Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 2 de Novembro de 2019
MEAer, MEAmbi, MEEC, MEQ

Duração: 90 minutos
Apresente os cálculos

1. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(x+iy) = (\alpha x - \beta xy) + i(x^2 + \alpha y^2 + \alpha y).$$

a) Determine para que pares (α, β) a função f é harmónica. (2)

b) Determine para que pares (α, β) a função f é holomorfa, e calcule a sua derivada. (2)

c) Para (α, β) como na alínea **b)**, calcule (2)

$$\int_{|z|=2} \frac{[f'(z)]^2}{(z+1)^2}\, dz,$$

com a circunferência descrita no sentido directo. Simplifique o resultado.

2.

a) Usando a definição, calcule (2)

$$\int_{|z|=1} \log z\, dz,$$

onde o logaritmo é definido por $\log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$, com $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, e a circunferência é descrita no sentido directo.

b) Existe alguma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ cuja derivada seja o logaritmo acima definido? Em caso positivo indique a função; em caso negativo, indique o maior subconjunto aberto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ onde esse logaritmo é primitivável e justifique. (1)

3. Desenvolva em série de Laurent, calculando explicitamente todos os coeficientes, (2)

$$\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{16+z^4},$$

numa região $0 < |z| < R$, indicando o valor de R (máximo) e classificando a singularidade zero.

4. Considere a função f, definida por

$$f(z) = \cos\frac{1}{z^3} + \frac{\sin z}{(z-2\pi)^2 z}$$

no seu domínio natural.

a) Determine e classifique as suas singularidades. Em que região converge a série de Laurent em torno de 2π de $z \mapsto \frac{\sin z}{(z-2\pi)^2 z}$? (2)

b) Calcule o integral de f sobre a circunferência de raio um, centrada em 2π, descrita no sentido directo. (2)

5. Usando integrais de contorno, calcule, simplificando o resultado, (3)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{(x^2+16)^2}\, dx.$$

6. Seja f holomorfa em a com um zero de ordem k em a, i.e. $f^{(k)}(a) \neq 0$ e $f^{(n)}(a) = 0$ para $n < k$. Determine p tal que (2)

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^p}$$

tem um pólo de ordem 3 em a. Para esse valor de p, calcule o resíduo de g em a. Justifique.