Análise Complexa e Equações Diferenciais

14 de Janeiro de 2012

LMAC, MEBiom e MEFT

1º Teste	–	Perguntas 1 – 4	–	90 minutos
2º Teste	–	Perguntas 5 – 9	–	90 minutos
Exame	–	Todas as perguntas	–	3 horas

Apresente os cálculos

1. Esboce a região $\{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0 \ \wedge \ 0 < \Im z < \pi\}$ e a sua imagem por $z \mapsto e^z$. (1.5)

2. Calcule:

a) $\int_\gamma \overline{z}\, dz$, onde γ é o troço de parábola $\{x + iy \in \mathbb{C} : y = x^2\}$ com início em 0 e fim em $1 + i$. (1)

b) $\int_1^{ie} \left(\log z + \frac{1}{z^2}\right) dz$, onde log designa o logaritmo principal e a curva que liga 1 a ie é um segmento de recta. Simplifique o resultado. (1)

c) (1.5)

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z(z-1)^2(z-3)^2}\, dz,$$

usando as Fórmulas Integrais de Cauchy, em que a circunferência é descrita uma vez no sentido directo. Classifique as singularidades da função integranda.

d) o desenvolvimento em série de Laurent de (1.5)

$$\frac{2}{(z-1)(z-3)}$$

com centro no ponto zero e que converge no ponto 2. Identifique a região onde a série que obteve converge.

3. Considere a função $f : \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\} \to \mathbb{C}$, definida por

$$f(x + iy) = \arctan \tfrac{x}{y} + \tfrac{i}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

a) Estude a diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada. (1.5)

b) Expresse a derivada de f em termos da variável complexa $z = x + iy$. (0.5)

c) Prolongue f ao conjunto $\{z \in \mathbb{C} : z \notin i\,\mathbb{R}_0^-\}$ de modo a obter uma função holomorfa, ou explique porque tal não é possível. (0.5)

4. Sejam $a \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Suponha f é inteira e que o seu contradomínio não intersecta a bola aberta de raio r centrada em a. Prove que f é constante. (1)

5. Esboce o campo de direcções e os gráficos das soluções da equação diferencial (2)

$$y' = \sin y.$$

Determine analiticamente as curvas ortogonais aos gráficos das soluções.

6. Considere a equação diferencial

$$(3xy^2 + 2y^3) + (2x^2y + 3xy^2)y' = 0.$$

a) Determine um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$. (1)
b) Resolva a equação diferencial. (1)
c) Determine o conjunto de pontos do plano (x, y) no qual o Teorema da Função Implícita *não* garante que a equação que obteve na alínea anterior define localmente y como função de x. Simplifique a resposta. (0.5)

7. Determine a solução geral de (1.5)

$$b''(t) + b(t) = 2\sin t.$$

Verifique a sua resposta.

8. Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + 2\sin x \sin t & \text{para } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty[, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[, \\ u(x,0) = 0 & \text{para } x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = \sin x & \text{para } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

Suponha que existe uma solução $u \in C^2([0,\pi] \times [0,+\infty[)$.

a) Prolongue a solução ao semiplano $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$ de modo a obter uma função de classe C^2 e periódica, de período 2π. Para cada t fixo desenvolva u em série de Fourier. Use o resultado para determinar equações diferenciais para os coeficientes de Fourier e resolva essas equações. (2)
b) Determine a solução do problema. (1)

9. Considere o problema (1)

$$\begin{cases} u_t = u_x & \text{para } (x,t) \in]-\infty,+\infty[\times [0,+\infty[\,, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in]-\infty,+\infty[\,, \end{cases}$$

onde u_0 é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$. Determine a sua solução. Sugestão: a equação diferencial pode ser escrita na forma $\nabla u \cdot (1,-1) = 0$.