Planos Projetivos Finitos e o jogo Dobble

Filipe Santos
ist1103612

Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal

Janeiro 2024

Resumo

Neste ensaio, pretende-se entender a matemática por detrás do popular jogo de cartas Dobble. Mais concretamente, após ser fornecida uma explicação das origens e funcionamento do jogo, será descrito o processo de como criar um jogo de Dobble com um número diferente de cartas. Este processo é baseado fundamentalmente nas propriedades de planos projetivos sobre corpos finitos. Finalmente, apresentar-se-á o problema da classificação de planos projetivos finitos, dentro do contexto do jogo Dobble.

1. Introdução

Dobble é um jogo de cartas simples. Num baralho típico de Dobble, existem 55 cartas circulares, cada uma com 8 símbolos. São retiradas duas cartas do baralho, e colocadas na mesa viradas para cima. Ganha o jogador que conseguir ser o mais rápido a identificar qual dos símbolos está presente em ambas as cartas.

Figura 1: Jogo de Dobble

Este tipo de jogos, que passaremos a denominar por jogos de correspondência única, tem a sua origem em 1850, quando o Reverendo Thomas Penyngton Kirkman submeteu o seguinte problema:

”Quinze alunas saem da sua escola em grupos de três, durante sete dias seguidos: de quantas maneiras é possível organizá-las diariamente, de modo a que nenhuma delas ande duas vezes lado a lado com a mesma senhora?”

O problema pode ser generalizado para perguntar de quantas formas n símbolos podem ser agrupados em grupos de p tal que combinações de q elementos não apareçam mais do que uma vez. O jogo de Kirkman ganhou popularidade quanto o problema mais geral foi resolvido, em 1968; em 2008, foi adaptado pelo jornalista francês Denis Blanchot, para criar o Dobble [3].

2. Jogos de Correspondência Única: alguns exemplos

Para se poder jogar Dobble é, então, necessário que todos os pares de cartas tenham 1 e apenas 1 símbolo em comum. Existe uma maneira trivial de conseguir atingir este objetivo: por exemplo, colocando o mesmo símbolo em todas as cartas. Estamos interessados em excluir esse tipo de soluções, e procurar a solução ótima, isto é, a solução que, para um dado número de cartas, utilize o menor número de símbolos.

Uma maneira natural de abordar o problema é considerar um símbolo diferente para cada par de cartas. Desta forma, não só se garante que cada par de cartas partilhe um símbolo, como que este seja único. Nesse caso, tendo um número n de cartas, o número de pares diferentes de cartas e, consequentemente, o número de símbolos, seria dado por $\binom{n}{2}$, ou $\frac{n(n-1)}{2}$. É fácil ver que para o jogo de Dobble, que usa 55 cartas, este método precisaria de 1485 símbolos diferentes, com 54 símbolos por carta; o jogo real utiliza 57 símbolos, com 8 por carta, pelo que este método continua longe do ótimo. [4]

3. Geometria Finita

Torna-se claro que um método mais sofisticado é necessário. Para isso, introduz-se algumas noções de geometria finita, ou seja, geometria com um número finito de pontos. Um Plano Projetivo Finito consiste num conjunto $S = \{p_1, ..., p_n\}$, cujos elementos são os pontos, e num conjunto

$L = \{L_1, ..., L_m\}$, cujos elementos são as linhas, tais que [1]:

- (P1) Cada 2 pontos são incidentes ao mesmo tempo com uma única linha

- (P2) Cada 2 linhas são incidentes ao mesmo tempo com um único ponto

- (P3) Existem 4 pontos tais que nenhum subconjunto de 3 pontos forma uma única linha

- (P4) Os conjuntos S e L são finitos

Por outras palavras, 2 pontos definem uma única linha e duas linhas intersetam-se num único ponto. Desta forma, é possível estabelecer uma correspondência entre os planos projetivos finitos e os jogos de correspondência única: os pontos correspondem aos símbolos, as linhas às cartas, e as propriedades dos pares de cartas são garantidas por cada 2 linhas se encontrarem apenas num ponto (cada 2 cartas têm exatamente um símbolo em comum). Define-se de seguida a ordem p de um Plano Projetivo Finito:

Proposição: cada ponto num plano projetivo finito está contido num número igual $p + 1$ linhas, e cada linha nesse plano projetivo finito contém, igualmente, $p + 1$ pontos. Chama-se a p a ordem do plano projetivo.

Demonstração: sejam P um ponto e l uma linha tais que P não pertence a l. Devido às propriedades P1 e P2, o número de pontos que pertencem a l é igual ao número de linhas que passam em P. Podemos usar a propriedade P3 para justificar que existe um ponto $Q \neq P$ que também não pertence a l. Usando o argumento anterior, determina-se que o número de linhas que passam em Q é igual ao número de linhas que passam em P. Como P e Q foram escolhidos de forma arbitrária, este número deve ser constante para todos os pontos e linhas. Define-se então p tal que este número seja igual a $p + 1$. $\square$

Como, para cada ponto num plano projetivo de ordem p, existem $p + 1$ linhas, cada uma com mais p pontos, o número total de pontos nesse plano projetivo deve ser $p(p + 1) + 1 = p^2 + p + 1$. Seguindo um argumento semelhante, o número de retas também é $p^2 + p + 1$ [1].

Note-se que não se está a argumentar que a ordem p defina a geometria do plano projetivo. De facto, existem planos projetivos finitos com a mesma ordem que não são isomorfos (o primeiro exemplo acontece na ordem $p = 9$, para a qual existem 4 planos projetivos não-isomorfos).

Pode ser definido um plano projetivo sobre o corpo finito de ordem p, $\mathbb{F}_p$. Os pontos são da forma $(a, b, c) \in \mathbb{F}_p^3 \backslash \{0, 0, 0\}$, sujeitos à correspondência $(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = (a, b, c), \forall \lambda \in \mathbb{F}_p \backslash \{0\}$. Por exemplo, no plano projetivo finito sobre $\mathbb{F}_3$, os tuplos $(0, 1, 2)$ e $(0, 2, 1) = 2 \cdot (0, 1, 2)$ representam o mesmo ponto. Denota-se então o ponto representado por (a, b, c) por $(a : b : c)$. As linhas são representadas por equações do tipo $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0; (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{F}_p^3 \backslash \{0, 0, 0\}\}$. O facto de $\mathbb{F}_p$ ser um corpo finito, e a relação de equivalência acima descrita, garantem que as 4 propriedades de um plano projetivo finito são satisfeitas, e pode ser demonstrado que este plano terá ordem p. Neste caso, denota-se o plano projetivo por $PG(2, p)$.

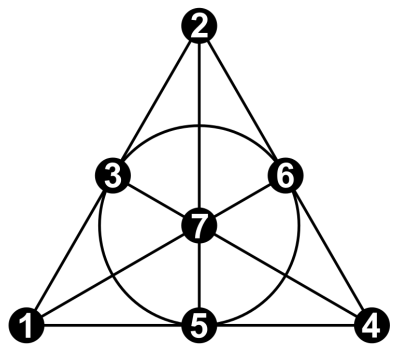

Figura 2: Plano de Fano, uma representação geométrica de $PG(2, 2)$

Neste momento, estão desenvolvidas todas as ferramentas necessárias para construir o jogo de Dobble.

4. Como construir um jogo de correspondência única

No caso do jogo de Dobble, foi utilizado o corpo finito de ordem 7, $\mathbb{F}_7$. Consideremos então o plano $PG(2, 7)$. Neste plano, existem $7^2 + 7 + 1 = 57$ pontos e, de igual modo, 57 linhas. Cada linha contém $7 + 1 = 8$ pontos, e cada ponto pertence simultaneamente a 8 linhas. Isto significa que o jogo terá 57 cartas e 57 símbolos, sendo que cada carta contém 8 símbolos e cada símbolo está presente em 8 cartas diferentes.

O jogo de Dobble real, embora tendo, de facto, 57 símbolos, tem apenas 55 cartas: nem todas as combinações possíveis de símbolos estão incluídas. É conjeturado que isto se deva a restrições na fabricação, já que o número de cartas usualmente incluído num baralho *standard* é 55. No entanto, é de notar que isto não afeta o funcionamento do jogo: remover uma carta é equivalente, em $PG(2, 7)$, a remover uma linha; todas as restantes linhas continuam a intersetar-se em 1 e apenas 1 ponto, pelo que o jogo de correspondência única continua a funcionar.

Seguindo este método, eu próprio consegui criar um jogo baseado em $\mathbb{F}_4$, com 21 cartas e símbolos, e com 5 símbolos em cada carta. O jogo foi desenvolvido em Python, e está disponível no website: https://www.math.tecnico.ulisboa.pt/ jnatar/MAGEF-

5. Resultados em aberto e Conclusões

Note-se que, devido às propriedades dos corpos finitos $\mathbb{F}_p$, o algoritmo obtido só funciona para p potência de primo. No entanto, não ficou demonstrado que o plano projetivo finito dessa ordem, definido não somente a partir propriedades P1, P2, P3 e P4, não poderá ter ordem n arbitrária. De facto, esta questão, conhecida como o problema da classificação de planos projetivos finitos, é uma das mais importantes questões em aberto em Matemática Combinatória. Até agora, foi provada a não existência de plano projetivo apenas para ordens 6 (por Gaston Tarry em 1901) e 10 (computacionalmente), ambas as provas por exaustão [2].

Conseguiu-se então, com recurso a Geometria Finita, determinar uma forma ótima de construir jogos de correspondência única, que usa tantos símbolos como cartas. Isto constitui uma melhoria significativa face à abordagem inicial mais ingénua: de um crescimento quadrático do número de símbolos necessários para um jogo com n cartas, conseguiu passar-se para um crescimento linear.

Referências

[1] S. Ball and Z. Weiner. An Introduction to Finite Geometry. pages 1–5, 2011.

[2] C. W. H. Lam. The search for a finite projective plane of order 10. *The American Mathematical Monthly*, 98(4), 1991.

[3] C. Salgado. The Geometry of the Game Dobble. 2022.

[4] M. Parker, How does Dobble (Spot It) work?, Stand-up Maths, 2021.