

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 5 de Novembro de 2016

LEMat e MEAer

Duração: 90 minutos

Apresente os cálculos

1. Apresentando o resultado na forma cartesiana, calcule:

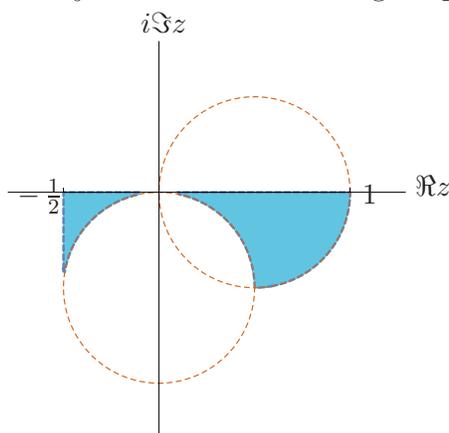
a) $(-1 + i)^7$; (1)

b) $\log(e^{-3+7\pi i})$, onde \log designa o logaritmo principal; (1)

c) as raízes cúbicas de i . (1)

d) Determine para que valores de z , satisfazendo $\Im z = 1$, $|e^{\frac{1}{z}}|$ é máximo. (1)

2. Esboce a imagem do conjunto sombreado na figura por $z \mapsto \frac{1}{z}$. (2)



3. Considere a função $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por (2)

$$f(re^{i\theta}) = \ln r + i \sin \theta.$$

Estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada.

4.

a) Esboce a curva γ representada parametricamente por $z(\theta) = \theta e^{i\theta}$ para $\pi \leq \theta \leq 4\pi$. Calcule $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$, simplificando o resultado. (2)

b) Calcule $\int_{|z-1|=1} \frac{1}{(z-1)^3(z-3)} dz$ usando a Fórmula Integral de Cauchy. (2)

c) (i) Escreva a série de Laurent da função integranda na alínea anterior numa vizinhança de 1, com o ponto 1 removido, calculando explicitamente todos os coeficientes da série. (ii) Qual a região de validade da expansão? (iii) Classifique a singularidade $z = 1$. (iv) Qual é o resíduo da função no ponto 1? (3)

- d) Classifique as singularidades de (2)

$$z \mapsto \frac{z - \sin(\sin z)}{z^4}$$

e calcule os resíduos da função.

5. Considere a função

$$w \mapsto \log \left(i \frac{w+1}{w-1} \right),$$

onde o logaritmo é o principal.

- a) Qual é o conjunto de pontos onde a função é diferenciável? Justifique. (1.5)
- b) Qual é o conjunto de pontos onde a função não é diferenciável? Justifique. (1.5)