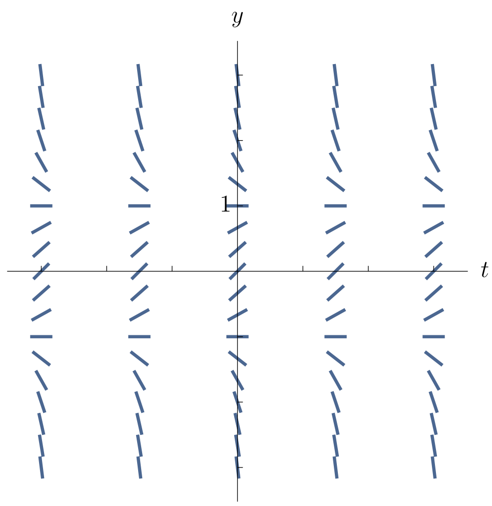
# Análise Complexa e Equações Diferenciais

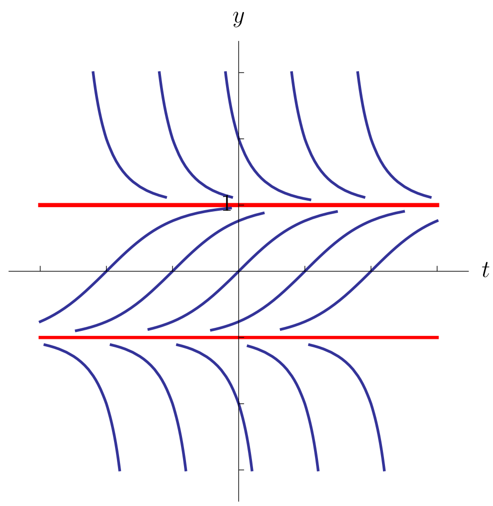
2º Teste - 16 de Dezembro de 2017

MEC

**Resolução**

**1.**




**2.** A equação é linear. A solução é

$$y = \frac{1}{2} e^{\cos t} \left( 1 - \frac{1}{(t-1)^2} \right).$$

**3.**

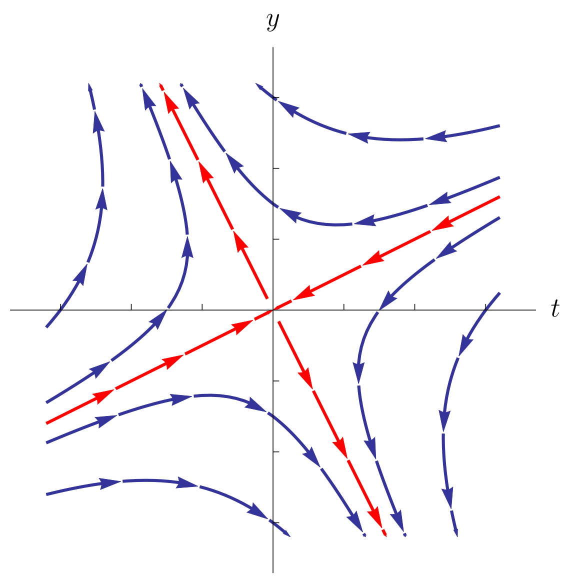
**a)** O polinómio característico da matriz do sistema é

$$p(\lambda) = (\lambda + 5)(\lambda - 5).$$

A solução do sistema que satisfaz a condição inicial é

$$X(t) = \frac{(2x_0 + y_0)}{5} e^{-5t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(x_0 - 2y_0)}{5} e^{5t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

**b)**




**4.** Designando por $D$ o operador de derivação, a equação diferencial escreve-se

$$(D+1)(D-1)y = 2e^{-t} + 3t.$$

Se $y$ é uma solução da equação diferencial, então

$$D^2(D+1)^2(D-1)y = 0,$$

isto é,

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} + c_4 + c_5 t.$$

Substituindo esta expressão para $y$ na equação original, obtém-se

$$\begin{aligned} &(D+1)(D-1)(c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} + c_4 + c_5 t) = 2e^{-t} + 3t \\ \Leftrightarrow\ &(D+1)(D-1)(c_3 t e^{-t} + c_4 + c_5 t) = 2e^{-t} + 3t. \end{aligned}$$

Logo,

$$c_3 = -1,\ c_4 = 0,\ c_5 = -3.$$

A solução geral da equação diferencial do enunciado é

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - t e^{-t} - 3t.$$

**5.**

**a)** Para cada $t$, prolonga-se $u$ como função par em $x$ e periódica em $x$, de período $2\pi$. Então, para cada $t$ fixo, desenvolvendo $x \mapsto u(x,t)$ em série de Fourier,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \cos(nx).$$

As condições fronteira estão formalmente satisfeitas. Substituindo na equação diferencial, vem

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n'(t)\cos(nx) = -\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)a_n(t)\cos(nx).$$

Usando a unicidade dos coeficientes de Fourier, para todo o $n$ deve ter-se

$$a_n'(t) = -(n^2+1)a_n(t).$$

A expressão para os $a_n$'s é

$$a_n(t) = c_n e^{-(n^2+1)t}$$

Portanto, obtém-se

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-(n^2+1)t}\cos(nx).$$

A equação diferencial está formalmente satisfeita. Resta garantir a condição inicial:

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx) = 1 - 7\cos(5x).$$

Logo,

$$c_0 = 1,\ c_5 = -7,$$

e os outros $c_n$'s são nulos. A solução do problema é

$$u(x,t) = e^{-t} - 7e^{-26t}\cos(5x).$$

**b)**

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_0^\pi u_x^2(x,t)\,dx &= 2\int_0^\pi u_x u_{xt}\,dx \\
&= -2\int_0^\pi u_{xx}u_t\,dx \\
&= -2\int_0^\pi (u_{xx}^2 - u_{xx}u)\,dx \\
&= -2\int_0^\pi (u_{xx}^2 + u_x^2)\,dx \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

**6.** A equação é separável sendo a sua forma canónica

$$ye^{2y}y' = \cos^3 x.$$

Obtém-se

$$\int ye^{2y}\,dy = \int \cos^3 x\,dx,$$

$$\frac{ye^{2y}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2y}\,dy = \int (1-\sin^2 x)\cos x\,dx,$$

$$\frac{ye^{2y}}{2} - \frac{e^{2y}}{4} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c.$$