Mecânica Geométrica

Ficha 6

A entregar até à aula de quarta-feira dia 30 de outubro

1. Recorde que os **ângulos de Euler** são as coordenadas locais (θ, φ, ψ) em $SO(3)$ correspondentes à parametrização $S :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[\to SO(3)$ dada por

$$S(\theta, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Mostre que se $I_1 = I_2$ então a energia cinética do corpo rígido nas coordenadas $(\theta, \varphi, \psi, v^\theta, v^\varphi, v^\psi)$ de $TSO(3)$ associadas aos ângulos de Euler é dada por

$$K = \frac{I_1}{2}\left((v^\theta)^2 + (v^\varphi)^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(v^\psi + v^\varphi \cos\theta\right)^2.$$

   (**Sugestão:** Uma vez que $I_1 = I_2$ pode assumir que o corpo rígido tem simetria de revolução em torno de e_3, pelo que a expressão da energia cinética não pode depender de φ nem de ψ; assuma então que $\varphi = \psi = 0$).

   (b) Escreva as equações do movimento para o **pião de Lagrange**, ou seja, para o sistema mecânico em $SO(3)$ com a energia cinética acima e energia potencial

$$U = Mgl\cos\theta.$$

   (c) Mostre que existem soluções das equações do movimento tais que θ, $\dot{\varphi}$ e $\dot{\psi}$ são constantes, e que no limite $|\dot{\varphi}| \ll |\dot{\psi}|$ (**pião rápido**) satisfazem

$$\dot{\varphi} \simeq \frac{Mgl}{I_3\dot{\psi}}.$$