

Teoremas de Singularidade de Hawking-Penrose

Filipe Alexandre Nazaré Pereira dos Santos

Projeto Integrador de 1º ciclo em

Engenharia Física Tecnológica

Orientadores: Prof. José Natário
Prof. Richard Brito

Junho de 2024

Resumo

Os Teoremas da Singularidade são um conjunto grande de resultados, a maioria deles apresentados por Stephen Hawking e Roger Penrose na década de 60, com implicações profundas e subtis acerca do espaço-tempo e do nosso próprio Universo. O objetivo deste projeto é compreender os dois principais Teoremas de Singularidade, que valeram a Roger Penrose o Prémio Nobel da Física de 2020. Em primeiro lugar, o Teorema de Hawking, que prova a incompletude geodésica de espaços-tempo globalmente hiperbólicos que satisfaçam a Condição de Energia Forte. Em segundo lugar, o Teorema de Penrose, que demonstra a singularidade de qualquer espaço-tempo conexo globalmente hipérbolico que satisfaça a Condição de Energia Nula e contenha uma superfície aprisionada. Para concretizar estes conceitos, serão também fornecidos exemplos de casos em que as conclusões dos Teoremas se aplicam, e de casos em que falham, devido à falta de uma ou mais condições.

Introdução Teórica

Generalidades sobre Relatividade

A Teoria da Relatividade Geral é um dos maiores triunfos da Física do Século XX, e até aos dias de hoje tem passado todos os testes experimentais que lhe são colocados. Seria possível estender este projeto para um estudo mais detalhado desta Teoria, mas, tendo outros propósitos, apresentaremos apenas os conceitos necessários para poder esboçar as demonstrações nas seguintes secções.

Para poder manter a introdução sucinta, serão assumidos conhecimentos base em Geometria Riemanniana, que podem ser consultados em (GN). Assim sendo, podemos começar por definir espaço-tempo: um espaço-tempo (M, g) é uma 4-variedade Lorentziana, isto é, uma variedade diferenciável 4-dimensional M dotada de uma pseudo-métrica (simétrica e não-degenerada) g com assinatura 2 (ou seja, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ num referencial ortonormado apropriado).

Com a conexão de Levi-Civita ao nosso dispor (já que a sua existência não depende da positividade da métrica, mas apenas da sua não-degenerescência), podemos calcular as geodésicas de um dado espaço-tempo, através da fórmula

$$\ddot{c}^i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{jk}^i \dot{c}^j \dot{c}^k = 0,$$

onde Γ_{jk}^i representam os símbolos de Christoffel para a conexão de Levi-Civita. Einstein associa às geodésicas as linhas de mundo de partículas em queda livre, isto é, partículas às quais não é impressa qualquer força. Repare-se que, sendo o espaço-tempo uma variedade genérica, e não forçosamente plana, as geodésicas não serão necessariamente linhas retas, nem o serão em geral as trajetórias de partículas em queda livre.

Há uma distinção importante a fazer entre tipos de linhas de mundo na Relatividade. Não sendo uma variedade Riemanniana, as curvas no espaço-tempo podem ser divididas em 3 subcategorias. Uma curva c é:

1. do tipo tempo, se $g(\dot{c}, \dot{c}) < 0$;
2. do tipo espaço, se $g(\dot{c}, \dot{c}) > 0$;
3. nula, se $g(\dot{c}, \dot{c}) = 0$.

Note-se que geodésicas do tipo tempo correspondem às linhas de mundo de partículas livres com massa, enquanto geodésicas nulas correspondem às linhas de mundo de raios de luz.

Einstein esclarece como é que a distribuição de massa e energia pelo espaço-tempo influencia a sua curvatura (e vice-versa) através das Equações de Campo de Einstein que, em unidades normalizadas, são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}.$$

Do lado direito, o tensor energia-momento define a distribuição de energia e matéria pelo espaço-tempo; do lado esquerdo, uma combinação do tensor de Ricci, do escalar de curvatura e da própria métrica definem a sua curvatura. É esta interligação entre massa e curvatura que está no centro da Teoria da Relatividade Geral.

Einstein apresenta as suas equações de campo à Academia de Ciências da Prússia, em novembro de 1915, afirmando que o sistema de equações é tão complicado que dificilmente alguma vez alguém o conseguirá resolver de forma exata. Naturalmente, ainda em 1915, Karl Schwarzschild encontra uma solução para a massa pontual, e publica-a em janeiro de 1916. A métrica encontrada por Schwarzschild é:

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi).$$

Os pontos de interesse para esta solução são, naturalmente, $r = 0$ e $r = 2m$. À superfície definida por $r = 2m$ chamamos o horizonte de eventos. Embora pareça que sim, não existe qualquer singularidade no horizonte de eventos: é apenas um artefacto das coordenadas escolhidas. Em coordenadas apropriadas (por exemplo, Eddington-Finkelstein), esta aparente singularidade desaparece; no entanto, os problemas em $r = 0$ permanecem. É o primeiro exemplo de uma singularidade na curvatura do espaço-tempo.

Muitos argumentaram, à época, que a existência da singularidade era garantida apenas pela grande simetria na solução de Schwarzschild, e que sistemas físicos reais nunca teriam esse grau de simetria. É neste contexto que surgem os Teoremas da Singularidade de Hawking-Penrose, que provam a existência de singularidades em qualquer espaço-tempo que satisfaça um dado número de condições físicas plausíveis.

Causalidade

Para um espaço-tempo como o de Minkowski, é fácil verificar que os conceitos básicos de causalidade se aplicam; no entanto, estes conceitos são difíceis de transportar para a Teoria da Relatividade Geral, devido à introdução de curvatura não-nula, que pode levar a que, por exemplo, curvas do tipo tempo sejam curvas fechadas, o que é indesejável, já que corresponderia a uma espécie de *loop temporal*. É necessário definir condições sobre um espaço-tempo para garantir a sua estabilidade causal. Note-se que estas condições são puramente físicas: não há nada que impeça uma 4-variedade Lorentziana de as desobedecer. Contudo, é necessário impô-las para que a variedade possa verdadeiramente representar um espaço-tempo com plausibilidade física.

Para começar, é preciso definir uma orientação temporal: um espaço-tempo (M, g) diz-se temporalmente orientável se existir um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $g(X, X) < 0$. Um espaço-tempo diz-se temporalmente orientado se for temporalmente orientável, e, em cada espaço tangente $T_p M$, se associar ao vetor X_p uma das componentes conexas do cone de luz nesse ponto (chamando a essa direção o futuro, e à contrária o passado).

Com uma orientação temporal definida, podemos definir o futuro cronológico de um evento $p \in M$ como o conjunto $I^+(p)$ dos pontos que aos quais p pode ser ligado por uma curva do tipo tempo orientada para o futuro. Também é conveniente definir o futuro causal de p como o conjunto $J^+(p)$ dos pontos que aos quais p pode ser

ligado por uma curva c orientada para o futuro, em que \dot{c} pode ser do tipo tempo ou nulo.

Tendo estes conceitos como base, podemos definir as noções de causalidade que ambos os Teoremas de Singularidade estudados neste projeto vão requerir. Um espaço-tempo (M, g) diz-se estavelmente causal se existir uma função $T : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{grad}(T)$ seja um campo vetorial do tipo tempo (logo, um espaço-tempo estavelmente causal é automaticamente temporalmente orientável). Esta função chama-se uma função de tempo global. É possível provar que estabilidade causal é condição suficiente para os teoremas que queremos demonstrar (HP); no entanto, por este caminho ser notoriamente mais complicado, e por não oferecer uma grande vantagem do ponto de vista prático, vamos estabelecer uma condição ligeiramente mais forte, para a qual precisamos de mais um par de definições.

Dado um conjunto $S \subseteq M$, o domínio de dependência futuro de S é definido como o conjunto dos eventos $p \in M$ tais que qualquer curva causal inextensível na direção do passado interseja S . Este conjunto denota-se usualmente por $D^+(S)$, e o domínio de dependência passado $D^-(S)$ define-se de forma análoga. Se um espaço-tempo for estavelmente causal com função de tempo T , os conjuntos de nível $S_a = T^{-1}(a)$ dizem-se superfícies de Cauchy se $D^+(S_a) \cup D^-(S_a) \equiv D(S_a) = M, \forall a \in \mathbb{R}$. Na Figura 1 podemos ver um exemplo de um conjunto que não é Superfície de Cauchy, e dos seus domínios de dependência passado e futuro.

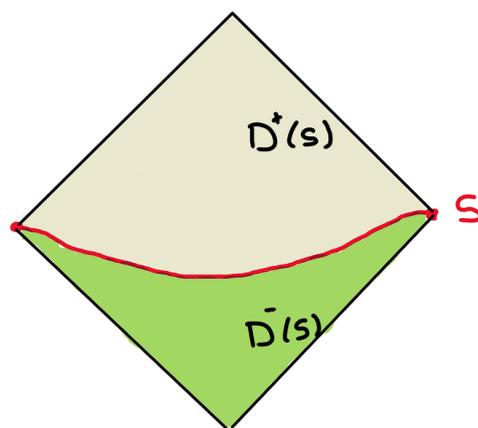


Figura 1: Domínios de dependência de um conjunto S

Estamos finalmente na posição de definir a condição que exigiremos ao nosso espaço-tempo para poder demonstrar os Teoremas de Singularidade: o espaço-tempo terá de ser estavelmente causal, e os conjuntos de nível da sua função de tempo devem ser superfícies de Cauchy. A um tal espaço-tempo chama-se Globalmente Hiperbólico, e é condição necessária para as demonstrações dos Teoremas que serão apresentadas. Como já foi dito, não é condição necessária para os Teoremas em si, podendo ser substituída por estabilidade causal; acontece que a condição tem um significado físico relevante: qualquer evento no espaço-tempo deve apenas poder ter uma relação causal com uma das superfícies de nível de T . Podemos pensar então nestas superfícies como "fatias de tempo constante", o que não faria sentido se falhasse a condição de Hiperbolicidade Global: existiria pelo menos um evento p que poderia não ter sido causado por nenhum evento nesta fatia. Olhemos novamente para o exemplo da Figura 1: S não é Superfície de Cauchy, pelo que existem pontos que não pertencem a $D(S)$, isto é, pontos que podem ser causados por algo que não está em S . Se S representar "todo o Universo num dado instante", é razoável assumir que isto não pode acontecer.

Feita esta introdução, temos neste momento as ferramentas básicas ao nosso dispor para enunciar e demonstrar os Teoremas, o que faremos nas próximas secções do projeto.

Teorema da Singularidade de Hawking

Enunciado e Prova

Para compreender o enunciado do Teorema de Hawking, precisamos apenas de mais alguns conceitos. Em primeiro lugar, um espaço-tempo (M, g) diz-se singular se for geodesicamente incompleto. O Teorema de Hawking determina condições sob as quais se pode concluir que um espaço-tempo é singular.

Queremos ter também a noção de ponto conjugado a uma superfície de Cauchy. Dado um espaço-tempo (M, g) Globalmente Hiperbólico, uma superfície de Cauchy S e um campo vetorial unitário n normal a S , define-se o mapa $\exp : U \rightarrow M$, com $U \subset \mathbb{R} \times S$, como $\exp(t, p) = c_p(t)$, em que $c_p(t)$ é a geodésica com condição inicial n_p . Os valores críticos do mapa exponencial dizem-se pontos conjugados a S .

Suponha-se que $q = \exp(t_0, p)$ seja um ponto não conjugado a S . Se (x_1, x_2, x_3) são coordenadas locais (em S) em torno de p , então (t, x_1, x_2, x_3) são coordenadas locais numa vizinhança V de q . É possível mostrar que, nestas coordenadas, a métrica pode ser escrita na forma

$$g = -dt \otimes dt + \gamma_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

com $\gamma_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$ a formar uma matriz positiva definida (por este motivo, chama-se a (t, x_1, x_2, x_3) um referencial sincronizado). Note-se que esta matriz está bem definida ao longo de $c_p(t)$, mesmo em pontos conjugados a S . Nestes pontos, como o conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$ passa a ser linearmente dependente, a matriz γ_{ij} passa a ser singular, e $\gamma(t) := \det(\gamma_{ij}(t)) = 0$ nestes pontos.

Uma quantidade que aparece naturalmente na determinação do Tensor de Ricci para esta métrica é $\theta := \frac{1}{2} \gamma^{ij} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \equiv \gamma^{ij} \beta_{ij}$, a expansão para os observadores sincronizados. É possível mostrar que $\theta = \frac{\partial}{\partial t} \log(\sqrt{\gamma})$, significando que uma singularidade da expansão equivale a um 0 na quantidade $\gamma(t)$, o que por sua vez indica um ponto conjugado a S .

Resta apenas mais uma definição: um espaço-tempo (M, g) diz satisfazer a Condição de Energia Forte se $Ric(V, V) \geq 0$, $V \in \mathfrak{X}(M)$ do tipo tempo. A partir das equações de campo de Einstein é possível mostrar que isto é equivalente a ter $\tilde{T}(V, V) \geq 0$ (onde $\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} g_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento reduzido). Esta condição é razoável: podemos pensar nela como um requisito que a densidade de energia no nosso universo seja positiva. Finalmente, estamos prontos para enunciar o Teorema:

Teorema de Hawking: seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico que satisfaça a Condição de Energia Forte, e suponha-se que a expansão satisfaz $\theta \leq \theta_0 < 0$ numa superfície de Cauchy S . Então, (M, g) é singular (Haw).

Demonstração: devido a restrições de espaço, será oferecido aqui apenas um esboço da prova. A parte mais técnica da demonstração prende-se com demonstrar o seguinte lema:

Seja (M, g) um espaço-tempo globalmente hiperbólico com Superfície de Cauchy S , e $p \in D^+(S)$. Então, de entre todas as curvas do tipo tempo que ligam S a p , existe uma com comprimento máximo. Essa curva é uma geodésica ortogonal a S .

A demonstração deste lema é consideravelmente longa, pelo que não será feita neste trabalho. Em resumo, tem a ver com o facto de o comprimento $\tau(c) = \int_0^{t(p)} |\dot{c}(t)| dt$ ser uma função semicontínua superior no espaço das curvas do tipo tempo (Nab).

Supondo que este lema se verifica, demonstramos que nenhuma geodésica do tipo tempo ortogonal a S pode ser estendida até um tempo próprio superior a $\tau_0 = -\frac{3}{\theta_0}$. Suponhamos que existe tal geodésica c , parametrizada

num intervalo $[0, \tau_0 + \epsilon]$, para $\epsilon > 0$, e seja $p = c(\tau_0 + \epsilon)$. De acordo com o Lema anterior, deve existir uma geodésica γ do tipo tempo ortogonal a S que ligue esta superfície a p , e com comprimento máximo; como $\tau(c) = \tau_0 + \epsilon$, então $\tau(\gamma) \geq \tau_0 + \epsilon$. Aplicamos agora a Condição de Energia Forte:

$$R_{00} \equiv Ric\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \geq 0 \implies \frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma^{jk} \gamma^{il} \beta_{ki} \beta_{lj} \leq 0,$$

onde i, j, k, l tomam valores entre 1 e 3. Escolhemos uma base ortonormada, e utilizamos a desigualdade $(tr A)^2 \leq n \cdot tr(A^t A)$ para chegar a:

$$\gamma^{jk} \gamma^{il} \beta_{ki} \beta_{lj} = \beta_{ji} \beta_{ij} = tr((\beta_{ij})(\beta_{ij})^t) \geq \frac{1}{3} (tr \beta_{ij})^2 = \frac{1}{3} \theta^2 \implies \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{3} \theta^2 \leq 0.$$

Integrando agora esta desigualdade em t obtemos

$$\frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{t}{3},$$

donde concluímos que θ deve ir para infinito antes de t chegar ao valor $-\frac{3}{\theta_0}$, o que indica a existência de um ponto conjugado a S na curva γ , no máximo a uma distância τ_0 de S . Agora, simplesmente argumentamos por contradição: chamemos q ao ponto conjugado a S ao longo de γ ; então deve existir uma curva $\tilde{\gamma}$, ortogonal a S , que tenha o mesmo comprimento τ_0 e que aproximadamente interseja c no ponto q . Agora, podemos considerar V , uma vizinhança geodesicamente convexa de q , e notar que se $r \in V$ pertencer a $\tilde{\gamma}$, e $s \in V$ pertencer a γ , então deve existir uma geodésica que ligue r a s (esquematizado na Figura 1). A curva seccionalmente suave obtida através de seguir $\tilde{\gamma}$ de S até r , depois esta nova geodésica de r a s , e depois seguir γ desde s até p , deve ter comprimento superior a γ . Para ver que isto é verdade, pense no Paradoxo dos Gémeos (de uma forma mais generalizada) e identifique a geodésica entre r e s como o gémeo estacionário, e a curva quebrada formada por $\tilde{\gamma}$ e γ como o gémeo que faz a viagem. Mas então γ não é maximizante após o ponto conjugado q . Então tem que existir uma outra curva maximizante entre S e p ; mas essa curva terá que ter comprimento superior ao de γ , e portanto ela própria tem que ter passado por um ponto conjugado, pelo que não pode ser maximizante! Esta contradição significa que a geodésica γ não pode ser estendida após o ponto q , pelo que (M, g) não é geodesicamente completo: é singular. \square

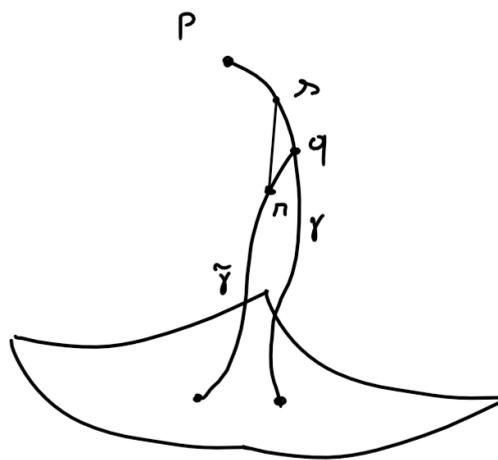


Figura 2: Esquema do argumento do Teorema de Hawking

Exemplos

Para tornar o resultado do Teorema de Hawking mais claro, concretizamo-lo agora com um exemplo em que ele é aplicado para concluir incompletude geodésica, e outro exemplo onde não é possível aplicá-lo, para compreender a melhor a sua dependência nas condições. Para representar os espaços-tempo, vamos utilizar diagramas de Carter-Penrose: estes diagramas são úteis para representar espaços-tempo com simetria esférica, já que conseguem "compactificar" a variedade e ainda assim preservar as relações de causalidade. Pensamos em cada ponto do diagrama como uma esfera de raio r no instante t . As linhas de r constante estão representadas a tracejado, para ajudar a compreender melhor o diagrama.

Em primeiro lugar, apresentamos o espaço-tempo de Milne, um modelo cosmológico Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) em que exigimos que a constante cosmológica, a densidade de energia e a pressão sejam todas nulas, e a curvatura espacial seja negativa. A partir destas suposições, é fácil chegar à conclusão que a métrica é dada por

$$g = -dt \otimes dt + t^2(dx \otimes dx + \sinh^2 \chi(d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi)).$$

Através de uma mudança de coordenadas, é possível identificar este espaço-tempo com o interior de uma componente conexa de um cone de luz no espaço-tempo de Minkowski.

Na Figura 3 encontra-se o diagrama de Penrose para o espaço-tempo de Milne. Note-se que geodésicas com início em qualquer uma das componentes conexas do cone de luz (região sombreada) abandonam esta componente (repare nas linhas a tracejado). Isto indica que cada componente conexa do cone de luz - que corresponde a um espaço-tempo de Milne - é geodesicamente incompleta, exemplificando o funcionamento do Teorema de Hawking. Repare-se que em lado algum referimos a existência de uma singularidade: neste caso, não existe mesmo qualquer singularidade! Lembre-se que o Teorema de Hawking se refere à incompletude geodésica, que é por sua vez associada normalmente à existência de uma singularidade. A partir deste exemplo, vemos que tal não tem de ser o caso, mesmo num modelo FLRW.

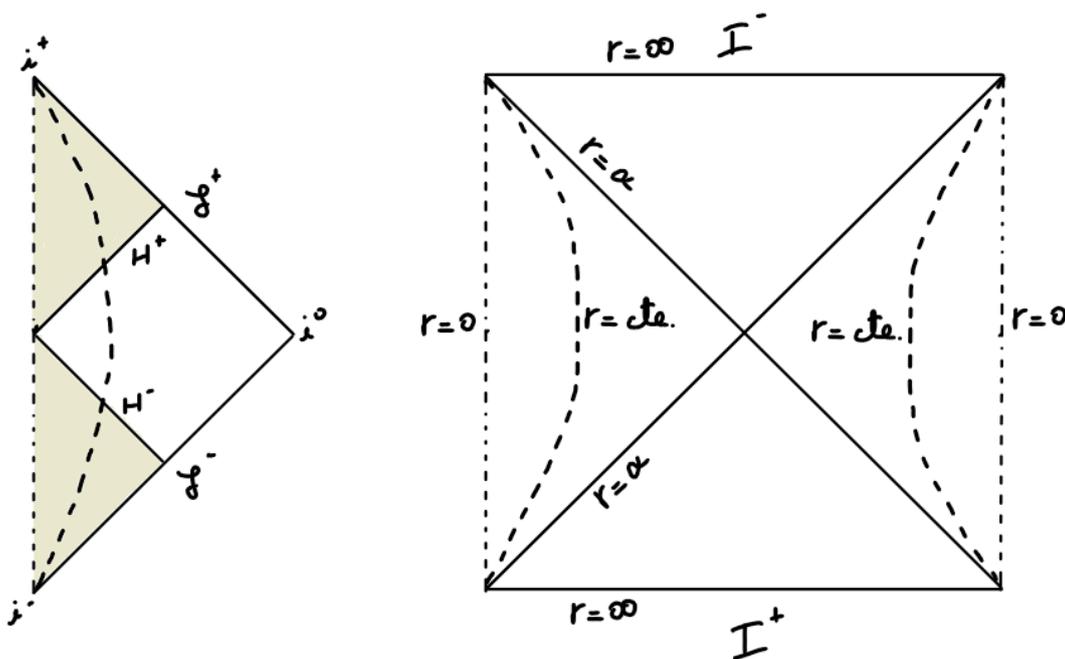


Figura 3: Diagramas de Penrose para o espaço-tempo de Milne (à esquerda) e de de Sitter (à direita)

Em segundo lugar, apresentamos o espaço-tempo de de Sitter. Neste exemplo, pensamos no espaço-tempo como uma 4-variedade imersa em \mathbb{R}^5 dotado da métrica de Minkowski. O espaço-tempo de de Sitter é obtido através da equação de um hiperbolóide de uma folha:

$$-t^2 + \sum_{i=1}^4 x_i^2 = \alpha^2$$

para $\alpha \neq 0$. A métrica de de Sitter é a induzida no hiperbolóide pela métrica de Minkowski em \mathbb{R}^5 , e é dada, usando coordenadas angulares (ψ, θ, ϕ) na esfera S^3 , por:

$$g = -dt \otimes dt + \cosh^2(t/\alpha) \left(d\psi \otimes d\psi + \sin^2 \psi (d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi) \right),$$

sendo que o seu diagrama de Penrose se encontra acima (Figura 3). A partir deste é fácil ver que este espaço-tempo é geodesicamente completo. O que está a falhar? Se calcularmos o tensor de Ricci para o espaço de de Sitter, verificamos que é dado por $Ric = \frac{3}{\alpha^2}g$. Mas então, se V for um vetor do tipo tempo, $Ric(V, V) = \frac{3}{\alpha^2}g(V, V) < 0$, por definição, violando assim a Condição de Energia Forte, pelo que não estamos nas condições de aplicar o Teorema de Hawking.

Teorema da Singularidade de Penrose

Enunciado e Prova

Também neste caso vamos precisar de mais algumas definições para compreender o enunciado do Teorema. Felizmente, a maior parte das definições são análogas, à exceção da noção de superfície aprisionada.

Seja (M, g) um espaço-tempo, S uma superfície de Cauchy com campo vetorial normal unitário n e $\Sigma \subset S$ uma superfície bidimensional compacta com campo vetorial normal unitário ν em S . Se c_p for a geodésica com condição inicial $n_p + \nu_p, p \in \Sigma$, definimos o mapa exponencial $\exp : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma, \exp(r, p) = c_p(r)$, cujos valores críticos se chamam pontos conjugados a Σ . Se já tivermos uma parametrização ϕ de Σ em torno de p , o mapa exponencial ajuda-nos também a definir coordenadas locais (u, r, x_2, x_3) em torno de um qualquer ponto $q = \exp(r_0, p)$, através do mapa $(u, r, x_2, x_3) \rightarrow (r, \psi_u(\phi(x_2, x_3)))$, onde ψ_u é o fluxo ao longo de geodésicas do tipo tempo ortogonais a S . É fácil verificar que a métrica g , neste sistema de coordenadas, toma a forma:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \beta_2 & \beta_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \beta_3 & 0 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}, \quad \text{e que} \quad \det \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \beta_2 & \beta_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \beta_3 & 0 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} \equiv -\gamma,$$

pelo que as funções γ_{ij} formam uma matriz positiva definida, induzindo assim uma métrica Riemanniana nas superfícies $\exp(r, \psi_u(\Sigma))$. Também é claro que os pontos onde $\gamma = 0$ devem ser os pontos conjugados a Σ , analogamente ao que vimos para o Teorema de Hawking.

Também de forma análoga ao que foi feito anteriormente, podemos concluir que temos a componente do tensor de Ricci $R_{rr} = -\frac{\partial \theta}{\partial r} - \gamma^{jk} \gamma^{il} \beta_{ki} \beta_{lj}$, onde $\theta = \gamma^{ij} \beta_{ij}$ é a expansão das geodésicas nulas e, neste caso, os índices só tomam valores entre 2 e 3.

A subvariedade Σ com que estamos a trabalhar diz-se uma superfície aprisionada se ambas as expansões θ^+ e θ^- , das geodésicas nulas com condições iniciais $n_p + \nu_p$ e $n_p - \nu_p$, respetivamente, forem negativas $\forall p \in \Sigma$.

Falta-nos apenas uma condição de energia, tal como no Teorema de Hawking: neste caso, é suficiente a Condição de Energia Nula, isto é, $Ric(V, V) \geq 0$, para qualquer vetor nulo V . Podemos finalmente enunciar o Teorema de Penrose:

Teorema de Penrose: seja (M, g) um espaço-tempo conexo, globalmente hiperbólico, que satisfaça a Condição de Energia Nula, com uma superfície de Cauchy S não compacta. Se S contiver uma superfície aprisionada Σ , então (M, g) é singular (Pen).

Demonstração: novamente, apenas um esboço da demonstração será oferecido.

A aplicação da Condição de Energia é bastante semelhante ao que foi feito para o Teorema de Hawking, pelo que não vale a pena repetir o argumento. Neste caso, o resultado a que esta condição nos permite chegar é que, se $p \in \Sigma$ for um ponto na superfície aprisionada com expansão $\theta_0 < 0$, então a geodésica nula c_p contém pelo menos um ponto conjugado a Σ , no máximo a uma distância de $r_0 = -\frac{2}{\theta_0}$ de Σ .

Seja T uma função de tempo global tal que $S = T^{-1}(0)$. Então, as curvas integrais de $grad T$ devem ser do tipo tempo, e por isso só podem intersestar S exatamente uma vez, e $\partial I^+(\Sigma)$ no máximo uma vez (em que se entende que $I^+(\Sigma) = \cup_{p \in \Sigma} I^+(p)$). Esta interseção define um mapa injetivo $\pi : \partial I^+(\Sigma) \rightarrow S$, cuja imagem é um aberto.

Dado que Σ é uma superfície aprisionada compacta, deve existir um $\theta_0 < 0$ tal que as expansões θ^+ e θ^- das geodésicas nulas ortogonais a Σ sejam menores que θ_0 . Da condição de energia, sabemos que qualquer geodésica nula ortogonal a Σ deve ter um ponto conjugado s a uma distância de, no máximo, r_0 de Σ . Mas, a partir deste ponto, a geodésica terá de passar a fazer parte de $I^+(\Sigma)$: sabemos que, como s é conjugado a Σ , existe uma outra geodésica nula γ que intersesta a geodésica c_p (aproximadamente) em s . Se q for um ponto posterior a s em c_p , a curva obtida seguindo γ entre p e s e seguindo c_p entre s e q é causal, mas não é uma geodésica nula, pelo que concluímos que $q \in I^+(\Sigma)$ (o argumento está esquematizado na Figura 4).

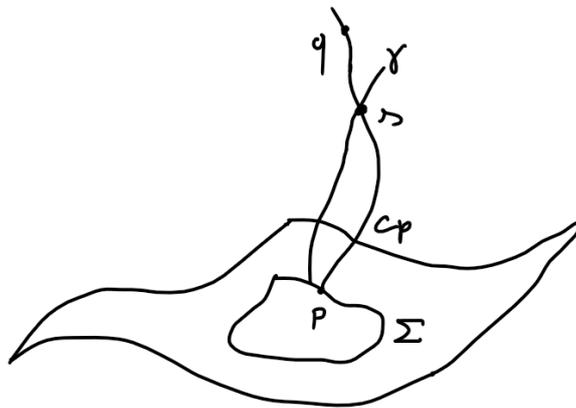


Figura 4: Esquema do Argumento do Teorema de Penrose

Como consequência disto, concluímos que $\partial I^+(\Sigma)$ deve ser um subconjunto fechado do conjunto compacto:

$$\exp^+([0, r_0] \times \Sigma) \cup \exp^-([0, r_0] \times \Sigma)$$

Logo, $\partial I^+(\Sigma)$ é compacto, pelo que a imagem deste conjunto por π deve ser compacta, logo fechada. Mas como S é conexa, esta imagem é a superfície de Cauchy S , que é não compacta por suposição: contradição! A contradição vem do facto de termos assumido que é possível estender a geodésica c_p para lá de s : concluímos que tal não é possível, logo, (M, g) é singular. \square

Exemplos

Por fim, concretizamos também o resultado do Teorema de Penrose com 2 exemplos: um caso em que este nos permite determinar incompletude geodésica do espaço-tempo, e outro em que não permite.

Para um exemplo em que encontramos incompletude geodésica (e, neste caso, uma singularidade de facto), usamos o espaço-tempo de Reissner-Nordström. Esta solução das equações de campo de Einstein corresponde, fisicamente, a um buraco negro esfericamente simétrico, com massa M e carga Q . A métrica é dada por:

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt \otimes dt + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi).$$

É interessante notar que, neste caso, existem 3 valores de interesse para r (ao contrário de Schwarzschild, onde existiam 2): $r = 0$ & $r = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$. Os dois últimos valores de r só têm sentido físico quando $M \geq |Q|$. Caso contrário, em $r = 0$ teríamos uma singularidade sem horizonte de eventos: uma Singularidade Nua. Este caso é considerado não-físico e é banido pela Conjetura da Censura Cósmica, pelo que vamos considerar $M > |Q|$ durante o resto do exemplo.

Neste caso, teremos dois horizontes de eventos distintos, e o diagrama de Penrose é dado pela Figura 5. Neste caso, assinalámos as superfícies aprisionadas a vermelho (cada ponto na região a vermelho corresponde a uma esfera aprisionada). Um leitor atento chamaria a atenção para o facto de não aparentar existir, na realidade, incompletude geodésica para este diagrama. De facto, o Teorema de Penrose só declara incompletude geodésica dentro da região de hiperbolicidade global: neste caso, podemos considerar a região (a sombreado) do Universo, do Universo Paralelo, do Buraco Negro e do Buraco Branco. Tentando estender esta região, parece claro que o espaço-tempo deixa de ser globalmente hiperbólico. Dentro desta região, o espaço-tempo é, de facto, geodesicamente incompleto! As geodésicas poderiam ser continuadas para os "buracos de minhoca" que se encontram acima e abaixo do "diamante" a sombreado, mas como o Teorema de Penrose não declara nada sobre esta região (por falhar a condição de causalidade), o resultado está dentro do esperado.

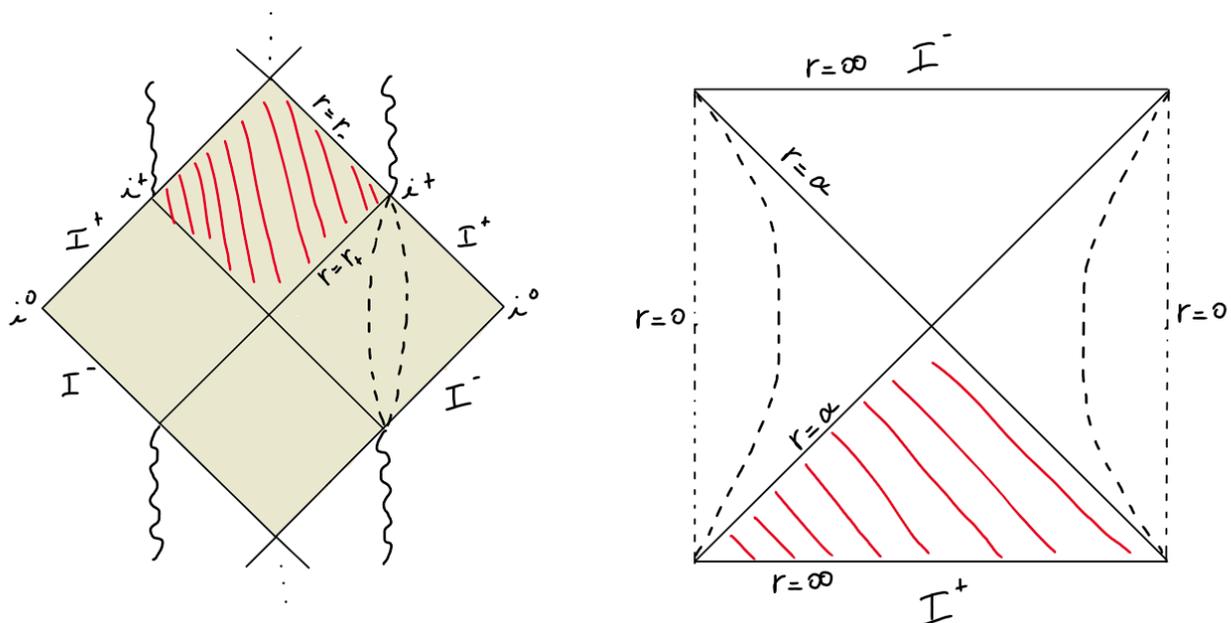


Figura 5: Diagramas de Penrose para o espaço-tempo de Reissner-Nordstrom (à esquerda) e de Sitter (à direita)

Para finalizar, retornamos ao espaço-tempo de de Sitter. Lembremos que, para este espaço-tempo, $Ric = \frac{3}{\alpha^2}g$,

e, como no Teorema de Penrose só exigimos que $Ric(V, V) \geq 0$ para V nulo, esta condição é trivialmente satisfeita. Contudo, este espaço-tempo é geodesicamente completo. O que está a falhar, neste caso?

A condição que falha, no caso do Teorema de Penrose, é muito mais subtil. Na realidade, acontece que as superfícies de Cauchy do espaço-tempo de de Sitter são compactas. É fácil ver isso: se a função de tempo global for a própria coordenada t , os seus conjuntos de nível são hipersferas, homeomorfas a S^3 , e portanto são conjuntos compactos. Isto viola uma condição fundamental do Teorema de Penrose, a não-compactidade das superfícies de Cauchy, pelo que se conclui que o Teorema não é aplicável ao espaço-tempo de de Sitter.

Conclusões

Com este projeto, foi possível oferecer, de forma razoavelmente compacta e acessível, uma demonstração de dois dos Teoremas mais importantes da Relatividade Geral, e de toda a Física na 2ª metade do século XX, de tal forma que foi devido a eles que Roger Penrose, em 2020, foi galardoado com o Prémio Nobel da Física "por mostrar que a formação de buracos negros é uma previsão robusta da Teoria da Relatividade Geral". Além disso, acrescentam-se alguns exemplos de aplicação dos Teoremas, para desenvolver uma melhor intuição do seu regime de aplicabilidade e das suas limitações. Ao longo deste projeto, tive a oportunidade de aprender acerca de Geometria Riemanniana e de aprofundar conhecimentos em Relatividade Geral, uma tarefa árdua para um aluno ainda no final de licenciatura. No futuro, gostava de aprofundar ainda mais o meu conhecimento sobre esta Teoria, e de estudar Buracos Negros e Ondas Gravitacionais com maior detalhe, bem como a interação entre a Relatividade e a Teoria Quântica dos Campos, e possivelmente desenvolver investigação em Teoremas de Singularidades.

Agradecimentos

Finalmente, queria agradecer aos meus orientadores: ao Professor Richard Brito e em especial ao Professor José Natário, pela sua mentoria e por toda a ajuda que me proporcionou ao longo do ano, tanto relativamente ao projeto como em outras decisões académicas. Queria também agradecer à minha família, por me apoiar ao longo deste projeto, criando as condições para eu poder trabalhar nele de forma descansada; e à Carolina Lopes, pelo grande apoio emocional que me forneceu, e que foi fulcral para levar o projeto a bom termo.

Bibliografia

- [GN] L. Godinho e J. Natário, *An Introduction to Riemannian Geometry*, **Springer** (2014).
- [Haw] S. Hawking, *The occurrence of singularities in cosmology*, Proc. Roy. Soc. Lon. A **294** (1966), 511–521.
- [HP] S. Hawking and R. Penrose, *The singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc. Roy. Soc. Lon. A **314** (1970), 529–548.
- [Nab] G. L. Naber, *Spacetime and Singularities: an Introduction*, **London Mathematical Society Student Texts** (1988).
- [Pen] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. **14** (1965), 57–59.