

O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

JOSÉ NATÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Não distinguimos superfícies que têm a mesma forma, ou **geometria**. Assim, uma superfície esférica numa dada posição do espaço é identificada com outra superfície esférica do mesmo raio noutra posição qualquer do espaço, mas não com a superfície de um elipsóide. Para estudar a geometria de uma superfície usam-se conceitos como comprimentos, ângulos, geodésicas (curvas de comprimento mínimo) e polígonos geodésicos (polígonos cujos lados são arcos de geodésicas).

Como passo inicial para descrever as superfícies classificamo-las de acordo com uma semelhança mais grosseira, em que certos aspectos da sua geometria, como comprimentos e ângulos, são ignorados. Mais precisamente, dizemos que duas superfícies têm a mesma **topologia** se é possível deformar uma na outra continuamente (isto é, sem rasgar nem colar). Por exemplo, a superfície de uma esfera tem a mesma topologia que a superfície de um elipsóide. No estudo da topologia de uma superfície usam-se certas quantidades, como por exemplo a característica de Euler, que são invariantes por deformações contínuas.

Neste artigo descrevemos de forma elementar o teorema de Gauss-Bonnet, que relaciona a geometria de uma superfície fechada com a sua topologia. Na secção 2 recordamos a fórmula de Euler para poliedros convexos, e definimos a característica de Euler de uma superfície fechada qualquer. Na secção 3 estudamos da geometria das superfícies dos poliedros: definimos o excesso angular de um polígono geodésico, o defeito angular de um vértice, e provamos um teorema de Descartes que relaciona a soma dos defeitos angulares com a característica de Euler. Este teorema é usado na secção 4 para intuir o teorema de Gauss-Bonnet: a soma dos excessos angulares de qualquer decomposição de uma superfície fechada em polígonos geodésicos depende apenas da sua característica de Euler.

2. A FÓRMULA DE EULER

A fórmula de Euler para poliedros convexos [4] é bem conhecida:

$$V - A + F = 2,$$

onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

Exercício 2.1. *Verifique esta fórmula para os seguintes poliedros convexos:*

- (1) *Uma pirâmide cuja base é um polígono com n lados (inclui o tetraedro);*
- (2) *Um prisma cuja base é um polígono com n lados (inclui o cubo);*
- (3) *O sólido obtido colando duas pirâmides em (1) pela base (inclui o octaedro).*

Existem muitas demonstrações da fórmula de Euler [1]. Um primeiro passo é reduzir o problema ao caso em que todas as faces são triângulos. De facto, se uma dada face é um polígono com n lados podemos sempre decompô-la em n triângulos acrescentando um vértice no seu interior. Desta forma aumentámos V em uma unidade (porque acrescentámos um vértice), aumentámos A em n unidades (porque acrescentámos uma aresta por cada um dos n vértices do polígono) e aumentámos F em $n - 1$ unidades (de uma face fizemos n faces). A variação de $V - A + F$ foi então de

$$1 - n + (n - 1) = 0,$$

e portanto $V - A + F$ tem o mesmo valor para o novo poliedro.

Assumindo então que todas as faces são triângulos, imaginemos que vamos retirando as faces uma a uma. Quando retiramos a primeira face reduzimos F em uma unidade mantendo V e A

inalterados. Portanto $V - A + F$ reduz-se em uma unidade. A partir deste momento existem faces com arestas “livres” (ou seja, que não são arestas de outras faces). É intuitivamente claro, e pode provar-se rigorosamente¹, que é possível ir retirando faces com arestas livres de forma a que em cada passo as arestas livres formam uma linha fechada simples (sem auto-intersecções). Se retirarmos uma face com uma aresta livre diminuimos F em uma unidade e A em uma unidade, mantendo V constante. Logo $V - A + F$ mantém-se constante. Se retirarmos uma face com duas arestas livres diminuimos F em uma unidade, A em duas unidades e V em uma unidade. Portanto também neste caso $V - A + F$ se mantém constante. Quando retiramos todas as faces até só restar um triângulo, temos $V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1$. Logo $V - A + F = 1 + 1 = 2$ para o poliedro inicial.

A superfície de qualquer poliedro convexo tem a mesma topologia que a superfície da esfera. Um poliedro com faces triangulares induz então uma **triangulação** da superfície da esfera, isto é, uma divisão da superfície da esfera em regiões com a topologia de triângulos, que se intersectam ao longo de arestas comuns. A demonstração acima pode ser facilmente adaptada para mostrar que qualquer triangulação da superfície da esfera com F triângulos, A arestas e V vértices satisfaz $V - A + F = 2$. Note-se que isto não tem que ser (e não é!) verdade para superfícies com outras topologias, como por exemplo a superfície de um donut (**toro**). Continua no entanto a ser verdade que para qualquer superfície fechada S o número inteiro

$$\chi(S) = V - A + F$$

não depende da triangulação usada para o calcular, e é o mesmo para toda as superfícies com essa topologia. Este número chama-se a **característica de Euler** da superfície.

Exercício 2.2. *Verifique que a característica de Euler do toro é zero.*

Exercício 2.3. *Onde é que a demonstração acima de que a característica de Euler da esfera é 2 falha no caso do toro?*

3. UM TEOREMA DE DESCARTES

Para a fórmula de Euler, a geometria exacta da superfície do poliedro é irrelevante. Por exemplo, qualquer pirâmide triangular corresponde essencialmente à mesma triangulação da superfície da esfera, independentemente das suas faces serem triângulos equiláteros, rectângulos ou de outro tipo qualquer. No que se segue, iremos olhar cuidadosamente para a geometria da superfície do nosso poliedro [5].

Na geometria habitual do plano temos o conceito fundamental de segmento de recta. Um segmento de recta tem a propriedade de ser a linha de comprimento mínimo que une os seus dois extremos. Para a superfície de um poliedro qualquer (não necessariamente convexo) podemos definir um conceito análogo, a que chamaremos **arco minimizante**. O arco minimizante entre dois pontos é a linha desenhada sobre a superfície do poliedro que une os dois pontos e tem comprimento mínimo (pode existir mais que um arco minimizante unindo dois pontos, mas ele é único se os pontos estiverem suficientemente próximos). Mais geralmente, chamaremos **arco de geodésica** a qualquer linha que coincida com o arco minimizante entre quaisquer dois dos seus pontos, desde que suficientemente próximos. É evidente que a intersecção de um arco de geodésica com cada face do poliedro é um segmento de recta (porque senão seria possível diminuir o seu comprimento), e que se o arco de geodésica cruza uma aresta então os ângulos opostos entre o arco e a aresta devem ser iguais (basta “desdobrar” a aresta, como se mostra na Figura 1). Consideraremos apenas arcos de geodésica que não contêm vértices do poliedro.

O facto de as arestas se poderem “desdobrar” mostra que estas, por si só, não introduzem qualquer diferença em relação à geometria do plano. Por exemplo, os ângulos internos de um **triângulo geodésico** (isto é, uma região do poliedro com a topologia de um triângulo cujas arestas são arcos de geodésica) que não contenha nenhum vértice do poliedro no seu interior somam sempre π , mesmo que o triângulo intersecte arestas. As diferenças entre a geometria da superfície de um poliedro e a geometria do plano estão concentradas nos vértices: em geral, os

¹Ver por exemplo a Prova 13 em [1].

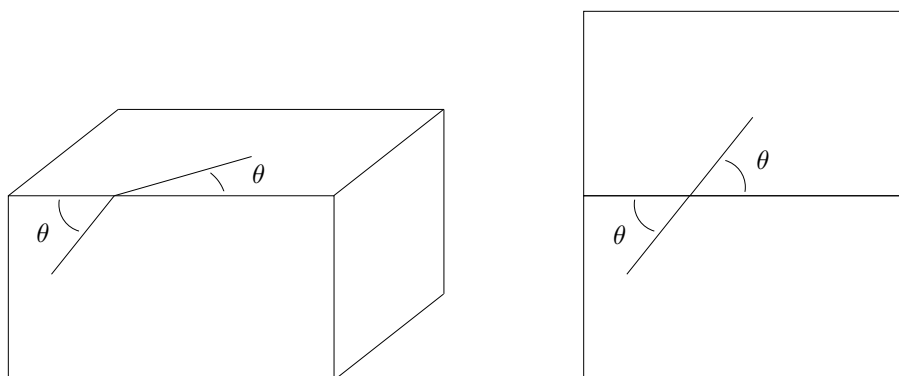


FIGURA 1. Arco de geodésica num poliedro.

ângulos internos de um triângulo geodésico que contenha um vértice no seu interior não somam π . Por exemplo, na Figura 2 podemos ver um triângulo geodésico cujos ângulos internos somam $\frac{3\pi}{2}$.

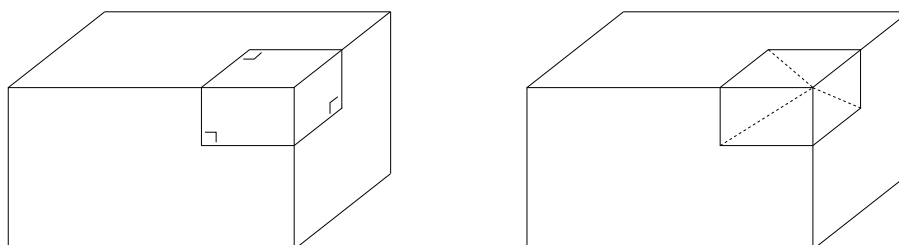


FIGURA 2. Triângulo geodésico contendo um vértice de um poliedro.

Chamaremos **excesso angular** de um triângulo geodésico à diferença entre a soma dos seus ângulos internos e π . Por exemplo, o excesso angular do triângulo geodésico representado na Figura 2 é de $\frac{\pi}{2}$. Chamaremos ainda **defeito angular** de um vértice do poliedro à diferença entre 2π e a soma dos ângulos do poliedro no vértice em questão. Por exemplo, o defeito angular do vértice contido no interior do triângulo geodésico da Figura 2 é também de $\frac{\pi}{2}$. Este facto não é uma coincidência: o excesso angular de qualquer triângulo geodésico contendo um único vértice no seu interior é sempre igual ao defeito angular desse vértice. De facto, unindo o vértice do poliedro aos vértices do triângulo geodésico, como se mostra na Figura 2, decompomos o triângulo geodésico em três triângulos Euclidianos (basta “desdobrar” as arestas apropriadas). Os ângulos internos destes três triângulos Euclidianos somam um total de 3π , que tem que ser igual à soma dos ângulos internos do triângulo geodésico mais a soma dos ângulos do poliedro no vértice. Por outras palavras, se ε é o excesso angular e σ é a soma dos ângulos do poliedro no vértice, temos

$$3\pi = (\pi + \varepsilon) + \sigma \Leftrightarrow \varepsilon = 2\pi - \sigma.$$

Exercício 3.1. *Dê um exemplo de um poliedro contendo um vértice cujo defeito angular seja negativo. Será que este poliedro pode ser convexo?*

Descartes [6] provou o seguinte teorema:

Teorema 3.2. (Descartes) *Para qualquer poliedro com V vértices, A arestas e F faces, a soma dos defeitos angulares de todos os vértices é igual a $2\pi(V - A + F)$.*

Demonstração. Por um lado, a soma dos defeitos angulares é igual a $2\pi V$ menos a soma de todos os ângulos do poliedro. Por outro lado, a soma de todos os ângulos do poliedro é igual à soma dos ângulos de todas as suas faces. A soma dos ângulos de uma só face é igual a π vezes o número de arestas dessa face menos 2π (ver Exercício 3.3). Notando que cada aresta pertence a duas faces

distintas, temos então que a soma de todos os ângulos do poliedro é também igual a $\pi(2A) - 2\pi F$. Portanto a soma dos defeitos angulares é

$$2\pi V - (2\pi A - 2\pi F) = 2\pi(V - A + F).$$

□

Exercício 3.3. *Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com n lados é igual a $(n - 2)\pi$. (Sugestão: decomponha o polígono em triângulos).*

Alternativamente, o teorema de Descartes pode ser formulado em termos da soma dos excessos angulares de uma decomposição do poliedro em triângulos geodésicos contendo no máximo um vértice no seu interior. Esta versão pode ser generalizada para decomposições do poliedro em polígonos geodésicos quaisquer contendo um número arbitrário de vértices no seu interior, onde definimos o excesso angular de um polígono geodésico com n lados como a diferença entre a soma dos seus ângulos internos $(n - 2)\pi$.

Teorema 3.4. (Descartes) *A soma dos excessos angulares de uma decomposição qualquer de um poliedro com V vértices, A arestas e F faces em polígonos geodésicos é igual a $2\pi(V - A + F)$.*

Demonstração. Ver Exercícios 3.5 e 3.6. □

Exercício 3.5. *Mostre que o defeito angular do vértice de um poliedro é igual ao o excesso angular de um polígono geodésico com n lados que contenha apenas esse vértice no seu interior.*

Exercício 3.6. *Mostre que o excesso angular de um polígono geodésico contendo vários vértices no seu interior é igual à soma dos defeitos angulares dos vértices.*

4. O TEOREMA DE GAUSS-BONNET

Para superfícies curvas gerais é ainda possível definir arcos de geodésica. O teorema de Descartes pode então ser generalizado para estas superfícies aproximando-as por superfícies de poliedros² [2, 3].

Teorema 4.1. (Gauss-Bonnet) *A soma dos excessos angulares de uma decomposição qualquer de uma superfície fechada S em polígonos geodésicos é igual a $2\pi\chi(S)$.*

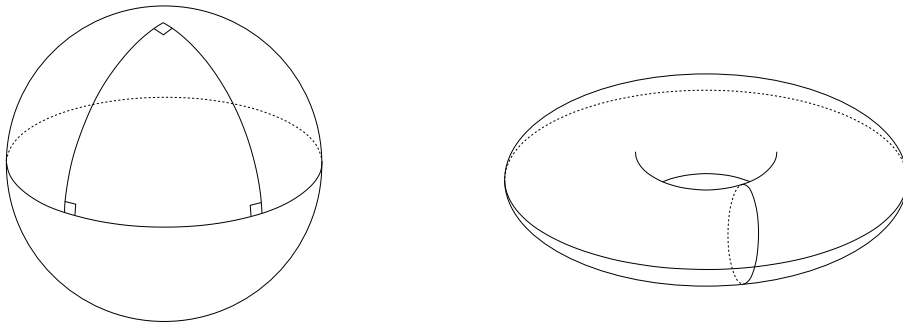


FIGURA 3. Triângulo geodésico na superfície da esfera e geodésicas do toro.

Recorde que um **círculo máximo** na superfície da esfera é a intersecção desta com um plano que passa pelo centro da esfera, como por exemplo o equador ou um meridiano. Os arcos de geodésica da superfície da esfera são precisamente os arcos de círculo máximo (Exercício 4.2). É possível dividir a esfera em 8 triângulos geodésicos como o que se mostra na Figura 3, cada um dos quais possui um excesso angular de $\frac{\pi}{2}$. O excesso angular total é portanto $8 \times \frac{\pi}{2} = 4\pi$, em conformidade com o teorema de Gauss-Bonnet.

²Este tipo de limite é delicado – veja-se por exemplo [8].

Exercício 4.2. *Mostre que os arcos de círculo máximo são arcos de geodésica da superfície da esfera. (Sugestão: note que a esfera é invariante por reflexões em relação ao plano que contém o círculo máximo, e use o facto de que o arco minimizante entre dois pontos suficientemente próximos é único).*

Exercício 4.3. *Mostre que os “meridianos” e o “equador” do toro (Figura 3) são formados por arcos de geodésica, e verifique a validade do teorema de Gauss-Bonnet para esta superfície.*

No limite em que os polígonos ficam muito pequenos, a soma dos excessos angulares reduz-se ao integral de superfície

$$\iint_S K,$$

onde K é o excesso angular por unidade de área, dito a **curvatura** da superfície. O teorema de Gauss-Bonnet escreve-se então [7]

$$\iint_S K = 2\pi\chi(S).$$

Exercício 4.4. *Calcule a curvatura da superfície de uma esfera de raio R . (Sugestão: note que a esfera é invariante por rotações).*

Exercício 4.5. *Mostre que em qualquer superfície com a topologia da esfera existem pontos onde a curvatura é positiva.*

Exercício 4.6. *Mostre que a curvatura de uma superfície com a topologia do toro não pode ser positiva em todos os pontos.*

O teorema de Gauss-Bonnet relaciona uma propriedade geométrica local (curvatura) com uma propriedade topológica global (característica de Euler). Ideias deste género revelaram-se extraordinariamente férteis, tendo inspirado não só as muitas generalizações do teorema de Gauss-Bonnet, que vão da teoria das classes características ao teorema do índice de Atiyah-Singer, mas, indirectamente, muita da Geometria do século XX.

REFERÊNCIAS

- [1] Eppstein, *Nineteen Proofs of Euler’s Formula*, <http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>
- [2] Givental, *Geometry of Surfaces and the Gauss-Bonnet Theorem*, <http://math.berkeley.edu/~giventh/difgem.pdf>
- [3] Polya, *An Elementary Analogue to the Gauss-Bonnet Theorem*, *Am. Math. Month.* **61** (1954) 601-603
- [4] Richeson, *Euler’s Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press (2008)
- [5] Viana, *Viagens pelos Mundos Planos*, <http://w3.impa.br/~viana/out/plano.pdf>
- [6] [http://en.wikipedia.org/wiki/Defect_\(geometry\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Defect_(geometry))
- [7] http://en.wikipedia.org/wiki/Gauss-Bonnet_theorem
- [8] Zames, *Surface Area and the Cylinder Paradox*, *Two-Year College Math. J.* **8** (1977) 207-211