Geometria Diferencial

Ficha 12

A entregar até à aula de Quinta-feira dia 12 de Dezembro

Considere o fibrado de linha **complexo** (portanto um fibrado vectorial real de rank 2) $\xi = (\pi, E, \mathbb{CP}^1)$ com espaço total $E = \mathbb{CP}^2 \setminus \{[0,0,1]\}$ e base $\mathbb{CP}^1 \cong \mathbb{S}^2$, definido pelas cartas trivializantes (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2), onde

$$U_1 = \{[z,1] \in \mathbb{CP}^1 : z \in \mathbb{C}\}; \quad \phi_1([z,1,t]) = ([z,1],t);$$
$$U_2 = \{[1,w] \in \mathbb{CP}^1 : w \in \mathbb{C}\}; \quad \phi_2([1,w,t]) = ([1,w],t).$$

Mostre que:

1. A aplicação $s : \mathbb{CP}^1 \to E$ dada por $s([z,w]) = [z,w,z]$ é uma secção de ξ com um único zero, que é não degenerado.

2. ξ é um fibrado orientável, com $\chi(\xi) = \mu$ para uma certa escolha de orientação, onde μ é o gerador canónico de $H^2(\mathbb{S}^2)$.

3. ξ é um fibrado não trivial que não é isomorfo a $T\mathbb{S}^2$.

4. Existe um cociclo $g_{21} : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para este fibrado dado por

$$g_{21}([z,1]) = \frac{\overline{z}}{|z|}.$$

5. As formas-1 com valores complexos ω e η dadas nas coordenadas z e w por

$$\omega = \frac{1}{2}\frac{z d\overline{z} - \overline{z} dz}{1+|z|^2} \quad \text{e} \quad \eta = \frac{1}{2}\frac{w d\overline{w} - \overline{w} dw}{1+|w|^2}$$

definem para este cociclo uma conexão ∇ em ξ.

6. A forma de curvatura é dada em U_1 por

$$\Omega = \frac{dz \wedge d\overline{z}}{(1+|z|^2)^2}.$$