável e Aplicações*, IST, Fevereiro de 2004.
- [4] **L.V. Pessoa**. *Introdução à Análise Complexa*, IST, Maio de 2008.