# Relatividade Matemática

## Ficha 8

*A entregar até à aula de Terça-feira dia 4 de Maio*

1. Use ideias similares às usadas na prova do Teorema de Hawking para demonstrar o seguinte teorema de geometria Riemanniana: se $(M,g)$ é uma variedade Riemanniana completa cujo tensor de Ricci satisfaz $Ric(X,X) \geq \varepsilon g(X,X)$ para algum $\varepsilon > 0$ então $M$ é compacta. Será possível provar um análogo do teorema e Hawking em geometria Riemanniana?

2. Explique porque é que o teorema de Hawking não se aplica aos seguintes espaço-tempos:

   (a) Espaço-tempo de Minkowski, i.e., $\mathbb{R}^4$ com a métrica
   $$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

   (b) Universo de Einstein, i.e.,$\mathbb{R} \times S^3$ com a métrica
   $$ds^2 = -dt^2 + d\psi^2 + \sin^2 \psi \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right)$$
   (em unidades tais que $\Lambda = 1$).

   (c) Universo de de Sitter, i.e., $\mathbb{R} \times S^3$ com a métrica
   $$ds^2 = -dt^2 + \cosh^2 t \left( d\psi^2 + \sin^2 \psi \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \right)$$
   (em unidades tais que $\Lambda = 3$).

   (d) Universo de anti-de Sitter, i.e., $\mathbb{R}^4$ com a métrica
   $$ds^2 = -\cosh^2 \psi \, dt^2 + d\psi^2 + \sinh^2 \psi \left( d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right)$$
   (em unidades tais que $\Lambda = -3$).

3. Para que valores de $T > 0$ não existe uma curva causal de comprimento máximo unindo os pontos $(0,0,0,0)$ e $(T,0,0,0)$ do universo de anti-de Sitter? Justifique.