TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2013/2014

1º Teste — Versão A

(Cursos: LEIC-A, LEMat, MEAmbi, MEBiol, MEQ)

2 de Novembro de 2013, 11h

1. Seja $v(x,y) = (2x+1)\alpha(y)$, em que $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$.

[1,0 val.] (a) Determine a forma geral de $\alpha(y)$ de modo a que v seja a parte imaginária duma função holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

[1,0 val.] (b) Considerando $\alpha(y) = y$, calcule a função inteira, f, tal que $\mathrm{Im}(f) = v$ e $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$.

[1,0 val.] (c) Calcule o valor de

$$\oint_{|z|=2013} \frac{z^2 f(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\, dz \ ,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

(a) Para que v seja a parte imaginária de uma função inteira, é necessário que v seja harmónica em $\mathbb{R}^2$. Visto α ser uma função de classe C^2 em $\mathbb{R}$, v é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Por outro lado

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (2x+1)\alpha''(y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha''(y) = 0$$

concluindo-se que $\alpha(y) = c_1 y + c_2$, para quaisquer contantes reais c_1, c_2.

(b) Sendo $v(x,y) = (2x+1)y$, para determinar f como pedido há que calcular a função harmónica conjugada de v, que denotaremos por $u(x,y)$, e que representará Re f. Por serem a parte real e imaginária de uma função inteira terão de verificar as condições de Cauchy-Riemann em $\mathbb{C}$. Assim, para todo (x,y), tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = x^2 + x + c(y)$$

Substituindo na outra equação

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Leftrightarrow \quad c'(y) = -2y \quad \Leftrightarrow \quad c(y) = -y^2 + c$$

pelo que se conclui que

$$u(x,y) = x^2 + x - y^2 + c \qquad , \qquad c \in \mathbb{R}$$

Para determinar a constante c, atenda-se que $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ implica que $u(0,1) = 0$ pelo que $c = 1$. Então

$$f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = x^2 + x - y^2 + 1 + \mathrm{i}(2x+1)y \ .$$

(c) Atendendo a que:

- a curva $\gamma = \{|z| = 2013 \ : \ z \in \mathbb{C}\}$ percorrida uma vez, é uma curva de Jordan;
- $\mathrm{i} \in \operatorname{int}\gamma$;
- a função $z^2 f(z)$ é inteira

estamos nas condições de aplicar a fórmula integral de Cauchy, pelo que

$$\begin{aligned}
\oint_{|z|=2013} \frac{z^2 f(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\,dz &= 2\pi\mathrm{i}(z^2 f(z))'|_{z=\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}\Big(2zf(z) + z^2 f'(z)\Big)_{z=\mathrm{i}} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\Big(2zf(z) + z^2\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\Big)\Big)_{z=\mathrm{i}} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\Big(2zf(z) + z^2(2x + 1 + \mathrm{i}2y)\Big)_{z=\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}(-3-2\mathrm{i})
\end{aligned}$$

2. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-2\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{z}{z+2\mathrm{i}}$.

[1,0 val.] (a) Escreva o desenvolvimento em série de Maclaurin de f e indique a sua região de convergência.

[0,5 val.] (b) Mostre que $\mathrm{i}f^{(10)}(0) + 5f^{(9)}(0) = 0$.

Resolução:

(a) A região de convergência da série de Taylor de f em torno de 0, é o maior círculo centrado em 0 onde a função é analítica — $\{z \ : \ |z| < 2\}$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z+2\mathrm{i}} &= z \cdot \frac{1}{z+2\mathrm{i}} = z \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}(1+\frac{z}{2\mathrm{i}})} \\
&= \frac{z}{2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{-z}{2\mathrm{i}}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{\mathrm{i}^{n+1}2^{n+1}}
\end{aligned}$$

(b) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o coeficiente a_n da série de Maclaurin (coeficiente da potência z^n) é dado por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = a_n n!$$

Então

$$\mathrm{i}f^{(10)}(0) + 5f^{(9)}(0) = 10!\mathrm{i}\frac{(-1)^9}{2^{10}\mathrm{i}^{10}} + 9!5\frac{(-1)^8}{2^9\mathrm{i}^9} = 0$$

como se queria mostrar.

[2,0 val.] 3. Considere a função complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = e^{\frac{2\mathrm{i}}{z-1}} + \frac{3}{(1-z)^3} + \frac{z-\pi}{e^{2\mathrm{i}z}-1} .$$

Calcule o valor do integral

$$\oint_{|z|=4} f(z)dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

Escreva-se $f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z)$, com

$$f_1(z) = e^{\frac{2\mathrm{i}}{z-1}}, \quad f_2(z) = \frac{3}{(1-z)^3}, \quad f_3(z) = \frac{z-\pi}{e^{2\mathrm{i}z}-1}.$$

As singularidades de f são $z = 1$, proveniente de f_1 e f_2, e $z = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, provenientes de f_3. Destas, as únicas singularidades que se encontram no interior da circunferência de raio 4, e que portanto contribuem para o valor do integral pelo teorema dos resíduos, são $z = -\pi$, $z = 0$, $z = 1$ e $z = \pi$. Calcularemos, portanto, os resíduos apenas nestas quatro singularidades.

As funções f_1 e f_2 são holomorfas em $z = -\pi$, $z = 0$ e $z = \pi$, donde as suas contribuições para as correspondentes séries de Laurent de f, em torno destas singularidades, faz-se apenas nas potências positivas da parte regular das séries. A parte singular das séries de Laurent, e consequentemente os resíduos nestes três pontos, provêm apenas de f_3, pelo que podemos concluir que $\operatorname{Res}(f, -\pi) = \operatorname{Res}(f_3, -\pi)$, $\operatorname{Res}(f, 0) = \operatorname{Res}(f_3, 0)$ e $\operatorname{Res}(f, \pi) = \operatorname{Res}(f_3, \pi)$.

Agora, $\lim_{z\to\pi} \frac{z-\pi}{e^{2\mathrm{i}z}-1} = 1/2\mathrm{i}$ (por exemplo, aplicando a Regra de Cauchy) donde se conclui que $z = \pi$ é então uma singularidade removível e, portanto, $\operatorname{Res}(f, \pi) = \operatorname{Res}(f_3, \pi) = 0$.

Já $\lim_{z\to-\pi} \frac{z-\pi}{e^{2\mathrm{i}z}-1} = \infty$ e $\lim_{z\to0} \frac{z-\pi}{e^{2\mathrm{i}z}-1} = \infty$, o que leva à observação de que estas duas singularidades são pólos. Para determinar a sua ordem calculamos agora:

$$\lim_{z\to-\pi} (z+\pi)\frac{z-\pi}{e^{2\mathrm{i}z}-1} = \pi\mathrm{i},$$

e

$$\lim_{z\to0} z\frac{z-\pi}{e^{2\mathrm{i}z}-1} = \frac{\pi\mathrm{i}}{2},$$

(usando de novo a regra de Cauchy) o que nos leva a concluir que são ambos pólos simples e que estes limites correspondem precisamente, por isso, aos seus resíduos.

Finalmente, para $z = 1$ observe-se que $f_2 = \frac{3}{(1-z)^3} = -\frac{3}{(z-1)^3}$ está já escrita na forma de série de Laurent em torno desta singularidade, donde se conclui que se trata dum pólo de ordem 3, com resíduo nulo. Por outro lado, a contribuição de f_1 na mesma singularidade obtém-se expandido a correspondente série de Laurent:

$$f_1(z) = e^{\frac{2\mathrm{i}}{z-1}} = 1 + \frac{2\mathrm{i}}{z-1} + \frac{(2\mathrm{i})^2}{2!(z-1)^2} + \frac{(2\mathrm{i})^3}{3!(z-1)^3} + \cdots$$

A singularidade $z = 1$ é por isso uma singularidade essencial de f_1, e portanto também de f. O resíduo nesse ponto, visto a contribuição de f_2 ser nula, é $\operatorname{Res}(f, 1) = \operatorname{Res}(f_1, 1) = 2\mathrm{i}$.

Aplicando o teorema dos resíduos, concluímos finalmente, que

$$\oint_{|z|=4} f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\big(\operatorname{Res}(f, -\pi) + \operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1) + \operatorname{Res}(f, \pi)\big) =$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\pi\mathrm{i} + \frac{\pi\mathrm{i}}{2} + 2\mathrm{i}\right) = -3\pi^2 - 4\pi.$$

[1,5 val.] 4. Determine o valor do integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{5+3\,\mathrm{sen}(x)}dx\ .$$

Resolução:

Usando a fórmula de Euler temos, para $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{sen}(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}},$$

donde

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{5+3\,\mathrm{sen}(x)}dx = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}}{5+3\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}}dx = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{e^{\mathrm{i}x}+e^{-\mathrm{i}x}}{2}}{5+3\frac{e^{\mathrm{i}x}-e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}}\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x}}{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x}}dx.$$

O integral real pode assim ser interpretado como o integral complexo $\oint_{|z|=1} f(z)dz$, da função

$$f(z) = \frac{\frac{z+1/z}{2}}{5+3\frac{z-1/z}{2\mathrm{i}}}\frac{1}{\mathrm{i}z} = \frac{z^2+1}{z(3z^2+10\mathrm{i}z-3)}.$$

Resta agora aplicar o teorema dos resíduos (ou alternativamente, a fórmula integral de Cauchy) ao cálculo do integral em torno da circunferência unitária em torno da origem.

Para isso, começa-se por observar, usando a fórmula resolvente para o polinómio de segundo grau no denominador, que as singularidades desta função f são $z=0$, $z=-\frac{\mathrm{i}}{3}$ e $z=-3\mathrm{i}$. Obviamente só as duas primeiras nos interessam, visto serem as únicas que estão situadas no interior da circunferência de integração. O denominador da função pode portanto ser factorizado como:

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(3z^2+10\mathrm{i}z-3)} = \frac{z^2+1}{3z(z+3\mathrm{i})(z+\mathrm{i}/3)}.$$

Os pontos $z=0$ e $z=-\mathrm{i}/3$ são obviamente pólos (os limites de f são infinitos, nestes pontos) e tem-se

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{3(z+3\mathrm{i})(z+\mathrm{i}/3)} = -\frac{1}{3},$$

enquanto que

$$\lim_{z\to -\mathrm{i}/3}(z+\mathrm{i}/3)f(z) = \lim_{z\to -\mathrm{i}/3}\frac{z^2+1}{3z(z+3\mathrm{i})} = \frac{1}{3},$$

donde se conclui que os pólos são simples e estes limites são os correspondentes resíduos. Assim, pelo teorema dos resíduos

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(x)}{5+3\,\mathrm{sen}(x)}dx = \oint_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,-\mathrm{i}/3)\big) = 2\pi\mathrm{i}\Big(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\Big) = 0.$$

[1,0 val.] 5. Use o teorema fundamental do cálculo para calcular

$$\int_\gamma \Big(\frac{1}{z-3}+\frac{1}{z+3}\Big)dz$$

em que γ é o segmento de recta que une $-3\mathrm{i}$ a $3\mathrm{i}$. Justifique **cuidadosamente** a sua resposta.

Resolução:

Considere a função $F(z)=\log(z-3)+\log(z+3)$ onde $\log z$ denomina o ramo $\frac{\pi}{2}$ do logaritmo, isto é

$$\log z = \log|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\, z \quad , \quad \frac{\pi}{2} \le \mathrm{Arg}\, z < \frac{5\pi}{2}$$

A função F é analítica em

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Arg}\,(z-3) \neq \frac{\pi}{2} \text{ e } \mathrm{Arg}\,(z+3) \neq \frac{\pi}{2}\}$$

Verifica-se que

$$\mathrm{Arg}\,(z-3) = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Arg}\,(x+\mathrm{i}y-3) = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x-3=0 \\ y \ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=3 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

e

$$\mathrm{Arg}\,(z+3) = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Arg}\,(x+\mathrm{i}y+3) = \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+3=0 \\ y \ge 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-3 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Conclui-se que F é analítica em (designadamente)

$$D = \{x+\mathrm{i}y \ : \ x \in]-2,2[\text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

que é um conjunto aberto, simplesmente conexo e que contém a curva γ. Dado que

$$F'(z) = \frac{1}{z-3}+\frac{1}{z+3} \quad , \quad \forall z \in D$$

por aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo tem-se que

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma \Big(\frac{1}{z-3}+\frac{1}{z+3}\Big)dz = F(3\mathrm{i}) - F(-3\mathrm{i}) \\ &= \log(3\mathrm{i}-3)+\log(3\mathrm{i}+3)-\log(-3\mathrm{i}-3)-\log(-3\mathrm{i}+3) \\ &= \log\left(\sqrt{18}e^{3\pi\mathrm{i}/4}\right)+\log\left(\sqrt{18}e^{9\pi\mathrm{i}/4}\right)-\log\left(\sqrt{18}e^{5\pi\mathrm{i}/4}\right)-\log\left(\sqrt{18}e^{7\pi\mathrm{i}/4}\right) \\ &= \frac{3\pi}{4}\mathrm{i}+\frac{9\pi}{4}\mathrm{i}-\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}-\frac{7\pi}{4}\mathrm{i} = 0 \end{aligned}$$

[1,0 val.] 6. Seja $f = u + iv$ uma função inteira que verifica

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad , \quad \forall z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \, .$$

Mostre que existem constantes $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{C}$ tais que

$$f(z) = a\mathrm{i}z + b \qquad , \qquad \forall z \in \mathbb{C} \ .$$

Resolução:

Sendo f inteira, então utilizando uma das equações de Cauchy-Riemann e a hipótese,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial y} & = & 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} & = & 0 \end{cases}$$

em $\mathbb{R}^2$. Resulta assim que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$, pelo que existem $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $u(x,y) = g(y)$ e $v(x,y) = h(x)$, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Usando agora a outra equação de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, então:

$$g'(y) = -h'(x) \qquad \text{para qualquer } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

Note que o primeiro membro da equação (1) depende apenas de x, enquanto o 2º membro depende apenas de y; em consequência, para a igualdade ser satisfeita em $\mathbb{R}^2$ é necessário que ambos os membros sejam iguais a uma (mesma) constante real, que aqui designamos por λ:

$$g'(y) = \lambda \qquad \text{e} \qquad -h'(x) = \lambda$$

Desta forma:

$$g(y) = \int \lambda dy = \lambda y + \beta_1,$$

$$h(x) = \int -\lambda dx = -\lambda x + \beta_2$$

onde $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$. Resulta então que, para qualquer $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = g(y) + \mathrm{i}h(x) = \lambda y + \beta_1 - \mathrm{i}\lambda x + \mathrm{i}\beta_2 = -\lambda\mathrm{i}(x + \mathrm{i}y) + (\beta_1 + \mathrm{i}\beta_2) = a\mathrm{i}z + b,$$

onde $a = -\lambda \in \mathbb{R}$ e $b = \beta_1 + \mathrm{i}\beta_2 \in \mathbb{C}$.