Mecânica Geométrica

Ficha 11

A entregar até à aula de Terça-feira dia 30 de Novembro

1. Recorde que o movimento de uma partícula de massa $m > 0$ num campo central é descrito pelo Hamiltoniano completamente integrável
$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{{p_r}^2}{2m} + \frac{{p_\theta}^2}{2mr^2} + u(r).$$
   (a) Mostre que existem órbitas circulares de raio r_0 sempre que $u'(r_0) \geq 0$.

   (b) Verifique que o conjunto dos pontos onde dH e dp_θ não são independentes é a união destas órbitas circulares.

   (c) Mostre que a projecção do conjunto invariante
$$L_{(E,l)} = H^{-1}(E) \cap {p_\theta}^{-1}(l)$$
   em $\mathbb{R}^2$ é dado em coordenadas locais por
$$u(r) + \frac{l^2}{2mr^2} \leq E.$$
   (d) Conclua que se $u'(r_0) \geq 0$ e
$$u''(r_0) + \frac{3u'(r_0)}{r_0} > 0$$
   então a órbita circular de raio r_0 é estável.

2. Considere a sucessão formada pelo primeiro dígito da expansão decimal dos inteiros da forma 2^n para $n \in \mathbb{N}_0$:
$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, \ldots$$
   O objectivo deste exercício é reponder à seguinte questão: existe um 7 nesta sucessão?

   (a) Mostre que se $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ então
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} e^{2\pi i \nu k} = 0.$$
   (b) Prove a seguinte versão discreta do Teorema Ergódico de Birkhoff: se uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período 1 e $\nu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então para todo o $x \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x + \nu k) = \int_0^1 f(x)dx.$$
   (c) Mostre que $\log 2$ é um múltiplo irracional de $\log 10$.

   (d) Existe um 7 na sucessão acima?