# Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Teste - 5 de Novembro de 2011

LMAC, MEBiom e MEFT

Duração: 90 minutos

**Apresente os cálculos**

**1.** Esboce a região $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \ \wedge \ \Re z > \Im z\}$ e determine a sua imagem por $z \mapsto \frac{1}{z}$. (3)

**2.** Estude a diferenciabilidade e calcule a derivada da função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por $f(re^{i\theta}) = r^2 + i\theta$ para $r > 0$ e $-\pi < \theta \leq \pi$, e por $f(0) = 0$. (3)

**3.** Usando a definição de integral, calcule $\int_\gamma \overline{z}\, dz$ onde $\gamma$ é a semi-circunferência com centro em 3 e raio igual a 2, no plano $\Im z > 0$, começando em 5 e terminando em 1. Simplifique o resultado. (3)

**4.** Calcule $\int_{i\frac{\pi}{2}}^{i\pi} \left(e^z + \frac{1}{z}\right) dz$, onde a curva que une $i\frac{\pi}{2}$ a $i\pi$ é a formada pela união de dois segmentos de recta que se tocam em $\frac{\pi}{2} + i\frac{3\pi}{2}$. Simplifique o resultado. (2)

**5.** Seja $R > 1$, $D_R = \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0 \ \wedge |z| < R\}$, e $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$.

**a)** Calcule os dois primeiros termos do desenvolvimento em série de Laurent de $f$ em torno de $-1$. Classifique essa singularidade. Em que região é válido o desenvolvimento? (3)

**b)** Calcule $\int_{\partial D_R} f(z)\, dz$, onde a fronteira é descrita no sentido directo. (2)

**c)** Usando o resultado da alínea anterior, calcule $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iy}}{y^2+1}\, dy$. (2)

**6.** Sejam $a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $B_R(a)$ a bola aberta de raio $R$ centrada em $a$ e $f$ holomorfa em $\overline{B_R(a)}$.

**a)** Suponha que $a$ é ponto de máximo de $|f|$. O que pode concluir? Justifique. Sugestão: use a Propriedade do Valor Médio para $f$. (1)

**b)** Suponha agora que $a$ é ponto de mínimo de $|f|$ e que $|f(a)| > 0$. O que pode concluir? Justifique. (1)