Dobble: Encontra o par!

Instituto Superior Técnico - Métodos de Álgebra e Geometria em Engenharia e Física

10 de janeiro de 2024

1 Como Jogar

Dobble 1 é um jogo simples mas cativante que atingiu o seu pico de popularidade em 2018 e 2019, tornando-se o jogo mais vendido no Reino Unido. O conceito é simples: existem 55 cartas (que mais à frente veremos que podem ser até 57!), cada carta tem 8 símbolos e o jogo começa com apenas uma carta voltada para cima. De seguida, uma segunda carta é revelada e o objetivo é encontrar o **único** símbolo que as duas cartas vão ter em comum: o jogador mais rápido a encontrar o símbolo em comum fica com a primeira carta. Uma a uma, vão sendo reveladas as cartas sempre com o objetivo de encontrar o símbolo em comum entre as duas cartas que estão na mesa voltadas para cima (primeiro que os restantes jogadores). No fim ganha quem tiver recolhido mais cartas (e portanto, tiver encontrado primeiro que os outros mais símbolos em comum).

Figura 1: Dobble

2 Dobble: A Geometria por trás

Após jogar o jogo é quase inevitável surgirem perguntas como: "mas porquê 55 cartas? porquê 8 símbolos por carta? o jogo funcionaria com números diferentes? e quantos símbolos têm de existir no total para o jogo poder funcionar?".

Temos um conjunto de símbolos e um conjunto de cartas (em que cada carta é um subconjunto do conjunto de símbolos) e precisamos que quaisquer duas cartas do baralho tenham um único símbolo em comum. Esta condição pode parecer um bicho de sete cabeças mas, para efeitos de visualização, comecemos por alterar ligeiramente os objetos com que estamos a trabalhar: passamos a ter um conjunto de **pontos**, P e um conjunto de **linhas**, L de tal forma que quaisquer duas linhas que consideremos terão apenas um ponto em comum.

2.1 Dobble mini: um bicho de sete... pontos e linhas!

Comecemos com um conveniente exemplo em que temos 6 linhas (todas num mesmo plano), que se forem escolhidas aleatoriamente têm maior probabilidade de se intersetarem todas e em pontos distintos. Nesse caso não será muito difícil ver que existirão 15 pontos de interseção e que este é o número máximo de pontos de interseção para 6 linhas (no caso de serem n linhas o máximo de interseções é $\frac{n(n-1)}{2}$).

Ora, pensando no jogo original temos 55 "linhas"(cartas), pelo que o número máximo de interseções (ou seja, de símbolos em comum) é 2970 e para além disso, cada linha teria de ter 54 pontos (ou seja, cada carta teria de ter 54 símbolos). Ainda que teoricamente seja possível jogar assim, não pareceu uma realidade muito simpática para os criadores do jogo. Interessa-nos então olhar para casos com degenerescência (mais do que duas linhas intersetarem-se no mesmo ponto).

Retomando o exemplo das 6 linhas e, por questões de jogabilidade, ignorando os casos em que existem 1 e 6 pontos de interseção (imagem 2), existe um exemplo que apresenta um bom equilíbrio entre jogabilidade e número de pontos.

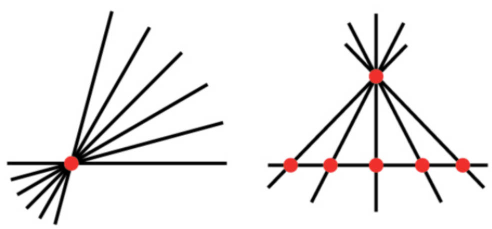

Figura 2: casos ignorados

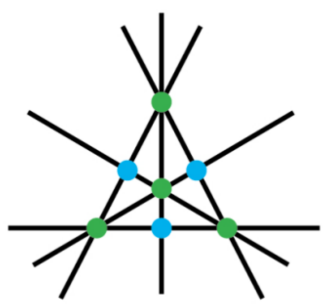

Figura 3: exemplo de equilíbrio entre jogabilidade e baixo número de pontos

Na figura 3 temos um total de sete pontos de interseção e três pontos por linha. Para além disso podemos ver quatro pontos em que passam três linhas e três pontos em que passam duas linhas. Temos também liberdade de acrescentar mais uma linha que passe por estes três pontos (uma sétima carta com os três símbolos que aparecem em apenas duas cartas).

Atingimos assim a versão mais pequena possível do jogo Dobble. A imagem 4, conhecida como plano de Fano é o exemplo mais pequeno que existe de um plano projetivo, prestes a ser definido.

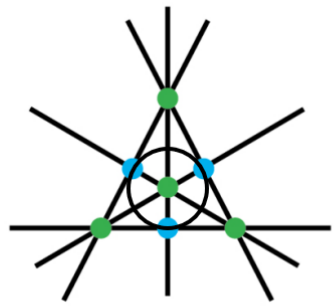

Figura 4: Plano de Fano

2.2 Geometria Projetiva

Definição: Um plano projetivo consiste num conjunto de linhas L, um conjunto de pontos P e uma relação de incidência entre linhas e pontos $(l, p) = (p, l)$ (com $p \in P$ e $l \in L$) que satisfazem:

- Dados $p_1 \neq p_2$ com $p_1, p_2 \in P$ existe exatamente uma linha l tal que (p_1, l) e (p_2, l);
- Dadas $l_1 \neq l_2$ com $l_1, l_2 \in L$ existe exatamente um ponto p tal que (l_1, p) e (l_2, p);
- Existem 4 pontos tais que não há 3 deles incidentes com uma só linha.

Proposição: $|P| \geq 7, |L| \geq 7$.

Teorema: Dado um plano projetivo finito (com número de pontos finito) existe um número inteiro $n \geq 2$ tal que:

- qualquer ponto do plano incide em $n + 1$ linhas;
- qualquer linha do plano incide em $n + 1$ pontos.

Dizemos que n é a ordem do plano projetivo.

Corolário: Seja P um plano projetivo de ordem n então o número de pontos de P (que é igual ao número de linhas) é $n^2 + n + 1$.

Uma vez introduzido o conhecimento matemático para tal, resta-nos observar que o Dobble (versão original) é, nada mais nada menos, do que um plano projetivo de ordem 7, representado na imagem 5. Temos portanto 8 símbolos por carta, cada símbolo está contido em 8 cartas e existe um total de $7^2 + 7 + 1 = 57$ símbolos e cartas. A verdade é que o número 55 soa bastante mais apelativo num jogo chamado de Dobble (referência à palavra ”double”) e em que o objetivo é encontrar pares de símbolos e esta questão de marketing, aliada a questões de eficiência no fabrico contribuiu para que o baralho tivesse apenas 55 cartas (que, **mantendo os 57 símbolos**, funciona igualmente bem, da mesma forma que no exemplo do plano de Fano o jogo funcionaria com apenas 6 cartas).

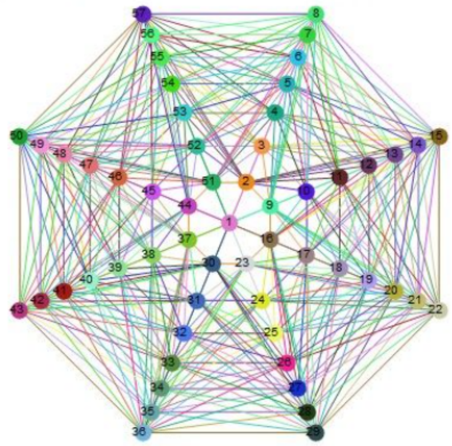

Figura 5: Plano projetivo de ordem 7

Referências

[1] Polster, Burkard (2015-04-01). "The Intersection Game";

[2] B. Doyle, B. Voce, W.C Lim, C.H Lo (2015-07-06). "Finite Projective Geometry";

[3] https://en.m.wikipedia.org/wiki/Dobble

[4] https://en.m.wikipedia.org/wiki/Projective_plane