Análise Complexa e Equações Diferenciais

15 de Janeiro de 2009

LEAmb, LEMat, MEBiol e MEQ

2º Teste	–	Perguntas 5, 6, 7, 8	–	90 minutos
1º Exame	–	Todas as perguntas	–	3 horas

Apresente os cálculos

1. Determine geometricamente a imagem de (2)

$$\left\{z \in \mathbb{C} : -1 < \Re z < 0 \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \Im z < 0\right\}$$

por $z \mapsto e^z$.

2. Estude a diferenciabilidade da função (3)

$$f(x,y) = \frac{(x+1)^3}{3} + y^2 + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Justifique. Calcule a derivada de f. Represente no plano complexo os conjuntos $\{f(x_0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ para $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$, e $\{f(x, y_0) : x \in \mathbb{R}\}$ para $y_0 = 0$ e $y_0 = 1$. Represente também $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ nos quatro pontos de intersecção das curvas obtidas. Interprete os resultados.

3. Calcule o desenvolvimento em série de Laurent da função $f : \mathbb{C} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{C}$, definida por (3)

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

na região $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. Use o resultado para calcular $\int_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)\,dz$, com a circunferência descrita no sentido directo. Justifique.

4. Determine o raio de convergência de $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} z^n$. Analise a convergência da série sobre a fronteira do disco de convergência. O que pode dizer sobre a holomorfia de f? (2)

5. Sejam a, $b > 0$. Considere a equação diferencial

$$y' = ay - by^2.$$

a) Esboce o seu campo de direcções e os gráficos das soluções. (1)

b) Faça $z = \frac{1}{y}$. Mostre que z satisfaz a equação (0.5)

$$z' + az = b.$$

c) Determine a solução da equação da alínea anterior que satisfaz $z(0) = z_0$ e use o resultado para obter y como função de t. (1.5)

6. Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

a) Determine a solução que vale $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ em $t = 0$. (1.5)

b) Esboce o retrato de fase do sistema, tendo o cuidado de identificar o comportamento assimptótico das soluções quando t tende para $+\infty$. (1.5)

7. Determine a solução de (2)

$$\begin{cases} u_t = 5u_{xx} & \text{para } (x,t) \in [0,l] \times [0,+\infty[\\ u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 & \text{para } t \in [0,+\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{para } x \in [0,l], \end{cases}$$

com

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [0, \frac{l}{2}] \\ 0 & \text{para } x \in]\frac{l}{2}, l]. \end{cases}$$

A solução é dada por uma série. Indique explicitamente os quatro primeiros termos não nulos dessa série.

8. A equação do movimento de uma partícula sujeita a uma força central em coordenadas polares (r, θ) é (2)

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{p^2},$$

em que $p > 0$ é uma constante e $u = \frac{1}{r}$. Assumindo que quando $\theta = 0$ a partícula está no ponto mais próximo do centro de atracção, a origem, a uma distância r_0 da mesma, determine r em função de θ.