Viagens no tempo no Universo de Gödel

Pedro Peres

17 de Junho de 2013

Resumo

É feita uma introdução conceptual de Geometria Difenrencial e Relatividade Geral com o intuito de permitir a leitores menos familiarizados com as áreas acompanhar o resto da exposição. Em seguida são expostas algumas propriedades básicas da métrica de Gödel: é provado que esta é solução das equações de Einstein, é calculada a sua vorticidade, é provado que existem curvas de tipo tempo fechadas e são provadas algumas características que uma trajectória deve ter para se poder viajar no tempo. Finalmente são analisadas as violações de causalidade que isto implica.

Conteúdo

1 Conceitos Fundamentais **2**

1.1 Uma muito rápida introdução a Geometria Diferencial 2

1.2 Uma introdução a Relatividade Geral mais rápida que a luz 5

2 Universo de Gödel **7**

2.1 A Métrica de Gödel: Propriedades Fundamentais 7

2.2 Equações de Einstein 9

2.3 Vorticidade 12

3 Viagens no tempo **13**

3.1 Existência de curvas de tipo tempo fechadas: A possibilidade de voltar onde se partiu, quando se partiu 14

3.2 O caminho pela frente 17

3.3 Causalidade 19

1 Conceitos Fundamentais

Compreender este documento é inteiramente acessível a quem tenha os conhecimentos de uma primeira cadeira de Geometria Diferencial e Relatividade Geral. Era minha intenção torná-lo acessivel mesmo a quem não tivesse esses conhecimentos, no entanto não creio ser possível fazer uma introdução que em poucas páginas resuma tudo o necessário para compreender tudo o que aqui se encontra. Acabei por decidir assim fazer uma introdução conceptual, remetendo o leitor interessado para a bibliografia apropriada para informação mais aprofundada. Em particular [1] dá toda a base teórica de geometria diferencial e [2] tem a base teórica associada à relatividade. [5] tem uma abordagem mais prática e funciona como um crash course em Relatividade e Geometria Diferencial. É minha intenção que esta introdução permita pelo menos que se sigam os argumentos qualitativos das secções que se seguem.

1.1 Uma muito rápida introdução a Geometria Diferencial

O primeiro objecto estranho com que temos de ganhar alguma familiaridade é o tensor. Formalmente um *tensor* $-(n, m)$, dito n vezes covariante e m vezes contravariante, num espaço vectorial V é uma função multilinear que recebe n vectores e m covectores (elementos do dual de V) e devolve um escalar. Este pode ser associado a um objecto que recebe n vectores e devolve m vectores. Por vezes é mais fácil visualizar um tensor desta forma.

Vamos agora considerar uma variedade diferenciável M. Esta em cada ponto tem um espaço tangente que tem uma estrutura de espaço vectorial. Se a cada ponto associarmos um tensor no espaço tangente e impusermos que as componentes do tensor variem de forma suave de ponto para ponto, obtemos um campo tensorial diferenciável em M.

Considere-se agora que temos um campo tensorial diferenciável 2-covariante em M com propriedades de um produto interno. Este diz-se uma *métrica Riemanniana*. Se deixarmos cair a propriedade de não negatividade diz-se uma métrica *pseudo-Riemanniana*. É com esta última que vamos aqui maioritatiamente trabalhar.

Viremos agora baterias para o conceito de conexão ou derivada covariante. No espaço euclidiano é bastante intuitivo comparar vectores com base em pontos diferentes: Há uma forma intuitiva dos transportar para o mesmo ponto onde é simples tomar um produto interno e consequentemente medir ângulos e tomar amplitudes. No entanto numa variedade em geral isto não é de todo intuivo: por exemplo numa esfera é possível transportar um vector por 2 caminhos diferentes "mantendo a mesma direcção", pelo menos infinitesimalmente, até ao mesmo ponto, e acabar com 2 vectores não colineares. Isto à partida pode parecer contraditório, no entanto é um fenómeno muito natural criado pela existência de curvatura. O que se passa é que necessitamos de uma estrutura adicional na variedade, chamada uma conexão, para poder fazer este tipo de comparações. Uma conexão é uma aplicação que recebe dois campos vectoriais e devolve um campo vectorial. Dada uma variedade, se $c(t)$ é uma curva integral do campo vectorial X, e $V(t)$ é a restrição do campo vectorial Y a $c(t)$, se para além disso x^i é um sistema de coordenadas tal que $V(t) = \sum_{i=1}^{n} V^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}$, então:

$$(\nabla_X Y)_{c(t)} = \frac{DV}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{V}^i(t) + \sum_{j,k=1}^{n} \Gamma^i{}_{jk}(c(t))\dot{x}^j(t)V^k(t) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}$$

Repare-se na fórmula acima o primeiro termo corresponde a uma variação de um campo vectorial que se esperaria num espaço euclidiano, componente a componente, enquanto que o segundo termo depende de um conjunto de funções $\Gamma^i{}_{jk}(c(t))$. Estes designam-se os *símbolos de Christoffel* e codificam toda a informação sobre a conexão.

É de esperar que existam várias possibilidades para os símbolos de Christoffel, no entanto apenas existe uma conexão simétrica compatível com a métrica, e essa é a designada *conexão de Levi-Civita*, dada pelos seguintes simbos de Christoffel:

$$\Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} g^{il} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) .$$

Podemos agora tornar mais rigoroso o que foi acima mencionado como motivação. Dado um vector, e uma curva c que passe no seu ponto base, o *transporte paralelo* do vector ao longo dessa curva é o campo vectorial V tal que: $\frac{DV}{dt}(t) = 0$. Pelo Teorema de Picard-Lindelöf existe uma solução única para cada condição inicial para estas EDO's. Assim o transporte paralelo ao longo de uma curva é único. Além disto com a conexão de Levi-Civita, o transporte paralelo preserva ângulos e amplitudes.

É também importante a noção de *geodésica*. Uma curva $c(t)$ é uma geodésica sse $\frac{D\dot{c}}{dt}(t) = \nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t) = 0$. No caso de uma superfície em $\mathbb{R}^3$, esta condição significa que $c(t)$ é uma curva que em cada ponto possui uma aceleração normal ao plano tangente. Note-se que mais uma vez pelo Teorema de Picard-Lindelöf vai existir unicidade de solução para as EDO's em questão, só que desta vez, como a equação é de segundo grau, a condição inicial inclui o ponto de origem e o vector tangente nesse ponto para a geodésica. Noto ainda que dados dois pontos numa geodésica esta não é necessáriamente a curva que minimiza a sua distância: As geodésicas minimizam localmente as distâncias, mas se por exemplo imaginarmos numa esfera dois pontos no equador relativamente próximos, ambas as porções do equador que ligam esses pontos são geodésicas, mas vai haver uma maior que a outra!

Chegou a altura de compreendermos o que é a curvatura e para tal há que interpretar o *tensor de Riemann.* Este tensor 3 vezes covariante e 1 vez contravariante possui uma definição que pode ser encontrada por exemplo em [1]. No entanto não a irei mencionar pois é mais dificil de lhe retirar significado geométrico. Ao invés consideremos a equação de Jacobi. Dada uma família de geodésicas γ_τ que varie suavemente com τ, o seu campo de Jacobi é $J(t) = \left.\frac{\partial \gamma_\tau(t)}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}$. Podemos interpretar este campo vectorial como em cada ponto estando a dizer como é que geodésicas infinitesimalmente próximas se estão a afastar. A equação de Jacobi diz-nos que:

$$\frac{D^2}{dt^2}J(t) = R(J(t),\dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) \ .$$

Assim o tensor de Riemann pode ser interpretado como um objecto que recebe um campo de Jacobi e 2 vezes o campo vectorial formado pelos vectores tangentes a uma geodésica e devolve a segunda derivada covariante do Campo de Jacobi. $\frac{D^2}{dt^2}J(t)$ vai ser um múltiplo negativo de $J(t)$ numa variedade de curvatura positiva (as geodésicas aproximam-se, por exemplo a esfera) e vai ser positivo numa variedade de curvatura negativa (as geodésicas afastam-se, por exemplo o plano hiperbólico). Finalmente a partir das componentes do tensor de Riemann $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta}$ podemos definir o *tensor de Ricci*:

$$R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\nu\sigma} \ ,$$

e a *curvatura escalar*:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \ ,$$

que numa variedade isotrópica codificam toda a informação sobre a curvatura da variedade.

Um leitor não habituado a ler livros de física pode achar estranhas estas equações. Embora não estejam explícitos somatórios, na designada notação de Einstein, sempre que um índice se repete duas vezes no mesmo termo de uma equação supõe-se que está a ser feito um somatório nesse índice. A partir deste ponto esta notacão será abundantemente utilizada.

Finalmente apresento uma fórmula de cálculo muito poderosa, que permite calcular o tensor de Riemann: as *equações de Cartan.* Para proceder a esse cálculo, escolhe-se um campo de referenciais numa variedade $\{X_1, ..., X_n\}$, que induz um coreferencial dual $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$. As equações estruturais de Cartan tomam a forma:

$$\begin{cases} d\omega^\alpha + {\omega^\alpha}_\beta \wedge \omega^\beta = 0 \\ dg_{\alpha\beta} = g_{\gamma\beta}{\omega^\gamma}_\alpha + g_{\gamma\alpha}{\omega^\beta}_\gamma \\ {\Omega^\alpha}_\beta = d{\omega^\alpha}_\beta + {\omega^\alpha}_\gamma \wedge {\omega^\gamma}_\beta \end{cases}$$

Onde existem as seguintes relações entre as designadas formas de conexão e formas de curvatura e os símbolos de Christoffel e as componentes do tensor de Riemann respectivamente:

- ${\omega^\alpha}_\beta = {\Gamma^\alpha}_{\gamma\beta}\omega^\gamma$
- ${\Omega^\alpha}_\beta = \frac{1}{2}{R^\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^\gamma \wedge \omega^\delta$

Destaco que estas equações codificam toda a informação sobre a conexão e a curvatura da métrica na variedade, sendo assim uma forma muito poderosa e concisa de cálculo.

1.2 Uma introdução a Relatividade Geral mais rápida que a luz

A revolução do início do século XX das noções de espaço e tempo começou com Minkowski, que percebeu que estes 2 conceitos deviam ser interpretados como um espaço-tempo que tivesse uma existência geométrica coesa. Assim a $\mathbb{R}^4$ com a métrica de Minkowski:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

chama-se o espaço-tempo de Minkowski, que Albert Einstein utilizou na sua teoria da relatividade restrita. Esta teoria, compatível com o Electromagnetismo de Maxwell, que explicava as experiências que indiciavam que a velocidade da luz é constante independentemente da velocidade do observador em relação a esta viria no entanto a mostrar-se incompatível com a mecânica Newtoniana. O principio da equivalência, que diz que uma experiência efectuada perto de um corpo gravitacional que produza uma certa aceleração é indistinguível de uma experiência feita por exemplo dentro de um foguetão que esteja a exercer a mesma aceleração, levou Einstein a pensar que raios de luz teriam de seguir uma trajectória curva na vizinhança de de um corpo de grande massa. Como no entanto sabia que os raios de luz seguiam geodésicas isto levava a um pensamento. *A matéria curva o espaço.* Assim, dado um tensor energia-momento, que descreve a energia e momento de um determinado objecto físico. Einstein quis perceber como é que este afecta a geometria do espaço. Um exemplo de um tensor energia-momento é o de um fluido perfeito:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + p\eta^{\mu\nu} \ ,$$

em que $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski. É uma caracteristica de todos os tensores energia-momento que a sua divergência covariante é nula: $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.
No entanto a divergência covariante do tensor de Ricci não é nula. Isto levou Einstein a construir um tensor com divergência nula, o *tensor de Einstein*:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \ .$$

Este tensor sim, tem divergência covariante nula. Einstein percebeu que estes tensores tinham de ser proporcionais. Determinando a constante de proporcionalidade com a compatibilidade com a teoria de Newton para campos gravíticos fracos foi assim escrita uma das mais célebres equações da física do século XX:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \ .$$

Havia no entanto mais um termo que era matematicamente justificado, Einstein na altura adicionou-o às equações de forma a que o universo fosse estático. Mais tarde Edwin Hubble viria a descobrir que o universo se encontrava em expansão e Einstein chamou a esta constante cosmológica o seu maior erro. No entanto hoje em dia, com as evidências experimentais de energia escura, essa constante voltou à vida. Assim as equações de Einstein escrevem-se:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \ .$$

Usualmente tenta-se resolver as equações de Einstein para um determinado tensor energia-momento. Isto é, encontra-se uma métrica que satisfaça as equações. Esta é a abordagem que vamos tomar a partir deste ponto.

Destaco finalmente que dada uma curva no espaço-tempo de uma dada solução das equações de Einstein, de acordo com o sinal da sua separação espaço-tempo ds^2, pode-se designar de tipo tempo, luz ou espaço:

$$\begin{cases} ds^2 < 0 \Rightarrow \text{curva de tipo tempo;} \\ ds^2 = 0 \Rightarrow \text{curva de tipo luz;} \\ ds^2 > 0 \Rightarrow \text{curva de tipo espaco.} \end{cases}$$

As curvas de tipo tempo representam trajectórias que particulas massivas podem efectuar, enquanto que as curvas de luz representam trajectórias de raios de luz.

2 Universo de Gödel

Kurt Gödel é indiscutivelmente considerado um dos maiores génios do século XX, principalmente pelos seus teoremas da incompletude em lógica. No entanto mentes geniais raramente são contidas numa área restrita. E a partir daqui este trabalho foca-se em analisar uma descoberta de Gödel nada relacionada com lógica: uma solução paradoxal das equações de Einstein. Certamente o interesse de Gödel na área surgiu da sua famosa amizade com o próprio Albert Einstein, e com efeito Gödel, tendo descoberto em 1951 esta solução, ofereceu-a como presente de aniversário pelo 70º aniversário do amigo.

A solução de Gödel possui muitas propriedades física e matematicamente interessantes, entre as quais a mais conhecida é a possibilidade de fazer viagens no tempo. A partir daqui vou considerar um sistema de unidades em que $c = 1$ e $G = 1$.

2.1 A Métrica de Gödel: Propriedades Fundamentais

Nesta secção vamos abordar algumas propriedades fundamentais da solução de Gödel das equações de Einstein. Gödel originalmente utilizou a métrica dada pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = \frac{1}{2\omega^2}(-(dt + \exp x \; dz)^2 + dx^2 + dy^2 + \frac{1}{2}\exp x \; dz^2) \; , \tag{1}$$

em que ω é uma constante que depende das unidades consideradas. Por motivos que se vão tornar evidentes não vamos estudar a métrica nesta forma. Vamos antes optar por trabalhar com uma sua versão em coordenadas pseudo-cilíndricas:

$$ds^2 = \frac{1}{2\omega^2}(-(dt + \sqrt{2}(1 - \cosh r)d\varphi)^2 + dr^2 + \sinh^2 r \; d\varphi^2 + dz^2) \tag{2}$$

Finalmente consideremos um sistema de unidades tal que $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A métrica assume assim a sua forma final escrita matricialmente:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2}(1-\cosh r) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}(1-\cosh r) & 0 & \sinh^2 r \; - 2(1-\cosh r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Estamos agora em condições de explorar algumas propriedades do universo de Gödel:

- Esta é uma métrica pseudo-Riemanniana.

• Esta métrica é solução das equações de Einstein, mais propriamente para um fluido descrito apenas pela sua densidade de massa $\rho = \frac{1}{8\pi}$ e uma constante cosmológica de $\Lambda = -\frac{1}{2}$. Embora a larga escala considerar o universo descrito por um fluido deste tipo pareça plausível, a esperança que esta solução seja realista é destruida pela necessidade de fixar $\Lambda = -\frac{1}{2}$, já que isto leva a uma expansão de Hubble nula, o que hoje se sabe não ser o caso do nosso universo cuja expansão até está a acelerar.

• Note-se que se retirarmos a componente $-(dt + \sqrt{2}(1 - \cosh r)d\varphi)^2$ ao elemento de linha ficamos apenas com $dr^2 + \sinh^2 r \; d\varphi^2 + dz^2$. Ora esta porção da métrica é bem conhecida: $dr^2 + \sinh^2 r \; d\varphi^2$ é o elemento de linha do plano hiperbólico, como consequência da métrica de Gödel ter esta componente o seu quociente pelo fluxo do campo vectorial $\frac{\partial}{\partial t}$ vai ser isométrico ao plano hiperbólico. Note-se que esta componente vai assim produzir uma curvatura negativa. Por outro lado a componente em dz^2 não acrescenta qualquer curvatura. Com efeito se M é a variedade com métrica $(-(dt + \sqrt{2}(1 - \cosh r)d\varphi)^2 + dr^2 + \sinh^2 r \; d\varphi^2$ então o universo de Gödel é isométrico a $M \times \mathbb{R}$. Consequentemente uma forma de visualizar espacialmente o universo de Gödel é imaginarmos que em qualquer ponto este é um disco de Poicaré produto cartesiano com uma componente euclidiana. Algo como um "cilindro de Poincaré". Mas atenção que esta intrepretação vale para todos os pontos do espaço. Ou seja não é que o espaço todo tenha este aspecto: Se imaginarmos a Alice e o Bob no universo de Gödel a uma certa distância um do outro, a Alice vai visualizar algo como um cilindro de Poincaré, e vai esperar que o Bob a veja no centro e que ele esteja na periferia. Mas *não é isso que acontece!*. O que acontece é que o Bob também se vê como centro do cilindro!

• A acrescentar a esta estrutura espacial, ocorre algo que ainda se pode considerar mais estranho. Na secção 2.3 vai ser efectuado o cálculo da vorticidade das linhas mundo do universo de Gödel. A conclusão qualitativa que podemos retirar desse cálculo é que tudo está a rodar em torno de qualquer eixo dos zz. Mais uma vez voltando à Alice e ao Bob, embora eles estejam distanciados, cada um vai ver todo o universo a rodar em torno dele.

• Na secção 3 vai ser explorada em detalhe aquela que é considerada a propriedade mais bizarra desta métrica, a existência de curvas fechadas de tipo tempo, o que implica a possibilidade de fazer viagens no tempo.

• Embora não seja aqui muito explorado, algo também muito interessante de explorar nesta métrica é o estudo das geodésicas nulas, que nos permite retirar conclusões bastante estranhas sobre a propagação da luz no universo de Gödel, como a existência de um horizonte óptico, a possibilidade de visualizar muitas imagens do mesmo objecto, e distorções bastante peculiares. Para mais informação sobre este tema ver por exemplo [4].

2.2 Equações de Einstein

Vamos agora verificar que a métrica de Gödel é uma solução das equações de Einstein para um fluido perfeito sem pressão. Para tal vamos utilizar a técnica das equações de Cartan para calcular o tensor de Einstein. Não se irá provar isto para a métrica (3) mas antes para a métrica dada pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -(dt + \sqrt{2}(1 - \cosh r)d\varphi)^2 + dr^2 + \sinh^2 r d\varphi^2 \tag{4}$$

Há duas razões para proceder desta forma: A primeira é que os cálculos se tornam bastante mais laboriosos com a métrica (3) sem permitir ganhar nada de novo. A segunda é que como já foi mencionado na secção anterior, se o espaço descrito pela métrica (4) é uma variedade M, a variedade descrita pela métrica (3) é isométrica a $M \times \mathbb{R}$, e estas duas possuem a mesma curvatura, portanto os resultados deduzidos vão ser semelhantes (embora não iguais! Por exemplo estas variedades não têm a mesma dimensão, isto vai levar a que o tensor de Einstein não seja o mesmo. No entanto no caso desta métrica este tensor é muito "bem comportado").

Teorema 1 *A métrica de Gödel* (4) *é solução das equações de Einstein para um fluido perfeito sem pressão com densidade de massa* $\rho = \frac{1}{8\pi}$ *e uma constante cosmológica* $\Lambda = -\frac{1}{2}$.

Prova:

Comecemos por apresentar um campo de referenciais ortonormados para a métrica (4):

$$\begin{cases} E_t = \frac{\partial}{\partial t} \\ E_r = \frac{\partial}{\partial r} \\ E_\varphi = \frac{1}{\sinh r}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \sqrt{2}(1 - \cosh r)\frac{\partial}{\partial t}\right) \end{cases} \tag{5}$$

Verifique-se que é ortonormado apenas para os casos menos triviais:

$$\langle E_t, E_\varphi \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{\sinh r}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \sqrt{2}(1 - \cosh r)\frac{\partial}{\partial t}\right) \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \rangle - \sqrt{2}(1 - \cosh r)\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
\langle E_\varphi, E_\varphi\rangle &= \frac{1}{\sinh^2 r}\left(\langle\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial\varphi}\rangle + 2(1-\cosh r)^2\langle\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\rangle - 2\sqrt{2}(1-\cosh r)\langle\frac{\partial}{\partial\varphi},\frac{\partial}{\partial t}\rangle\right)\\
&= \frac{1}{\sinh^2 r}\left((\sinh^2 r - 2(1-\cosh r)^2) - 2(1-\cosh r)^2 + 4(1-\cosh r)^2\right)\\
&= 1\ .
\end{aligned}$$

É facil verificar que estes referenciais induzem o seguinte campo de coreferenciais:

$$\begin{cases}
\omega^t = dt + \sqrt{2}(1-\cosh r)d\varphi\\
\omega^r = dr\\
\omega^\varphi = \sinh r\ d\varphi
\end{cases}\tag{6}$$

Agora vamos utilizar as equações de Cartan para determinar o tensor de Riemann. Como $\langle E_t, E_t\rangle = -1$ é preciso ter algum cuidado com a segunda equação de Cartan. As equações de Cartan tomam assim a forma:

$$\begin{cases}
d\omega^\alpha + {\omega^\alpha}_\beta \wedge \omega^\beta = 0\\
{\omega^\alpha}_\beta + {\omega^\beta}_\alpha = 0 \text{ se } \alpha \text{ e } \beta \neq t \text{ ou } \alpha = \beta = t\\
{\omega^\alpha}_\beta - {\omega^\beta}_\alpha = 0 \text{ se apenas } \alpha \text{ ou } \beta \text{ forem } t\\
{\Omega^\alpha}_\beta = d{\omega^\alpha}_\beta + {\omega^\alpha}_\gamma \wedge {\omega^\gamma}_\beta
\end{cases}\tag{7}$$

Comecemos por aplicar a primeira equação de Cartan:

$$\begin{cases}
d^2 t + \sqrt{2}(-\sinh r)dr\wedge d\varphi + {\omega^t}_t\wedge\omega^t + {\omega^t}_r\wedge dr + \sinh r\ {\omega^t}_\varphi\wedge d\varphi = 0\\
d^2 r + {\omega^r}_t\wedge\omega^t + {\omega^r}_r\wedge\omega^r + {\omega^r}_\varphi\wedge\omega^\varphi = 0\\
\cosh r\ dr\wedge d\varphi + {\omega^\varphi}_t\wedge\omega^t + {\omega^\varphi}_r\wedge\omega^r + {\omega^\varphi}_\varphi\wedge\omega^\varphi = 0
\end{cases}\tag{8}$$

Simplificando e utilizando a segunda equação de Cartan em (8) vem:

$$\begin{cases}
{\omega^t}_r\wedge dr + \sinh r\ {\omega^t}_\varphi\wedge d\varphi = \sqrt{2}\sinh r\ dr\wedge d\varphi\\
{\omega^t}_r\wedge dt + \sqrt{2}(1-\cosh r){\omega^t}_r\wedge d\varphi + \sinh r\ {\omega^r}_\varphi\wedge d\varphi = 0\\
{\omega^t}_\varphi\wedge dt + \sqrt{2}(1-\cosh r){\omega^t}_\varphi\wedge d\varphi - {\omega^r}_\varphi\wedge dr = -\cosh r\ dr\wedge d\varphi
\end{cases}\tag{9}$$

Estas equações podem parecer ameaçadoras no entanto resolvê-las tem a mesma dificuldade de resolver sistemas de equações lineares, fazendo ${\omega^\alpha}_\beta = {a^\alpha}_\beta dt + {b^\alpha}_\beta dr + {c^\alpha}_\beta d\varphi$ substituindo nas equações e agrupando os termos com os mesmos produtos exteriores e retirando os termos nulos, obtém-se a partir de (9) o seguinte sistema de equações não triviais:

$$\begin{cases}
-{c^t}_r + \sinh r\ {b^t}_\varphi = \sqrt{2}\sinh r\\
-{c^t}_r + \sinh r\ {a^r}_\varphi = 0\\
\sqrt{2}(1-\cosh r){b^t}_\varphi + {c^r}_\varphi = -\cosh r\\
{b^t}_\varphi + {a^r}_\varphi = 0
\end{cases}\tag{10}$$

Resolvendo este sistema obtém-se:

$$\begin{cases} {\omega^t}_r = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sinh r\ d\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^\varphi \\ {\omega^t}_\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}dr = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^r \\ {\omega^r}_\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}dt - d\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^t - \cosh r\ d\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\omega^t - \coth r\ \omega^\varphi \end{cases} \tag{11}$$

A menos das formas obtidas trocando os índices às formas anteriores (que se podem obter pela segunda equação de Cartan) todas as restantes formas de conexão são nulas. Ao aplicar a derivada exterior segue de (11) que:

$$\begin{cases} d{\omega^t}_r = -\frac{\sqrt{2}}{2}d\omega^\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cosh r\ dr \wedge d\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}\coth r\ \omega^r \wedge \omega^\varphi \\ d{\omega^t}_\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}d^2 r = 0 \\ d{\omega^r}_\varphi = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Pode-se agora prosseguir ao cálculo das formas de curvatura via terceira equação de Cartan aplicada a (11) e (12).

$$\begin{cases} {\Omega^t}_\varphi = {\omega^t}_r \wedge {\omega^r}_\varphi = -\frac{1}{2}\omega^t \wedge \omega^\varphi \\ {\Omega^r}_\varphi = {\omega^r}_t \wedge {\omega^t}_\varphi = \frac{1}{2}\omega^r \wedge \omega^\varphi \\ {\Omega^t}_r = -\frac{\sqrt{2}}{2}\coth r\ \omega^r \wedge \omega^\varphi + {\omega^t}_\varphi \wedge {\omega^\varphi}_r = -\frac{1}{2}\omega^t \wedge \omega^r \end{cases} \tag{13}$$

Note-se que pela segunda equação de Cartan podemos também de (13) concluir que:

$$\begin{cases} {\Omega^\varphi}_t = -\frac{1}{2}\omega^t \wedge \omega^\varphi \\ {\Omega^\varphi}_r = -\frac{1}{2}\omega^r \wedge \omega^\varphi \\ {\Omega^r}_t = -\frac{1}{2}\omega^t \wedge \omega^r \end{cases} \tag{14}$$

Agora da relação entre as formas de curvatura e o tensor de Riemann ${\Omega^\alpha}_\beta = \frac{1}{2}{R^\alpha}_{\beta\gamma\delta}\omega^\gamma \wedge \omega^\delta$ e pela anti-simetria do tensor de Riemann para os últimos dois índices é imediato que:

$$\begin{gathered} {R^t}_{\varphi t\varphi} = -\frac{1}{2}\ ; \quad {R^r}_{\varphi r\varphi} = \tfrac{1}{2}\ ; \quad {R^t}_{rtr} = -\frac{1}{2}\ ; \\ {R^\varphi}_{t\varphi t} = \frac{1}{2}\ ; \quad {R^\varphi}_{r\varphi r} = \tfrac{1}{2}\ ; \quad {R^r}_{trt} = \frac{1}{2}\ . \end{gathered} \tag{15}$$

Finalmente chega-se assim ao tensor de Ricci:

$$R_{tt} = 1\ ; \quad R_{rr} = 0\ ; \quad R_{\varphi\varphi} = 0\ , \tag{16}$$

e à curvatura escalar: $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -1$.

E finalmente ao tensor de Einstein: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}$ que relativamente ao nosso referencial ortonormado fica:

$$G_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Se tivessemos feito todos estes cálculos com a métrica (3) teriamos obtido a componente do tensor de Ricci $R_{zz} = 0$, tal como todas as suas outras componentes com algum índice z. Isto levaria à mesma curvatura escalar e igualmente a um tensor de Einstein diagonal com entradas iguais a $\frac{1}{2}$.

Estamos finalmente em condições de ver que a métrica de Gödel é solução das equações de Einstein para um fluido perfeito sem pressão. Relembro que o tensor energia momento de um fluido perfeito é dado por:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^{\mu}U^{\nu} + p\eta^{\mu\nu} \ , \tag{18}$$

o que num fluido sem pressão se simplifica para $T^{\mu\nu} = \rho U^{\mu}U^{\nu}$.

As equações de Einstein dizem-nos que:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \ . \tag{19}$$

Fixando $\rho = \frac{1}{8\pi}$ e $\Lambda = -\frac{1}{2}$ vem de (17) e (19):

$$8\pi T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 8\pi\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = G_{\mu\nu} \ , \tag{20}$$

o que prova que as equações de Einstein são satisfeitas. No caso da métrica (3) a verificação é inteiramente análoga.

■

2.3 Vorticidade

A vorticidade é um conceito análogo ao do rotacional de um campo vectorial. Mais propriamente, em dinâmica de fluidos, a vorticidade de um fluido é o rotacional do seu campo de velocidades. Embora seja inteiramente análogo aqui vamos proceder ao seu cálculo de uma forma alternativa utilizando o operador estrela de Hodge.

Definição 2 *O operador estrela de Hodge é um isomorfismo linear* $* : \Lambda^k T_p^* M \to \Lambda^{n-k} T_p^* M$ *tal que se* $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ *é uma base positivamente orientada e ortonormada de* $T_p^* M$ *então* $*(\omega_1 \wedge ... \wedge \omega_k) = \omega_{k+1} \wedge ... \wedge \omega_n$.

Tendo em mente este operador podemos calcular de forma simples a vorticidade V:

Teorema 3 *Se* U *é a 4-velocidade covariante de um fluido, a sua vorticidade é calculada da seguinte forma:* $V = \frac{1}{2} *(U \wedge dU)$.

Note-se que esta ultima fórmula é um teorema e não uma definição. O que acontece é que usualmente a vorticidade tem uma definição diferente, mais imediatamente relacionada com o conceito de rotacional e a partir daí deduz-se esta fórmula. No entanto para não alongar demais esta secção optei por não apresentar essa prova. Vamos assim utilizar o teorema anterior para calcular a vorticidade do campo $\frac{\partial}{\partial t}$. Note-se que as linhas mundo do fluido no universo de Gödel são tangentes a este campo e portanto o cálculo que vamos efectuar vai-nos dar uma noção de como está a rodar em cada ponto o fluido que preenche o universo de Gödel.

Teorema 4 *A vorticidade do campo vectorial* $\frac{\partial}{\partial t}$ *é* $V = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^z$.

Prova:

Seja U o covector associado a $\frac{\partial}{\partial t}$, então $U = g_{t\nu}dx^\nu = -dt - \sqrt{2}(1 - \cosh r)d\varphi$. Daqui vem que $dU = \sqrt{2}\sinh r \; dr \wedge d\varphi$, e portanto, $U \wedge dU = \sqrt{2}\sinh r \; dt \wedge dr \wedge d\varphi = \sqrt{2}\omega^t \wedge \omega^r \wedge \omega^\varphi$. Assim, finalmente, $V = \frac{1}{2}*(U \wedge dU) = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega^z$.

■

O teorema 4 permite-nos concluir que em cada ponto do universo de Gödel, a vorticidade das linhas mundo é constante e igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Isto significa que enquanto no nosso universo em qualquer ponto olhamos para as estrelas distantes e as vemos paradas, no universo de Gödel, vêmo-las a rodar com velocidade angular constante em torno de um eixo dos zz que passa pelo ponto em que nos encontramos. Isto é válido para qualquer ponto do universo. Assim não há um centro para o universo de Gödel mas qualquer observador ingénuo procederia prontamente a retirar conclusões ptolomaicas.

3 Viagens no tempo

Embora já se tenham visto algumas propriedades interessantes, aquilo que tornou esta solução das equações de Einstein famosa é a existência de curvas fechadas de tipo tempo, isto implica a possibilidade de através de uma viagem no espaço voltar ao local de partida no *instante* de partida! Mais ainda, é mesmo possível seguir uma trajectória que nos leve atrás no tempo, voltando ao local de partida antes mesmo de ter nascido, o nos leva imediatamente a considerar os paradoxos que isto possa implicar. Nesta secção vamos explorar alguns detalhes das viagens no tempo, provando primeiro que é possível fazê-las para de seguida percebermos *como* é que podemos fazê-las.

3.1 Existência de curvas de tipo tempo fechadas: A possibilidade de voltar onde se partiu, quando se partiu

Antes de iniciarmos a nossa viagem vamos primeiro provar que é possível fazê-la. Vamos considerar a métrica de Gödel dada por (3) na secção 2.

Teorema 5 *Existem curvas fechadas de tipo tempo no Universo de Gödel.*

Prova: As curvas integrais do campo vectorial $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ são sempre fechadas (sendo esta uma coordenada "angular"...). O que se vai provar é que para r suficientemente grande estas são de tipo tempo.

Para uma curva integral de $\frac{\partial}{\partial\varphi}$,

$$ds^2 < 0 \Leftrightarrow \langle \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial\varphi} \rangle < 0 \Leftrightarrow \sinh^2 r - 2(1-\cosh r)^2 < 0 \Leftrightarrow \cosh^2 r - 4\cosh r + 3 > 0 \ .$$

Ora a solução de $\cosh^2 r - 4\cosh r + 3 = 0$ é $r = \operatorname{arccosh} 1 \vee r = \operatorname{arccosh} 3$. Assim para $r > \operatorname{arccosh} 3$ as curvas integrais de $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ são de tipo tempo.

■

Isto prova que viajando no nosso futuro podemos voltar ao instante de partida, no entanto ainda não vimos que podemos efectivamente voltar ao passado.
Vamos agora trabalhar com a parte não trivial da métrica de Gödel, (4) da secção 2. Mais precisamente se $dl^2 = dr^2 + \sinh^2 r \ d\varphi^2$ for o elemento de linha do plano hiperbólico, vamos trabalhar com:

$$ds^2 = -(dt + \sqrt{2}(1-\cosh r)d\varphi)^2 + dl^2 \ . \tag{21}$$

Lema 6 *Numa curva de tipo tempo,* $dt = \sqrt{2}(\cosh r - 1)d\varphi + \frac{dl}{v}$*, em que* v *é a velocidade em relação ao fluido.*

Prova: Considere-se uma curva de tipo tempo com tempo próprio τ. Então:

$$-d\tau^2 = ds^2 = -(dt + \sqrt{2}(1-\cosh r)d\varphi)^2 + dl^2 \Rightarrow dt = \sqrt{2}(\cosh r - 1)d\varphi + \sqrt{dl^2 + d\tau^2} \ .$$

E assim temos que:

$$dt = \sqrt{2}(\cosh r - 1)d\varphi + \sqrt{1 + \left(\frac{d\tau}{dl}\right)^2} dl \tag{22}$$

Recordando que *localmente* o espaço tempo é Minkowski (da mesma forma que uma variedade Riemanniana é localmente euclidiana), tem-se:

$$\frac{dl}{d\tau} = \gamma v = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \Rightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{d\tau}{dl}\right)^2} = \frac{1}{v} \ , \tag{23}$$

em que γ é o factor de Lorenz. De (22) e (23) sai finalmente que:

$$dt = \sqrt{2}(\cosh r - 1)d\varphi + \frac{dl}{v} \ . \tag{24}$$

$\blacksquare$

Lema 7 *Seja α uma curva com projecção fechada no plano hiperbólico, e seja A a área orientada do disco D cuja fronteira é a projecção da curva α. Então tem-se: $\Delta t = \sqrt{2}A + \oint_\alpha \frac{dl}{v}$.*

Prova: Comecemos por ver que pelo lema anterior:

$$\Delta t = \oint_\alpha dt = \sqrt{2}\oint_\alpha (\cosh r - 1)d\varphi + \oint_\alpha \frac{dl}{v} \ .$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \sqrt{2}\iint_D d(\cosh r - 1)\wedge d\varphi + \oint_\alpha \frac{dl}{v} = \sqrt{2}\iint_D \sinh r \ dr \wedge d\varphi + \oint_\alpha \frac{dl}{v} \\ &= \sqrt{2}\iint_D \omega^r \wedge \omega^\varphi + \oint_\alpha \frac{dl}{v} = \sqrt{2}A + \oint_\alpha \frac{dl}{v} \ ,\end{aligned}$$

pois $\omega^r \wedge \omega^\varphi$ é elemento de área hiperbólico. $\blacksquare$

Note-se agora que de acordo com o sinal de Δt quando a projecção da nossa trajectória no plano hiperbólico volta ao local de partida esta chegada ocorre em *instantes* diferentes:

$$\begin{cases} \Delta t > 0 \Rightarrow \text{chegamos depois de partir;} \\ \Delta t = 0 \Rightarrow \text{chegamos no instante de partida;} \\ \Delta t < 0 \Rightarrow \text{chegamos antes de partir.} \end{cases} \tag{25}$$

Portanto para conseguir voltar atrás no tempo, ou pelo menos ao instante de partida, a condição a impôr é $\Delta t \leq 0$. Note-se que para isto acontecer é necessário e suficiente que $\sqrt{2}A + \oint_\alpha \frac{dl}{v} \leq 0$, e para isso tem que se ter $A < 0$. Ora isto corresponde, pela orientação do Teorema de Stokes, a que α tenha de ser percorrida no sentido inverso (horário).
O lema seguinte vai-nos ser útil para retirar várias conclusões quantitativas.

Lema 8 *Se $A < 0$, $\Delta t \leq 0 \Rightarrow l < \sqrt{2}|A|$*

Prova: Como nas unidades escolhidas $c = 1$ temos que $v < 1$ e portanto $\oint_\alpha \frac{dl}{v} > l$. Também temos que ter $\sqrt{2}A + \oint_\alpha \frac{dl}{v} \leq 0$. Juntando as desigualdades obtém-se que $\sqrt{2}A + l < 0 \Rightarrow l < -\sqrt{2}A$. Como $l > 0$ e $A < 0$ isto implica que $l < \sqrt{2}|A|$. $\blacksquare$

Antes de prosseguirmos torna-se agora necessário recordar uma desigualdade importante de geometria elementar, a desigualdade isoperimétrica:

Teorema 9 ***Desigualdade Isoperimétrica***

Dada uma curva fechada γ de comprimento l no plano euclidiano que seja bordo de um disco de área A, tem-se:

- $4\pi A \leq l^2$
- $4\pi A = l^2$ *sse γ é uma circunferência.*

Intuitivamente a veracidade deste teorema prende-se com dois factos: Qualquer região que não seja convexa pode ser modificada de forma a manter o perímetro e aumentar a área ao fazer uma "reflexão local"nas áreas côncavas. Para além disso, qualquer região que não seja simétrica pode ser deformada de forma a conter uma maior área. Como a única forma completamente convexa e simétrica é o círculo, só para o circulo poderia existir a igualdade. Isto obviamente não é uma prova, esta está além dos objectivos deste trabalho.

Destaco que existem teoremas análogos em geometria esférica e hiperbólica. As desigualdades mudam mas permanece constante que o círculo é a forma que maximiza a área, minimizando o comprimento da curva. Aqui vamos utilizá-lo no plano hiperbólico. A principal vantagem que esta desigualdade trás à nossa análise é que graças à propriedade minimizante do comprimento em relação à área, da circunferência, as desigualdades que no resto desta secção e da próxima forem obtidas, podem ser provadas para curvas cuja projecção no plano hiperbólico sejam circunferências mas aplicarem-se a qualquer curva.

Suponha-se assim agora que α é um círculo hiperbólico. Nesse caso tem-se que:

$$l = 2\pi \sinh r \tag{26}$$

$$|A| = 2\pi(\cosh r - 1) \tag{27}$$

Note-se agora que juntando o lema 8 a (26) e (27) vem que $l < \sqrt{2}A \Leftrightarrow \sinh r < \sqrt{2}(\cosh r - 1)$. Recordo que na demonstração do teorema 5 vimos que para isto ocorrer tem que se ter $r > \operatorname{arccosh} 3$. Concluimos assim o resultado resumido no seguinte teorema:

Teorema 10 *Se α é uma curva cuja projecção no plano hiperbólico é uma circunferência com $\Delta t \leq 0$, aquando do regresso ao ponto de partida, então tem que se ter que $r > \operatorname{arccosh} 3$.*

Não conseguimos uma condição suficiente, apenas uma condição necessária, no entanto destaco que em termos da curva a condição do teorema 10 é suficiente para viajar para trás no tempo. O que acontece é que a velocidade com que se percorre a curva não pode ser demasiado baixa, pois nesse caso o atraso temporal provocado pela viajem não compensa o tempo que se levou a fazer a viagem e acabamos por chegar depois de partir. Assim a condição que falta é uma condição de velocidade. Não farei esse cálculo explícito, no entanto para velocidades próximas da velocidade da luz é de facto possível fazer a viagem no tempo desejada.

3.2 O caminho pela frente

Agora que já sabemos que é possível fazer viagens no tempo no universo de Gödel, há muitas perguntas que podem surgir: Será que é necessário percorrer uma grande distância? Podemos fazer a viagem devagar ou é necessário atingir uma velocidade elevada para as nossas possibilidades? Será que viajar no tempo é tão simples como deixarmo-nos ir em queda livre? Ou será que temos de gastar bastante combustível? É no sentido de responder a questões desta natureza, completamente necessárias para construir uma máquina do tempo no universo de Gödel que nesta secção são compilados uma série de teoremas.

Vamos primeiro ver que existe um comprimento mínimo que o nosso caminho tem de exceder.

Teorema 11 *Se α é uma curva cuja projecção no plano hiperbólico tem comprimento l tem que se ter:* $l > 4\pi\sqrt{2}$

Prova: Note-se para começar que graças à desigualdade isoperimétrica basta provar este resultado para uma curva cuja projecção no plano hiperbólico seja uma circunferência de comprimento l. Da discussão na secção anterior que precede o teorema 10, sabemos que $r > \operatorname{arccosh} 3$. Assim por (26) $l > 2\pi \sinh(\operatorname{arccosh} 3) = 4\pi\sqrt{2}$. ■

Vamos agora ver qual é a velocidade máxima que pelo menos temos de atingir nalgum ponto da viagem.

Teorema 12 *Se α é uma curva cuja projecção no plano hiperbólico tem comprimento l, para que $\Delta t < 0$ a velocidade máxima v_{max} com que se percorre α tem de satisfazer* $v_{max} > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Prova: Mais uma vez graças à desigualdade isoperimétrica basta provar este resultado para uma curva cuja projecção no plano hiperbólico seja uma circunferência de comprimento l. $\sqrt{2}A + \frac{l}{v_{max}} \leq \sqrt{2}A + \oint_\alpha \frac{dl}{v} \leq 0 \Rightarrow v_{max} \geq \frac{l}{\sqrt{2}|A|} \geq \frac{\sinh r}{\sqrt{2}(\cosh r - 1)} > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pois para $r > 0$ $\frac{\sinh r}{\sqrt{2}(\cosh r - 1)}$ é decrescente e o seu limite é $\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

Concluímos assim que para viajar no tempo no universo de Godël já necessitamos de uma nave com capacidade de atingir velocidades consideravelmente elevadas. Tem de conseguir atingir pelo menos aproximadamente 71% da velocidade da luz.

Se suposermos que percorremos uma curva com uma velocidade constante v, e se soubermos a àrea orientada que a sua projecção no plano hiperbólico delimita, podemos até saber, graças ao lema 7 que $\Delta t = \sqrt{2}A + \oint_\alpha \frac{dl}{v}$, e portanto $v = \frac{l}{\Delta t - \sqrt{2}A}$, onde Δt é a diferença entre o instante de partida e chegada. Isto permite-nos calcular uma velocidade precisa para percorrer a curva de forma a viajar um certo tempo para o passado.

Não sabemos ainda no entanto se tem de ter propulsão, ou se pode atingir esta velocidade em queda livre, caso em que apenas precisaria de ser feita de um material bastante resistente.

Considere-se agora a curva α é percorrida com velocidade $v = \tanh u$. Daqui e do facto de termos r constante, pois é uma circunferência hiperbólica, vem que o 4-vector velocidade da curva (suponha-se centrada em $r = 0$) vai ser:

$$U = \cosh u \ E_t - \sinh u E_\varphi \tag{28}$$

Note-se que o sinal negativo na componente de E_φ vem da curva ser percorrida no sentido horário. Segue-se agora o seguinte resultado:

Lema 13 *Nas condições da discussão anterior α é geodésica sse $v = \sqrt{2}\tanh r$.*

Prova:

$$\begin{aligned}
\nabla_U U &= \\
&= \cosh u \nabla_{E_t} U - \sinh u \nabla_{E_\varphi} U \\
&= \cosh u \ \omega^\alpha{}_t(U) E_\alpha - \sinh u \ \omega^\alpha{}_\varphi(U) E_\alpha \\
&= \cosh u (\omega^\varphi{}_t(U) E_\varphi + \omega^r{}_t(U) E_r) - \sinh u (\omega^t{}_\varphi(U) E_t + \omega^r{}_\varphi(U) E_r) \\
&= (\cosh u (-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\sinh u) - \sinh u (-\frac{\sqrt{2}}{2} \cosh u + \text{cotanh } r \sinh u) E_r \\
&= \sinh u (\sqrt{2} \cosh u - \sinh u \ \text{cotanh } r) E_r
\end{aligned}$$

Assim temos $\nabla_U U = 0$ sse:

$\sqrt{2}\text{cotanh } u = \text{cotanh } r \Rightarrow \tanh u = \sqrt{2}\tanh r \Rightarrow v = \sqrt{2}\tanh r.$ ■

Este lema permite-nos concluir que:

Teorema 14 *Nenhuma geodésica de tipo tempo com* $\Delta t \leq 0$ *pode ter projecção fechada no plano hiperbólico.*

Prova: Como o universo de Gödel é homogéneo tem-se que todas as geodésicas de tipo tempo são curvas como a curva α até agora considerada com a condição do lema 13: $v = \sqrt{2}\tanh r$. Note-se que pela restrição de não se poder exceder a velocidade da luz se tem também que $v < 1$. Assim $\tanh r < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow r < \operatorname{arctanh}\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arccosh}\sqrt{2}$. Mas como a projecção é fechada e queremos que $\Delta t \leq 0$ viu-se na discussão que precede o teorema 10 que se tem de ter $r > \operatorname{arccosh} 3$. Isto é uma contradição. Conclui-se que curvas deste tipo não podem ser geodésicas. ■

Concluímos assim que de facto é impossível viajar no tempo em queda livre no universo de Gödel. Precisamos assim de uma nave com capacidade de aceleração, o que implica gasto de combustível. Optimizar este gasto ainda hoje é um problema em aberto, que aliás motivou o paper [3] no qual se baseia este trabalho.

3.3 Causalidade

Termino com uma questão de natureza mais filosófica: Vimos que é possível viajar para o passado, mas como é que isto afectaria a causalidade? Será possível viajar para o passado distante e modificar algo importante, que levasse a nunca ter nascido em primeiro lugar? E se não tivesse nascido como é que podia ter voltado ao passado para o alterar? Uma forma de evitar este paradoxo é assumir que uma viagem ao passado causa uma ramificação do universo em dois, um no qual o nosso crononauta nasceu e viveu a sua vida até ter decidido viajar no tempo, e outro no qual um sujeito misterioso impediu o seu nascimento. Outra possibilidade é haver algo que impeça que sejam tomadas acções no passado que posteriormente criem paradoxos lógicos. Pessoalmente não gosto muito desta hipótese, já que existe uma grande complexidade nas interacções da natureza. Sabemos que sistemas extremamente simples a agir apenas de acordo com leis Newtonianas podem ter comportamentos caóticos. Custa a crer que interacções de um universo inteiro não levem eventualmente a consequências paradoxais. Outra solução ainda é imaginar que qualquer acção que se tente tomar no passado vai levar a um loop causal, isto é uma acção que é causa e consequência de si própria. Vou exemplificar isto com o mito de Édipo ligeiramente modificado. Segundo o mito, o rei de Tebas foi avisado por uma profecia do oráculo de que seria assassinado pelo próprio filho. Para que isto não ocorresse, ele decidiu mandar matar o filho. O homem encarregue de tal acção abandonou-o num monte com um prego espetado em cada pé de forma a tentar matá-lo. No entanto, ele foi encontrado por uma família que o salvou e o tratou como seu próprio filho, e que o baptizaram de Édipo. Após alguns anos, Édipo foi avisado da mesma profecia que tinha sido contada ao seu pai biológico, e decidiu fugir de casa, já que pensava que a profecia se referia aos seus pais adoptivos. Pelo caminho encontrou um homem com o qual lutou e matou. Esse homem era o antigo rei de Tebas, o seu pai biológico. É neste ponto que, à distância, está a assistir o nosso crononauta, que, horrorizado com o que presenciara, decidiu voltar atrás no tempo e fazer-se passar por óraculo para avisar o rei de Tebas do que sucederia. O nosso crononauta criou efectivamente um loop causal, já que a sua profecia é causa e consequência de si mesma. Destaco que este tipo de narrativas são algo que neste momento não passam de ficção. É ainda uma questão em aberto se a causalidade pode permanecer não violada, apesar das viagens ao passado no universo de Gödel.

Referências

[1] Leonor Godinho, José Natário *An Introduction to Riemannian Geometry*, 2010

[2] Robert J. A. Lambourne *Relativity, Gravitation and Cosmology*, Cambridge University Press, 2010

[3] http://arxiv.org/pdf/1105.6197v2.pdf

[4] http://iopscience.iop.org/1367-2630/15/1/013063/article

[5] http://preposterousuniverse.com/grnotes/grtinypdf.pdf

[6] http://www.math.ist.utl.pt/ jnatar/alunos/Patricia.pdf

[7] http://mekurt.blogspot.pt/2011/03/how-godel-broke-taboo-of-time-travel.html

[8] http://publish.uwo.ca/ jbell/Time.pdf