TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2014/2015

1º Teste — Versão A

(Cursos: LEMat, MEAmbi, MEBiol, MEQ)

20 de Dezembro de 2014, 11h

[1,5 val.] 1. Resolva o problema de valor inicial

$$4(y^3+t^2y)\frac{dy}{dt}=1-4ty^2, \qquad y(1)=-\sqrt{\sqrt{2}-1},$$

e indique o seu intervalo máximo de definição.

Resolução:

A equação dada é não linear, e pode ser escrita de forma equivalente como

$$(4ty^2-1)+4(y^3+t^2y)\frac{dy}{dt}=0,$$

donde se conclui ser uma equação exacta, visto que

$$\frac{\partial}{\partial y}(4ty^2-1)=8ty=\frac{\partial}{\partial t}(4y^3+4t^2y),$$

sendo $\mathbb{R}^2$ o domínio destas funções, o qual é obviamente simplesmente conexo. Existe então um potencial em $\phi(t,y)$, definido em $\mathbb{R}^2$, tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial t}=4ty^2-1 \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=4y^3+4t^2y. \end{cases}$$

Primitivando a primeira destas equações em ordem a t obtém-se

$$\phi(t,y)=2t^2y^2-t+\alpha(y),$$

e substituindo na segunda equação podemos obter o termo $\alpha(y)$ que resta:

$$4t^2y+\alpha'(y)=4y^3+4t^2y \Leftrightarrow \alpha'(y)=4y^3 \Leftrightarrow \alpha(y)=y^4+c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

O potencial é assim dado por

$$\phi(t,y)=y^4+2t^2y^2-t+c,$$

e a solução na forma implícita por

$$\phi(t,y)=c \Leftrightarrow y^4+2t^2y^2-t=c,$$

com c arbitrário em $\mathbb{R}$. Finalmente, usamos a condição inicial para determinar o valor de c, específico para o problema de valor inicial em questão:

$$c=y(1)^4+2\,1^2y(1)^2-1=(\sqrt{2}-1)^2+2(\sqrt{2}-1)-1=0,$$

concluindo-se assim que a solução do PVI, na forma implícita, é dada por

$$y^4 + 2t^2y^2 - t = 0.$$

Esta equação permite explicitar y como função de t, visto ser uma equação de segunda ordem em y^2. Assim, usando a fórmula resolvente, tem-se

$$y(t)^2 = \frac{-2t^2 \pm \sqrt{4t^4 + 4t}}{2} = -t^2 \pm \sqrt{t^4 + t}.$$

Substituindo $t = 1$ e usando a condição inicial, imediatamente se conclui que, dos dois sinais possíveis na raiz quadrada, a solução do PVI corresponde ao sinal positivo

$$y(t)^2 = -t^2 + \sqrt{t^4 + t},$$

e daqui, finalmente, que

$$y(t) = \pm\sqrt{-t^2 + \sqrt{t^4 + t}},$$

onde, mais uma vez, a condição inicial leva a optar, desta vez, pelo sinal negativo

$$y(t) = -\sqrt{-t^2 + \sqrt{t^4 + t}}.$$

Para terminar, e determinar o intervalo máximo de definição da solução, basta ver que a primeira das raízes quadradas exige que $t^4 + t > 0$, para que a função esteja definida e seja de classe C^1. Mas isto corresponde a $t < -1$ ou $t > 0$, e visto que a condição inicial é dada para $t_0 = 1$, conclui-se que teremos $t > 0$. Por outro lado, para $t > 0$, tem-se obviamente que $\sqrt{t^4 + t} > \sqrt{t^4} = t^2$, donde a segunda raiz está sempre bem definida, e é diferenciável, neste intervalo. Tem-se assim:

$$t \in]0, \infty[.$$

[2,0 val.] 2. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = -4x + 3y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$$

tal que $x(1) = 0$ e $y(1) = 1$.

Resolução:

Na forma matricial, este sistema de EDOs, linear e homogéneo, escreve-se como

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \qquad \text{com} \qquad \begin{bmatrix} x(1) \\ y(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Começamos por determinar os valores e vectores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

O seu polinómio característico $\det(A - \lambda I)$ tem raízes:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (-4 - \lambda)(2 - \lambda) + 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0,$$

donde se conclui que existe apenas um único valor próprio, $\lambda = -1$, com multiplicidade algébrica 2.

Os vectores próprios são dados por

$$\det(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2,$$

e daqui se conclui que a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda = -1$ é apenas 1, com um espaço próprio de dimensão 1, de vectores próprios da forma

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Não é possível, portanto, diagonalizar a matriz A, por faltar um vector independente para constituir uma base de vectores próprios. Teremos por isso que recorrer à forma canónica de Jordan e, a partir dela, obter a matriz exponencial de A.

Assim, sabemos da álgebra linear que existe uma matriz de mudança de base, S, tal que

$$A = SJS^{-1},$$

com

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e a partir da qual se obtém a exponencial e^{At} como

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1},$$

com

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

A matriz de mudança de base, S, tem nas suas colunas os vectores da nova base,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & w_1 \\ 1 & w_2 \end{bmatrix},$$

o primeiro dos quais é o vector próprio já determinado, restando obter o vector próprio generalizado (w_1, w_2), pela equação

$$\det(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 3w_2 = 1 + 3w_1.$$

Escolhendo, por exemplo, $w_1 = 0$, obtemos $w_2 = 1/3$ e assim

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos todos os elementos para finalmente calcular a exponencial

$$e^{At} = Se^{Jt}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-3t)e^{-t} & 3te^{-t} \\ -3te^{-t} & (1+3t)e^{-t} \end{bmatrix}.$$

A solução do problema de valor inicial do sistema homogéneo é agora dado por $e^{A(t-t_0)}\mathbf{x_0}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-3(t-1))e^{-(t-1)} & 3(t-1)e^{-(t-1)} \\ -3(t-1)e^{-(t-1)} & (1+3(t-1))e^{-(t-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3t-3)e^{-t+1} \\ (3t-2)e^{-t+1} \end{bmatrix}.$$

3. Considere a equação

$$y'' - 2y' + y = b(x).$$

Determine a solução geral, quando:

[1,0 val.] (a) $b(x)= 0$.

[1,0 val.] (b) $b(x)= -6xe^x$.

[1,0 val.] (c) $b(x)= \dfrac{e^x}{1+x^2}$.

Resolução:

(a) Este é o caso homogéneo. Escrevendo a equação como

$$y'' - 2y' + y = 0 \Leftrightarrow (D^2 - 2D + 1)y = 0,$$

em que $D = \frac{d}{dx}$ é o operador de derivação em x, a equação pode ser factorizada em

$$(D-1)^2 y = 0,$$

donde o seu polinómio característico tem o valor próprio 1, repetido com multiplicidade algébrica 2. Conclui-se então que a solução geral desta equação homogénea é dada pelo espaço vectorial de dimensão 2 gerado pelas duas soluções da base, e^x e xe^x, i.e.

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x,$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) A solução geral duma equação linear não homogénea obtém-se somando o espaço vectorial das soluções homogéneas (obtidas na alínea anterior) a uma solução particular não homogénea,

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + y_P(x).$$

Para obter uma solução particular não homogénea usaremos aqui o método dos aniquiladores. $(D-1)^2$ é aniquilador do termo não homogéneo $b(x) = -6xe^x$, donde, começando na equação não homogénea

$$y'' - 2y' + y = -6xe^x \Leftrightarrow (D^2 - 2D + 1)y = -6xe^x \Leftrightarrow (D-1)^2 y = -6xe^x,$$

e, aplicando o operador aniquilador dos dois lados, obtém-se

$$\Rightarrow (D-1)^4 y = (D-1)^2(-6xe^x) = 0.$$

A solução geral desta nova equação homogénea é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x,$$

donde uma solução particular do problema não homogéneo será da forma

$$y_P(x) = c_3 x^2 e^x + c_4 x^3 e^x.$$

Resta substituir esta solução na equação inicial para determinar c_3 e c_4 de forma a obter precisamente o termo não homogéneo $b(x) = -6xe^x$. Ora $y_P'(x) = 2c_3 x e^x + (c_3 + 3c_4)x^2 e^x + c_4 x^3 e^x$ e $y_P''(x) = 2c_3 e^x + (4c_3 + 6c_4)xe^x + (c_3 + 6c_4)x^2 e^x + c_4 x^3 e^x$, donde

$$y_P'' - 2y_P' + y_P = 2c_3 e^x + 6c_4 x e^x = -6xe^6,$$

e assim se conclui que $c_3 = 0$ e $c_4 = -1$.
A solução geral é então

$$y(t) = c_1 e^x + c_2 x e^x - x^3 e^x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) Neste caso, com $b(t) = \frac{e^x}{1+x^2}$, não existe evidentemente operador aniquilador, visto este termo não homogéneo não ser da forma $x^k e^{\lambda x}$, para algum k e λ. Teremos então que recorrer à fórmula da variação das constantes para equações de ordem superior à primeira. Começamos por determinar a matriz Wronskiana (matriz solução fundamental do sistema 2×2 equivalente), a partir da base das soluções homogéneas, obtidas na alínea (a). Assim

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (1+x)e^x \end{bmatrix},$$

e a sua inversa

$$W^{-1}(x) = \begin{bmatrix} (1+x)e^{-x} & -xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} \end{bmatrix}.$$

Pela fórmula da variação das constantes uma solução particular do problema não homogéneo é dada por

$$\begin{aligned} y_P(x) &= \begin{bmatrix} e^x & xe^x \end{bmatrix} \int \frac{e^x}{1+x^2} \begin{bmatrix} -xe^{-x} \\ e^{-x} \end{bmatrix} dx \\ &= \begin{bmatrix} e^x & xe^x \end{bmatrix} \int \begin{bmatrix} \frac{-x}{1+x^2} \\ \frac{1}{1+x^2} \end{bmatrix} dx \\ &= \begin{bmatrix} e^x & xe^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\log(1+x^2) \\ \operatorname{arctg} x \end{bmatrix} \\ &= -e^x \log\sqrt{1+x^2} + xe^x \operatorname{arctg} x. \end{aligned}$$

Conclui-se assim que a solução geral é igual ao espaço vectorial de todas as soluções homogéneas obtidas na alínea (a) somadas a esta solução particular,

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x) = c_1 e^x + c_2 xe^x - e^x \log\sqrt{1+x^2} + xe^x \operatorname{arctg} x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

[1,5 val.] 4. Considere o problema de valores na fronteira e valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -t^2 u + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \in]0,\pi[\,,\ t > 0 \\ u(t,0) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 0 & t > 0 \\ u(0,x) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) + 12\operatorname{sen}\left(\frac{9}{2}x\right) & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Resolva este problema.

Resolução:

A equação, assim como as condições de fronteira, são homogéneas. Usaremos o método de separação de variáveis para determinar soluções da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, com as quais posteriormente faremos combinações lineares para satisfazer a condição inicial.

Como tal, começamos por procurar soluções não nulas $u(t,x) = T(t)X(x)$. A equação diferencial parcial obriga, por isso, a que satisfaçam a relação

$$T'(t)X(x) = -t^2 T(t)X(x) + T(t)X''(x) \Leftrightarrow t^2 + \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)},$$

donde se conclui que ambos os lados da igualdade, por serem funções de variáveis t e x independentes, terão de ser constantes, digamos, λ,

$$t^2 + \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Daqui imediatamente se obtém que a função $T(t)$ satisfaz necessariamente uma EDO de primeira ordem, cuja solução geral é

$$T'(t) = (\lambda - t^2)T(t) \Rightarrow T(t) = C\, e^{\int \lambda - t^2 dt} = C\, e^{\lambda t - \frac{t^3}{3}},$$

com C uma constante real arbitrária.

Já a função $X(x)$ satisfaz a EDO de segunda ordem,

$$X'' - \lambda X = 0,$$

e as condições de fronteira homogéneas para a solução u, em $x = 0$ e $x = \pi$, $u(t,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 0$, impõem, à função $X(x)$, as condições de fronteira

$$X(0) = 0 \qquad X'(\pi) = 0.$$

Obtemos assim o problema de valores e funções próprias, que consiste em determinar os valores de λ para os quais existam soluções não triviais (não nulas) $X(x)$ que satisfaçam

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \qquad\qquad X'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Resolvemos agora a equação diferencial para $X(x)$, cujas soluções dependem do sinal de λ. Temos então

$$X(x) = \begin{cases} Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Ax + B & \text{se } \lambda = 0 \\ A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\,\mathrm{sen}\,\sqrt{-\lambda}x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde A, B são constantes reais.

Impondo as condições de fronteira acima às soluções $X(x)$ assim determinadas, temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Leftrightarrow A + B = 0 \\ X'(\pi) = 0 \Leftrightarrow A\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\pi} - B\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Leftrightarrow B = 0 \\ X'(\pi) = 0 \Leftrightarrow A = 0 \end{cases}$$

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} X(0) = 0 \Leftrightarrow A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0 \\ X'(\pi) = 0 \Leftrightarrow -A\sqrt{-\lambda}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{-\lambda}\pi + B\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \text{ ou } \cos\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que as únicas soluções não triviais ocorrem para os valores de λ (valores próprios) tais que

$$\cos\sqrt{-\lambda}\pi = 0 \Leftrightarrow \sqrt{-\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi \Leftrightarrow \lambda_n = -\left(\frac{1}{2}+n\right)^2,$$

e as correspondentes soluções (funções próprias) são

$$X_n(x) = B\,\mathrm{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) \qquad \text{para} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

com B uma constante real arbitrária. As soluções deste problema, da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$, são assim

$$u_n(t,x) = C_n\,\mathrm{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) e^{-\left(\frac{1}{2}+n\right)^2 t - \frac{t^3}{3}},$$

as quais, por combinação linear, permitem obter a solução geral da equação diferencial parcial, para as condições de fronteira homogéneas dadas,

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 1} C_n\,\mathrm{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) e^{-\left(\frac{1}{2}+n\right)^2 t - \frac{t^3}{3}}.$$

Restam determinar os coeficientes C_n, de forma a satisfazer a condição inicial

$$u(0,x) = \sum_{n\geq 1} C_n\,\mathrm{sen}\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) + 12\,\mathrm{sen}\left(\frac{9}{2}x\right),$$

donde se conclui que $C_2 = 3$ e $C_4 = 12$, sendo os restantes coeficientes todos nulos.

Obtemos assim, por fim,

$$u(t,x) = 3\,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{2}x\right) e^{-\frac{25}{4}t - \frac{t^3}{3}} + 12\,\mathrm{sen}\left(\frac{9}{2}x\right) e^{-\frac{81}{4}t - \frac{t^3}{3}}.$$

[1,0 val.] 5. Determine a série de Fourier da função $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad -2 \leq x < -1 \\ 3 & \text{se} \quad -1 \leq x < 1 \\ 0 & \text{se} \quad\ \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

e indique a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

Resolução:

A função f dada é par, com $L = 2$. Resultará, por isso, numa série de Fourier, periódica, de período $2L = 4$, apenas de cosenos visto os coeficientes dos senos se anularem.

Temos por isso que a correspondente série de Fourier de f será

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$

com

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \int_0^1 3\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx, \qquad n \geq 0.$$

Assim,

$$a_0 = \int_0^1 3\,dx = 3,$$

e, para $n \geq 1$,

$$\int_0^1 3\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{6}{n\pi}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{6}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

donde a série de Fourier de f é

$$\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Por fim, é evidente que f é seccionalmente C^1, visto ser constante em $[-2,-1[$, em $[-1,1[$ e em $[1,2]$, pelo que está nas condições do teorema de convergência pontual da sua série de Fourier. Portanto a série converge para a média dos limites laterais da extensão periódica de f em cada ponto $x \in \mathbb{R}$, isto é, para

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -2 \leq x < -1 \\ \frac{3}{2} & \text{se } x = -1 \\ 3 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \frac{3}{2} & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{se } \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

e para a repetição periódica, de período $2L = 4$, desta função, para os restantes pontos $x \in \mathbb{R}$.

[1,0 val.] 6. Resolva o problema de valor inicial e indique o intervalo máximo de definição da solução

$$y'' = 2t(y')^2, \qquad y(1) = 0; \quad y'(1) = -\frac{1}{2}.$$

Resolução:

Apesar de ser uma equação de segunda ordem não linear, esta equação é na verdade uma simples equação separável de primeira ordem, para a incógnita y'. Ou seja, se fizermos $v(t) = y'(t)$ a equação reescreve-se como

$$v' = 2tv^2,$$

com condição inicial $v(1) = -\frac{1}{2}$. Como na vizinhança da condição inicial v não se anula, podemos dividir a equação toda por v^2, separando-a deste modo em

$$\frac{1}{v^2}v' = 2t,$$

donde o lado esquerdo da equação pode ser escrito como a derivada da composta,

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{v(t)}\right) = 2t.$$

Integrando agora ambos os lado desta equação desde $t_0 = 1$ até t obtemos

$$\int_{t_0=1}^{t} \frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{v(s)}\right)ds = \int_{t_0=1}^{t} 2s ds \Leftrightarrow -\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{v(1)} = t^2 - 1,$$

e, substituindo pela condição inicial, obtém-se

$$y'(t) = v(t) = -\frac{1}{1+t^2}.$$

Finalmente, primitivando esta última igualdade, e usando a segunda condição inicial $y(1) = 1$

$$\int_{t_0=1}^{t} y'(s)ds = -\int_{t_0=1}^{t} \frac{1}{1+s^2}ds \Leftrightarrow y(t) = -\operatorname{arctg}(t) + \operatorname{arctg}(1) = -\operatorname{arctg}(t) + \frac{\pi}{4}.$$

Obviamente o intervalo máximo de definição é o domínio de $\arctan(t)$, ou seja, $t \in \mathbb{R}$, para o qual $y(t)$ está definida e é C^1.