Geometria Riemanniana

Ficha 4

A entregar até à aula de Terça-feira dia 17 de Outubro

1. Podemos identificar cada ponto de $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ com a bijecção afim $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = yt + x$. Uma vez que o conjunto destas aplicações com a operação de composição forma um grupo, a nossa identificação induz uma estrutura de grupo em H.

   (a) Mostre que a operação de grupo induzida em H é dada por
   $$(x, y) \cdot (z, w) = (yz + x, yw),$$
   e que H com esta operação é um grupo de Lie.

   (b) Mostre que a derivada da translação esquerda $L_{(x,y)} : H \to H$ num ponto $(z, w) \in H$ é representada pela matriz
   $$\left(dL_{(x,y)}\right)_{(z,w)} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$
   Conclua que o campo invariante à esquerda $X^V \in \mathfrak{X}(H)$ determinado pelo vector
   $$V = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{h} \equiv T_{(0,1)}H \qquad (\xi, \eta \in \mathbb{R})$$
   é dado por
   $$X^V_{(x,y)} = \xi y \frac{\partial}{\partial x} + \eta y \frac{\partial}{\partial y}.$$

   (c) Dados $V, W \in \mathfrak{h}$, calcule $[V, W]$.

   (d) Determine o fluxo do campo vectorial X^V, e indique uma expressão para a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{h} \to H$.

   (e) Confirme os resultados acima mostrando que H é o subgrupo de $GL(2)$ formado pelas matrizes da forma
   $$\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   com $y > 0$.

   Não precisam de entregar:

2. Mostre que $SL(2)$ é um grupo de Lie difeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

3. (a) Se $A \in \mathfrak{sl}(2)$, mostre que existe $\lambda \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ tal que
   $$e^A = \cosh \lambda \, I + \frac{\sinh \lambda}{\lambda} A.$$

   (b) Mostre que $\exp : \mathfrak{sl}(2) \to SL(2)$ não é sobrejectiva.