Relatividade Matemática

Ficha 8

A entregar até à aula de Sexta-feira dia 24 de Abril

1. Seja (M, g) a variedade Lorentziana globalmente hiperbólica correspondente à região exterior da solução de Schwarzschild, isto é, $M = \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{2m}(0)}\right)$ e

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

(onde $m > 0$).

   (a) Mostre que para qualquer $r_0 > 2m$ a curva

$$c(t) = \left(t, r_0, \frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{m}{{r_0}^3}}t\right)$$

   é uma geodésica, que é do tipo tempo, luz ou espaço consoante $r_0 > 3m$, $r_0 = 3m$ ou $r_0 < 3m$.

   (b) Justifique que o ponto $q = \left(\pi\sqrt{\frac{{r_0}^3}{m}}, r_0, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ é conjugado ao ponto $p = \left(0, r_0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ ao longo de c (não precisa de resolver a equação de Jacobi).

   (c) Mostre explicitamente que no caso em que $r_0 > 3m$ a geodésica c deixa de ser maximizante para $t > \pi\sqrt{\frac{{r_0}^3}{m}}$.

2. Explique porque é que o teorema de Hawking não se aplica aos seguintes espaço-tempos geodesicamente completos:

   (a) Espaço-tempo de Minkowski;

   (b) Universo de Einstein;

   (c) Universo de de Sitter;

   (d) Universo de anti-de Sitter.

3. Qual é maior comprimento possível para uma geodésica do tipo tempo maximizante no universo de anti-de Sitter? Justifique.