Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 2 de Novembro de 2013

LEGM e MEC

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Calcule:

a) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times (1-i)$ na forma cartesiana; (0.5)
b) $|2+i|^2$; (0.5)
c) $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ na forma cartesiana; (0.5)
d) todas as $\sqrt[3]{-27}$ na forma polar; (1)
e) $\log(-e)$, onde log designa o logaritmo principal; (1)
f) o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^3}$. (0.5)

2. Esboce o conjunto S e a sua imagem por f quando

a) $S = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < -2\}$ e $f(z) = \frac{1}{z}$; (2)
b) $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re z < \frac{\pi}{2}$ e $-\pi < \Im z < -\frac{\pi}{2}\}$ e $f(z) = e^z$. (2)

3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Im z = 0\} \to \mathbb{C}$, definida por (2)

$$f(x+iy) = -\frac{x}{y} + i(x+y).$$

Estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada.

4. Seja L o segmento de recta que vai de 1 a $-i$. Calcule, simplificando os resultados:

a) $\int_L \overline{z}\, dz$; (2)
b) $\int_L z^2 \log z\, dz$, onde log designa o logaritmo principal. (2)

5. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-2, 0\} \to \mathbb{C}$, definida por $f(z) = \frac{1}{z^2(z+2)^2}$.

a) Calcule $\int_{|z|=1} f(z)\, dz$ e simplifique o resultado. (2)
b) Desenvolva f em série de Laurent em torno do ponto 0, indicando a região onde o desenvolvimento é válido (não precisa de calcular os valores numéricos de todos os coeficientes). Classifique a singularidade 0. Calcule o resíduo de f no ponto 0. (2)

6. Analise a continuidade de $z \mapsto \log e^z$ e de $z \mapsto e^{\log z}$; aqui log designa o logaritmo principal. (2)