

# Geometria hiperbólica: do crochet à forma do Universo

1<sup>o</sup> Semestre: 2023/24

Mariana Pereira 95754

---

## Introdução

A geometria hiperbólica é uma geometria não euclideana desenvolvida sobretudo a partir do século XIX. Neste trabalho iremos ver um modelo físico de estruturas hiperbólicas e como esta geometria pode ser aplicada na Física.

## Geometria Hiperbólica

Estamos familiarizados com geometria euclideana. Esta geometria chega até nós desde os tempos da Grécia Antiga e rege-se por 5 axiomas. Lembremos o quinto axioma, em particular a seguinte formulação: Dada uma reta  $r$  e um ponto  $P$  não pertencente à reta, existe uma única reta que passa em  $P$  e não interseca  $r$ . Essa reta diz-se paralela a  $r$ . Porém, este axioma pode não se verificar e ainda assim, estamos perante uma geometria válida. Tal é o caso na geometria hiperbólica, que é não-euclideana. De facto, podemos ter infinitas retas que passam em  $P$  e não interseçam  $r$ .

**Definição:** Um plano hiperbólico é uma superfície de Riemann simplesmente conexa com curvatura negativa.

## Modelos em crochet de estruturas hiperbólicas

Apesar de aceitarmos como verdade que o quinto axioma não se verifica nesta geometria, pode revelar-se difícil de visualizar. Um método inesperado a que é possível recorrer é o crochet. A matemática Daina Tamina da Universidade de Cornell apercebeu-se que poderia aliar a sua habilidade em crochet e seu conhecimento de geometria para fabricar uma representação de estruturas hiperbólicas. Deste modo, é possível ver com clareza estas estruturas e como mais que uma reta pode passar num ponto exterior a dada reta.

No crochet temos um fio contínuo com o qual se forma uma cadeia de laços. Para dar forma, fazemos laços sobre os laços da cadeia anterior. A particularidade relevante aqui é que podemos realizar mais que um em cada. Por exemplo, a cada  $n$  laços fazemos dois laços no mesmo espaço. Vemos então um crescimento exponencial do espaço e ao fim de algumas cadeias, vemos que a nossa peça começará a enrolar-se sobre si mesma (com curvatura negativa).



Figura 1: Estrutura hiperbólica em crochet feita por Daina Tamina



Figura 2: múltiplas linhas que passam num mesmo ponto sem interseção a uma única linha

## Aplicações

A geometria hiperbólica pode ser estendida a dimensões superiores - espaço hiperbólico. Uma das questões em que é pertinente a geometria hiperbólica é: qual é a forma do nosso Universo? Em particular, é interessante estudar qual será a sua curvatura - nula, positiva ou negativa. Será finito ou infinito? Uma das hipóteses é precisamente que o Universo pode ser caracterizado através da geometria hiperbólica. Se tal for o caso, a sua curvatura será negativa. As equações de relatividade geral de Einstein admitem a possibilidade de um universo com curvatura.

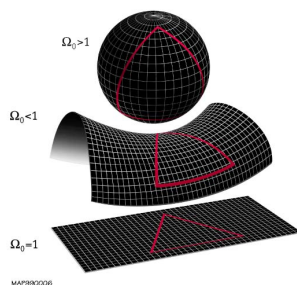


Figura 3: curvatura positiva, negativa e nula

Ao observarmos o mundo em que vivemos, podemos assumir que se trata de um mundo euclidiano. Porém, o Universo é absurdamente grande e temos meramente uma perceção muito reduzida. Mesmo com a tecnologia e conhecimentos mais avançados, é por enquanto impossível de ver o Universo no seu todo. Tal como a estrutura hiperbólica em crochet, que claramente não é plana, parecerá localmente euclidiana se a tentarmos estender num plano, o mesmo pode acontecer a grande escala. Por isso, quem sabe se vivemos realmente num Universo euclidiano ou se será hiperbólico.

## Referências

<https://www.margaretwertheim.com/new-blog/2017/10/10/spacetime-gravity-waves-and-crochet>

<https://scienceline.org/2008/05/physics-fox-knitting/>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic\\_geometry](https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_geometry)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Shape\\_of\\_the\\_universe](https://en.wikipedia.org/wiki/Shape_of_the_universe)

<https://www.space.com/24309-shape-of-the-universe.html>

<https://theiff.org/oexhibits/oe1e.html>

<https://theiff.org/oexhibits/oe1f.html>

David W. Henderson, Daina Taimina, Experiencing Geometry: Euclidean and non-Euclidean with History, 4th edition, 2020