LIÇÕES DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

RUI LOJA FERNANDES

Índice

Prefácio

Estas são notas da cadeira de Geometria Diferencial da Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação e do Mestrado em Matemática Aplicada do IST, leccionada por mim nos anos lectivos 2002/2003 e 2003/2004. Este cadeira funciona no 4º ano da licenciatura, e pressupõe conhecimentos básicos de álgebra, análise e topologia, para além de um curso introdutório de geometria Riemanniana.

O meu objectivo, ao escrever estas notas, foi o de fornecer uma versão escrita das aulas leccionadas. Isto possibilita aos alunos dedicarem mais atenção às aulas, sem se preocuparem em escrever os seus apontamentos, e, simultaneamente, fornece um guia para a matéria leccionada. Estas notas **não substituem** a consulta da literatura recomendada. Pelo contrário, pretendem ser um estímulo para os alunos consultarem as excelentes referências que constituem a literatura recomendada. Como não podia deixar de ser, estas notas seguem, frequentemente, as exposições de algumas dessas obras.

Cada uma das Lições que constituem estas notas corresponde, de facto, a uma aula do curso (duração aproximada de 1h30m). No entanto, existem lições que incluem mais material do que outras, o que reflecte os diferentes ritmos impostos em cada aula. Os exercícios no final de cada Lição são parte integrante do curso, e nunca é demais insistir que a Matemática se aprende praticando. Estes exercícios contêm, frequentemente, resultados que foram referidos (mas não demonstrados) nas aulas, e que são utilizados mais tarde. O grau de dificuldade dos exercícios *não é* homogéneo.

Sendo esta a primeira versão das notas, elas contêm demasiados erros e omissões. Alguns deles foram detectados pelos alunos que frequentaram a cadeira, e que também fizeram críticas ao texto. Estou particularmente grato aos alunos Ana Rita Pires, Miguel Negrão, Miguel Olmos, Ricardo Inglês e Ricardo Joel, bem como ao meu colega José Natário. O autor agradece que lhe seja comunicado quaisquer erros, bem como sugestões para melhorar estas notas.

Rui Loja Fernandes
rfern@math.ist.utl.pt
Departamento de Matemática, IST
Lisboa, 19 de Dezembro de 2003

PARTE I. Fundamentos de Variedades Diferenciáveis

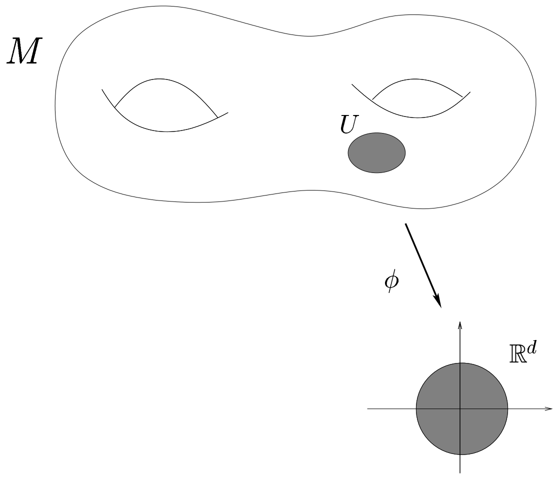
A noção de variedade diferenciável formaliza o conceito de um espaço que localmente é como um espaço euclidiano, quer do ponto de vista topológico, quer do ponto de vista da sua estrutura diferenciável. Esta noção é uma abstracção das noções usuais de curva e superfície em $\mathbb{R}^n$. A geometria diferencial ocupa-se do estudo das variedades diferenciáveis. Veremos que, por um lado, muitas das construções da análise infinitesimal (i.e., do cálculo) podem ser extendidas do espaço euclidiano a qualquer variedade. Por outro lado, a análise global em variedades requer técnicas e métodos novos, e mesmo as questões mais elementares resultam muitas vezes em problemas em aberto.

Nesta primeira série de lições pretendemos introduzir alguns conceitos elementares, que estão na base da geometria diferencial, e que nos ajudarão a ficar familiarizados com a noção de variedade. Os conceitos e ideias principais a reter são:

- Na Lição 1: *espaço localmente euclidiano* e *variedade diferenciável* (os nossos objectos). *Aplicação diferenciável* (os nosso morfismos). *Partição da unidade* (uma técnica de "colagem").
- Na Lição 2: *vector tangente*, *espaço tangente* (os objectos infinitesimais) e *diferencial* (os morfismos infinitesimais).
- Na Lição 3: classes importantes de aplicações diferenciáveis: *imersões*, *submersões* e *difeomorfismos locais*. *Subvariedades* (os sub-objectos).
- Na Lição 4: variedades *mergulhadas*. O *Teorema de Whitney*, que mostra que toda a variedade é mergulhada nalgum $\mathbb{R}^n$.
- Na Lição 5: *folheações* (uma partição de uma variedade em subvariedades), generalização muito útil da noção de variedade.
- Na Lição 6: *quocientes* de variedades.

Lição 1. Variedades e Aplicações Diferenciáveis

Recordemos que $\mathbb{R}^d = \{(x^1, \ldots, x^d) : x^1, \ldots, x^d \in \mathbb{R}\}$ designa o espaço euclidiano de dimensão d. Vamos adoptar a convenção de designar também por $x^i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ a função coordenada i. Um **espaço localmente euclidiano** de dimensão d é um espaço topológico M em que cada ponto $p \in M$ possui uma vizinhança $U \subset M$ homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^d$.



Ao homeomorfismo $\phi : U \to \mathbb{R}^d$ chamamos um **sistema de coordenadas** ou **carta**, às funções $\phi^i = x^i \circ \phi$ chamamos **funções coordenadas**, e designamos o sistema de coordenadas abreviadamente por (U, ϕ). Muitas vezes escrevemos x^i em vez de ϕ^i, e denotamos o sistema de coordenadas por $(U, x^1, \ldots, x^d)$. Um sistema de coordenadas (U, ϕ) diz-se *centrado* num ponto $p \in M$ se $\phi(p) = 0$.

Definição 1.1. *Uma* ***estrutura diferenciável*** *de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ num espaço localmente euclidiano M de dimensão d, é uma colecção de sistemas de coordenadas $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma cobertura aberta de M, i.e., $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$;

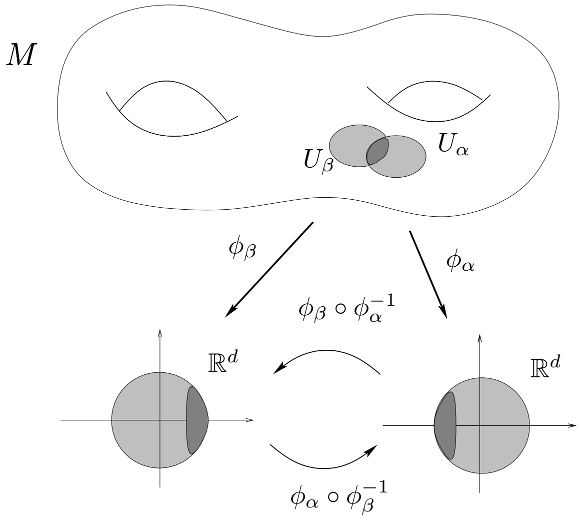
(ii) As ***funções de transição*** *$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ são de classe C^k para quaisquer $\alpha, \beta \in A$;*

(iii) A colecção $\mathcal{C}$ é maximal: se (U, ϕ) é um sistema de coordenadas com a propriedade de que $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$ e $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ são de classe C^k para todo o $\alpha \in A$, então $(U, \phi) \in \mathcal{C}$.

A um par $(M, \mathcal{C})$ chamamos uma ***variedade diferenciável*** *de dimensão d.*

A uma colecção de sistemas de coordenadas que satisfaz (i) e (ii) chamamos um **atlas**. Para todo o atlas $\mathcal{C}_0 = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$, existe um único atlas maximal (i.e., uma estrutura diferenciável) $\mathcal{C}$ que o contém: basta tomar para $\mathcal{C}$ a colecção de todos os sistemas de coordenadas (U, ϕ) tais que $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$ e $\phi_\alpha \circ \phi^{-1}$ são de classe C^k.

Podemos ainda considerar *variedades analíticas*, em que as funções de transição são analíticas, ou *variedades complexas*, modeladas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{2d} \simeq \mathbb{C}^d$, em que as funções de transição são funções holomorfas.



Nesta notas, vamos concentrar-nos no estudo de variedades diferenciáveis de classe C^∞, que chamaremos variedades regulares, variedades suaves, ou simplesmente variedades. Vejamos alguns exemplos simples.

Exemplos 1.2.

1. *A estrutura diferenciável standard do **espaço euclidiano** $\mathbb{R}^d$ é a colecção de coordenadas maximal que contém o sistema de coordenadas $(\mathbb{R}^d, i)$, onde $i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ é a aplicação identidade.*

2. *A **esfera** d-dimensional é o conjunto*

$$\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \sum_{i=1}^{d+1} (x^i)^2 = 1\}.$$

A esfera $\mathbb{S}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$, com a topologia relativa, é um espaço localmente euclidiano: se $N = (0, \ldots, 0, 1)$ e $S = (0, \ldots, 0, -1)$ designam os pólos norte e sul, então obtemos dois sistemas de coordenadas $(\mathbb{S}^d - \{N\}, \pi_N)$ e $(\mathbb{S}^d - \{S\}, \pi_S)$, onde π_N e π_S designam as projecções estereográficas por N e S.

As funções de transição para estes sistemas de coordenadas são C^∞. A estrutura diferenciável standard na esfera obtém-se considerando a colecção de coordenadas maximal que contém estes dois sistemas de coordenadas.

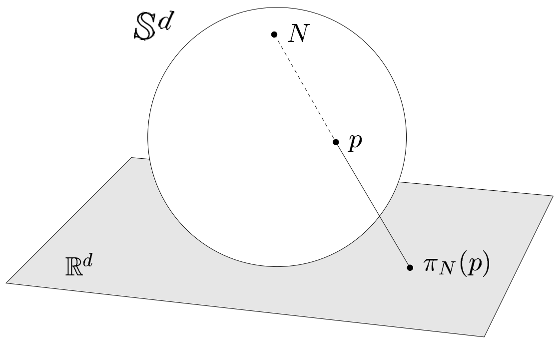
3. *O **espaço projectivo** d-dimensional é o conjunto*

$$\mathbb{P}^d = \left\{ L \subset \mathbb{R}^{d+1} : L \text{ é uma recta pela origem} \right\}.$$

Podemos identificar $\mathbb{P}^d$ com o quociente $\mathbb{R}^{d+1} - \{0\} / \sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência:

$$(x^0, \ldots, x^d) \sim (y^0, \ldots, y^d) \text{ se e só se } (x^0, \ldots, x^d) = \lambda(y^0, \ldots, y^d),$$

para algum número real $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$. O espaço $\mathbb{P}^d$, com a topologia quociente, é um espaço localmente euclidiano de dimensão d: designando por



$[x^0 : \cdots : x^d]$ a classe de equivalência de $(x^0, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, para cada $\alpha = 0, \ldots, n$ temos um sistema de coordenadas (U_α, ϕ_α) onde:

$$U_\alpha = \left\{[x^0 : \cdots : x^d] : x^\alpha \neq 0\right\},$$

$$\phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^d, \quad [x^0 : \cdots : x^d] \mapsto (\frac{x^0}{x^\alpha}, \ldots, \frac{\widehat{x^\alpha}}{x^\alpha}, \ldots, \frac{x^d}{x^\alpha})$$

(o sinal $\widehat{a}$ significa que omitimos o termo a). As funções de transição para estes sistemas de coordenadas são C^∞. A estrutura diferenciável standard no espaço projectivo obtém-se considerando a colecção de coordenadas maximal que contém estes sistemas de coordenadas.

4. *Se M é uma variedade d-dimensional com estrutura diferenciável $\mathcal{C}$ e $U \subset M$ é um **aberto**, então U é uma variedade d-dimensional com estrutura diferenciável*

$$\mathcal{C}_U = \{(U_\alpha \cap U, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap U}) : (U_\alpha, \phi_\alpha) \in \mathcal{C}\}.$$

5. *Se M e N são variedades diferenciáveis, então o **produto cartesiano** $M \times N$ é uma variedade diferenciável: em $M \times N$ consideramos a colecção maximal que contêm os sistemas de coordenadas da forma $(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)$, onde (U_α, ϕ_α) e (V_β, ψ_β) são sistemas de coordenadas das estruturas diferenciáveis de M e N, respectivamente. Deve ser claro que $\dim M \times N = \dim M + \dim N$.*

   *De forma análoga, se $M_1, \ldots, M_k$ são variedades diferenciáveis de dimensões $d_1, \ldots, d_k$ podemos definir uma estrutura diferenciável no produto cartesiano $M_1 \times \cdots \times M_k$, de dimensão $d_1 + \cdots + d_k$. Por exemplo, o **toro** d-dimensional $\mathbb{T}^d = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ e os **cilindros** $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^l$ são variedades diferenciáveis.*

Adoptamos, daqui em diante, a seguinte convenção:

> *Todas as variedades são Hausdorff e possuem uma base de abertos contável.*

Deve-se observar que é, por vezes, interessante estudar variedades não-Hausdorff. Estas surgem naturalmente, por exemplo, no estudo de quocientes, como veremos mais tarde na Lição 6. As variedades que não possuem uma base de abertos contável correspondem a situações bastante mais patológicas, como ilustramos no próximo exemplo.

Exemplo 1.3.
Seja $M = \mathbb{R}^2$ com a topologia gerada pelos conjuntos da forma $U \times \{y\}$, onde $U \subset \mathbb{R}$ é aberto e $y \in \mathbb{R}$. O espaço M é localmente euclidiano, com sistemas de

coordenadas $(U \times \{y\}, \phi_y)$, onde $\phi_y(x,y) = x$. Como as funções de transição são de classe C^∞, obtemos uma estrutura diferenciável de dimensão 1 em $\mathbb{R}^2$ e distinta da usual. Esta variedade não tem uma base contável de abertos.

Definição 1.4. *Sejam M e N variedades diferenciáveis.*

*(i) Uma aplicação $f : M \to \mathbb{R}$ diz-se uma **função diferenciável** se $f \circ \phi^{-1}$ é de classe C^∞, para todos os sistemas de coordenadas (U, ϕ).*

*(ii) Uma aplicação $\Psi : M \to N$ diz-se uma **aplicação diferenciável** se $\tau \circ \Psi \circ \phi^{-1}$ é de classe C^∞, para todos sistemas de coordenadas (U, ϕ) de M e (V, τ) de N.*

*A uma aplicação diferenciável $\Psi : M \to N$ bijectiva, com inversa diferenciável, chamamos um **difeomorfismo**.*

Para verificar se uma aplicação $\Psi : M \to N$ é diferenciável basta verificar se, para cada $p \in M$, existem sistemas de coordenadas (U, ϕ) de M e (V, τ) de N, com $p \in U$ e $\Psi(p) \in V$, e tais que $\tau \circ \Psi \circ \phi^{-1}$ é de classe C^∞.

O conjunto das aplicações diferenciáveis entre duas variedades M e N será designado por $C^\infty(M; N)$. No caso $N = \mathbb{R}$, o conjunto das funções diferenciáveis $f : M \to \mathbb{R}$ será designado por $C^\infty(M)$ em vez de $C^\infty(M; \mathbb{R})$.

Exemplos 1.5.

1. *Claramente, a composição de duas aplicações diferenciáveis é uma aplicação diferenciável e a aplicação identidade $M \to M$ é diferenciável. As variedades e as aplicações diferenciáveis formam pois a **categoria diferenciável**.*

2. *Qualquer função $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ num aberto $\mathbb{R}^{d+1} \supset U \supset \mathbb{S}^d$ induz, por restrição, uma função $f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Reciprocamente, toda a função $f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ é a restrição de uma função $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ definida num aberto $\mathbb{R}^{d+1} \supset U \supset \mathbb{S}^d$.*

3. *A aplicação $\pi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{P}^d$ definida por:*
$$\pi(x^0, \dots, x^d) = [x^0 : \cdots : x^d],$$
é uma aplicação diferenciável. Qualquer função $F : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, que seja invariante por inversão $F(-x) = F(x)$, induz uma função $f : \mathbb{P}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. A função f é a única função que torna comutativo o diagrama:
$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^d \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbb{P}^d \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$
Reciprocamente, toda a função em $C^\infty(\mathbb{P}^d)$ é desta forma.

Se M é uma variedade e $f \in C^\infty(M)$, definimos o **suporte de** f como sendo o conjunto fechado
$$\operatorname{supp} f \equiv \overline{f^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})}.$$
Recordemos ainda que uma colecção $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos de M diz-se *localmente finita* se, para todo o $p \in M$, existe uma vizinhança $p \in O \subset M$ tal que $O \cap S_\alpha \neq \varnothing$ para apenas um número finito de $\alpha \in A$.

Definição 1.6. *Uma* ***partição da unidade*** *numa variedade M é uma colecção $\{\phi_i : i \in I\} \subset C^\infty(M)$ que satisfaz:*

(i) a colecção de suportes $\{\operatorname{supp}\phi_i : i \in I\}$ é localmente finita;

(ii) $\phi_i(p) \geq 0$ e $\sum_{i\in I}\phi_i(p) = 1$ para todo o $p \in M$.

As partições da unidade são utilizadas para "colar" propriedades locais (i.e., que se verificam em domínios de coordenadas), daí resultando propriedades globais da variedade.

Uma partição da unidade $\{\phi_i : i \in I\}$ diz-se *subordinada* a uma cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ de M se, para cada $i \in I$, existe um $\alpha \in A$ tal que $\operatorname{supp}\phi_i \subset U_\alpha$.

Teorema 1.7 (Existência de Partições da Unidade)**.** *Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma partição da unidade contável $\{\phi_i : i \in \mathbb{N}\}$, subordinada à cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, com $\operatorname{supp}\phi_i$ compacto para todo o i.*

Demonstração. Necessitamos dos seguintes factos, cuja demonstração deixamos como exercício:

(a) M possui uma **exaustão compacta**, isto é, uma família de subconjuntos compactos $\{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ tais que $K_i \subset \operatorname{int} K_{i+1}$ para todo o $i \in \mathbb{N}$ e $\bigcup_{i=1}^{+\infty} K_i = M$.

(b) Existe uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $\phi(x) = 1$, se $x \in \overline{B_1(0)}$, e $\phi(x) = 0$, se $x \in B_2(0)^c$.

Seja $\{K_i : i \in \mathbb{N}\}$ uma exaustão compacta de M. Para cada ponto $p \in K_i \setminus \operatorname{int} K_{i-1}$ escolhemos uma carta local (V_p^i, τ) centrada em p tal que

(i) $V_p^i \subset U_\alpha \cap (\operatorname{int} K_{i+1} - K_{i-2})$ para algum $\alpha \in A$;

(ii) $\overline{B_2(0)} \subset \tau(V_p^i)$,

(onde convencionamos que $K_{-1} = K_0 = \varnothing$). Se ϕ é a função de (b), definimos:

$$\psi_p = \begin{cases} \phi\circ\tau, & \text{em } V_p^i, \\ \\ 0, & \text{em } M - V_p^i. \end{cases}$$

Observe-se que a função ψ_p assume o valor 1 num aberto $W_p^i \subset V_p^i$ contendo p, e que estes abertos cobrem o compacto $K_i \setminus \operatorname{int} K_{i-1}$, pelo que existe uma subcobertura finita $\left\{W_{p_1}^i, \dots, W_{p_{N_i}}^i\right\}$. Consequentemente, a família $\left\{V_{p_1}^i, \dots, V_{p_{N_i}}^i : i \in \mathbb{N}\right\}$ é uma cobertura aberta de M, localmente finita, subordinada a $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, com $\overline{V_{p_j}^i}$ compactos.

Assim, a função

$$\psi = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{N_i} \psi_{p_j}^i,$$

está bem definida, é C^∞, e $\psi(p) > 0$ para cada $p \in M$. Se definirmos:

$$\phi_j^i = \frac{\psi_{p_j}^i}{\psi},$$

então as funções $\left\{\phi_1^i, \dots, \phi_{N_i}^i : i \in \mathbb{N}\right\}$ formam uma partição da unidade contável, subordinada à cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$, e com $\operatorname{supp} \phi_j^i$ compacto. □

Se não exigirmos que os suportes sejam compactos podemos obter uma partição da unidade com o mesmo conjunto de índices:

Corolário 1.8. *Seja M uma variedade diferenciável e $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ uma cobertura aberta de M. Então existe uma partição da unidade $\{\phi_\alpha : \alpha \in A\}$ tal que $\operatorname{supp} \phi_\alpha \subset U_\alpha$ para todo o $\alpha \in A$.*

Demonstração. Pelo teorema existe uma partição partição da unidade contável $\{\psi_i : i \in \mathbb{N}\}$ subordinada à cobertura $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Para cada i escolhemos um $\alpha = \alpha(i)$ tal que $\operatorname{supp} \psi_i \subset U_{\alpha(i)}$. Então vemos que as funções

$$\phi_\alpha = \begin{cases} \sum_{\alpha(i)=\alpha} \psi_i, & \text{se } \{i : \alpha(i) = \alpha\} \neq \varnothing, \\ \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

formam uma partição da unidade, com $\operatorname{supp} \phi_\alpha \subset U_\alpha$, para todo o $\alpha \in A$. □

Corolário 1.9. *Seja $F \subset O \subset M$, com O aberto e F fechado. Existe uma função $\phi \in C^\infty(M)$ tal que:*

(i) $0 \leq \phi(p) \leq 1$ *para todo o* $p \in M$*;*
(ii) $\phi(p) = 1$ *se* $p \in F$*;*
(iii) $\operatorname{supp} \phi \subset O$*.*

Demonstração. Os abertos $\{O, M - F\}$ formam uma cobertura aberta de M. Pelo corolário anterior, existe uma partição da unidade $\{\phi, \psi\}$ com $\sup \phi \subset O$ e $\sup \psi \subset M - F$. A função ϕ satisfaz (i)-(iii). □

Exercícios.

1. Mostre que uma variedade é um espaço normal. Conclua que uma variedade é metrizável.

2. Mostre que uma variedade é um espaço localmente compacto.

3. Mostre que uma variedade é localmente conexa por arcos, e que uma variedade conexa é conexa por arcos.

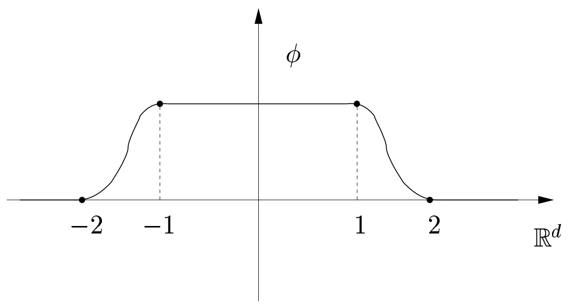
4. Mostre que toda a cobertura aberta de uma variedade M possui uma subcobertura contável.

5. Mostre que toda a variedade M possui uma exaustão compacta.

6. Mostre que existe uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $0 \leq \phi(x) \leq 1$ e:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$$

7. Complete os detalhes do Exemplo 1.2.2 da esfera $\mathbb{S}^d$ (calcule as funções de transição para as projecções estereográficas e verifique que são C^∞).



8. Complete os detalhes do Exemplo 1.2.3 do espaço projectivo $\mathbb{P}^d$ (calcule as funções e verifique que são C^∞). Mostre ainda que:
   (a) $\mathbb{P}^1$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^1$;
   (b) $\mathbb{P}^d - \mathbb{P}^{d-1}$ é difeomorfo ao disco aberto $D^n = \{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| < 1\}$ (identifique $\mathbb{P}^{d-1}$ com o subconjunto $\{[x^0 : \cdots : x^d] : x^d = 0\} \subset \mathbb{P}^d$).

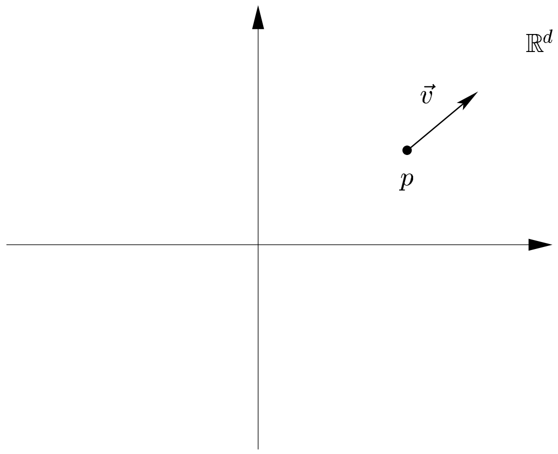
9. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto que satisfaz a seguinte propriedade: para cada $p \in M$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contém p e um homeomorfismo $\psi : V \to M \cap U$, onde $V \subset \mathbb{R}^k$ é um aberto, tal que ψ é uma aplicação diferenciável e para todo o $q \in V$ a derivada $\psi'(q) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ é injectiva. Mostre que M é uma variedade de dimensão k. Diz-se que M é uma k-**superfície** em $\mathbb{R}^n$ e que ψ é uma **parametrização** de M. No caso $k = 1$, dizemos que M é uma **curva**, no caso $k = 2$ dizemos que M é uma **superfície**, e no caso $k = n - 1$ dizemos que M é uma **hipersuperfície**.

10. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto que satisfaz a seguinte propriedade: para cada $p \in M$, existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ que contém p e um difeomorfismo $\Phi : U \to V$ para um aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, tais que:
$$\Phi(U \cap M) = \left\{q \in V : q^{k+1} = \cdots = q^n = 0\right\}.$$
Mostre que M é uma variedade de dimensão k (de facto, M é uma k-superfície em $\mathbb{R}^n$; cf. exercício anterior).

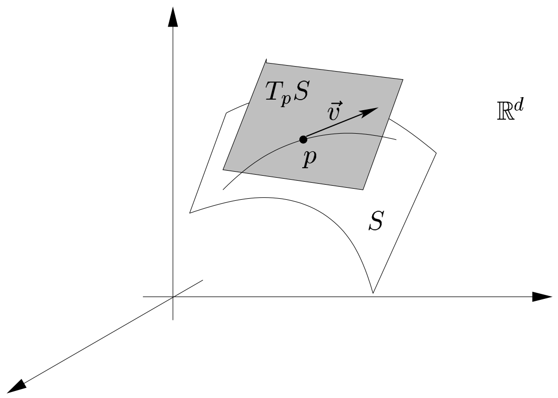
Lição 2. Espaço Tangente e Diferencial

O espaço tangente a $\mathbb{R}^d$ num ponto $p \in \mathbb{R}^d$ é definido como sendo o conjunto
$$T_p\mathbb{R}^d = \left\{(p, \vec{v}) : \vec{v} \in \mathbb{R}^d\right\}.$$

Este espaço tangente admite uma estrutura de espaço vectorial real, em que a adição é definida por:
$$(p, \vec{v}_1) + (p, \vec{v}_2) \equiv (p, \vec{v}_1 + \vec{v}_2),$$
e a multiplicação por escalares é dada por:
$$\lambda(p, \vec{v}) \equiv (p, \lambda\vec{v}).$$
É claro que temos um isomorfismo natural $T_p\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d$, mas, em muitas situações, é preferível pensarmos em $T_p\mathbb{R}^d$ como o conjunto dos vectores com origem em p.



Esta distinção é ainda mais clara no caso de uma k-superfície $S \subset \mathbb{R}^n$ (cf. Exercício 9 da Lição 1). Neste caso, podemos definir o espaço tangente a S num ponto $p \in S$, como sendo o subespaço $T_pS \subset T_p\mathbb{R}^n$, formado pelos vectores tangentes $(p, \vec{v})$, para os quais existe uma curva diferenciável $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, com $c(t) \in S$, $c(0) = p$ e $c'(0) = \vec{v}$.



Observe ainda que um vector tangente $(p, \vec{v})$ actua nas funções diferenciáveis definidas numa vizinhança de p. De facto, se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável num aberto U que contém p, podemos escolher uma curva diferenciável $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, com $c(0) = p$ e $c'(0) = \vec{v}$, e definimos:

$$(p, \vec{v})(f) = \frac{d}{dt} f \circ c(0).$$

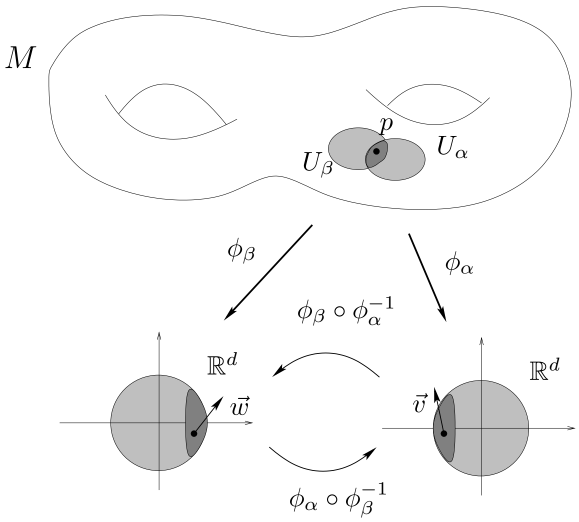
Esta operação não depende da escolha de c. De facto, esta definição não é mais que a **derivada direccional** de f em p na direcção $\vec{v}$.

Vamos agora definir o espaço tangente a uma variedade diferenciável M num ponto $p \in M$. É possível fornecer várias descrições distintas deste espaço tangente, e que correspondem a diferentes pontos de vista, todos eles úteis. Fornecemos aqui três descrições, ficando como exercício mostrar que estas são todas equivalentes.

Descrição 1. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão d, com estrutura diferenciável $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$. A cada ponto $p \in M$, gostaríamos de associar uma cópia de $\mathbb{R}^d$, sendo que cada elemento $\vec{v} \in \mathbb{R}^d$ deverá representar um vector tangente. É claro que se $p \in U_\alpha$, o sistema de coordenadas ϕ_α fornece uma identificação de uma vizinhança de p com $\mathbb{R}^d$. Diferentes sistemas de coordenadas fornecem identificações distintas, estando estas identificações relacionadas pelas funções de transição.

Assim, vamos considerar triplos $(p, \alpha, \vec{v}) \in M \times A \times \mathbb{R}^d$, e no conjunto destes triplos tomamos a seguinte relação de equivalência:

$$[p, \alpha, \vec{v}] = [q, \beta, \vec{w}] \qquad \text{sse} \qquad p = q \;\text{ e }\; (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})'(p) \cdot \vec{w} = \vec{v}.$$



Um **vector tangente** a M num ponto $p \in M$ é uma classe de equivalência $[p, \alpha, \vec{v}]$, e o conjunto dos vectores tangentes em p é o **espaço tangente** em p:

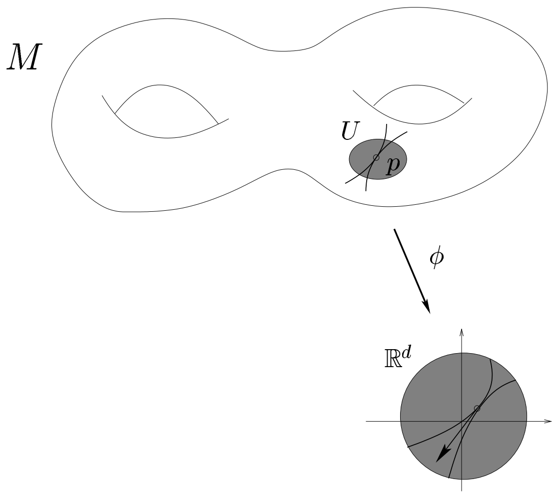
$$T_pM \equiv \left\{ [p, \alpha, \vec{v}] : \alpha \in A, \vec{v} \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Deixamos como exercício simples verificar que T_pM possui uma estrutura natural de espaço vectorial, e que temos ainda um isomorfismo $T_pM \simeq \mathbb{R}^d$, mas este isomorfismo depende agora do sistema de coordenadas utilizado.

Descrição 2. Fixemos $p \in M$. Para esta segunda descrição, vamos considerar curvas diferenciáveis $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, com $c(0) = p$. Vamos ainda identificar duas curvas c_1 e c_2 se, para algum sistema de coordenadas (U, ϕ) com $p \in U$, temos

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ c_1)(0) = \frac{d}{dt}(\phi \circ c_2)(0).$$

É claro que, se esta condição se verifica para um sistema de coordenadas, então também se verifica para todos os outros sistemas de coordenadas da estrutura diferenciável.



Chamamos então **vector tangente** num ponto $p \in M$ a uma classe de equivalência de curvas $[c]$. O conjunto dos vectores tangente a M num ponto p formam o **espaço tangente** T_pM no ponto p. Mais uma vez, deixamos como exercício simples verificar que o espaço tangente possui uma estrutura de espaço vectorial, e que T_pM é isomorfo a $\mathbb{R}^d$ (um isomorfismo que depende da escolha de um sistema de coordenadas).

Descrição 3. As duas descrições anteriores utilizam sistemas de coordenadas. A vantagem da descrição seguinte é que não recorre a sistemas de coordenadas. Esta será a nossa descrição definitiva do espaço tangente e deixamos como exercício verificar que todas estas descrições são equivalentes.

Mais uma vez fixamos um ponto $p \in M$ e consideramos funções diferenciáveis definidas numa vizinhança de p. Dadas duas funções diferenciáveis $f : U \to \mathbb{R}$ e $g : V \to \mathbb{R}$, onde U e V são abertos contendo p, dizemos que elas definem o mesmo **germe** em p, se existe um aberto $W \subset U \cap V$ contendo p e tal que

$$f|_W = g|_W.$$

Designamos por $\mathcal{G}_p$ o conjunto dos germes no ponto p. Este conjunto possui uma estrutura de álgebra sobre $\mathbb{R}$, já que se define adição, produto, e multiplicação por escalares, de forma óbvia:

$$\begin{aligned} [f] + [g] &\equiv [f + g], \\ [f][g] &\equiv [fg], \\ \lambda[f] &\equiv [\lambda f]. \end{aligned}$$

Observe-se, ainda, que faz sentido falar no valor de um germe $[f] \in \mathcal{G}_p$ no ponto p, nomeadamente $f(p)$. Por outro lado, não faz sentido falar no valor de $[f] \in \mathcal{G}_p$ em pontos $q \neq p$.

Definição 2.1. *Um **vector tangente** num ponto $p \in M$ é uma derivação linear de $\mathcal{G}_p$, i.e., é uma aplicação $\mathbf{v} : \mathcal{G}_p \to \mathbb{R}$, tal que:*

(i) $\mathbf{v}([f] + \lambda[g]) = \mathbf{v}([f]) + \lambda\mathbf{v}([g])$*;*
(ii) $\mathbf{v}([f][g]) = \mathbf{v}([f])g(p) + f(p)\mathbf{v}([g])$*;*

Chama-se ***espaço tangente*** *ao conjunto dos vectores tangente no ponto* p *e designa-se por* T_pM*.*

O espaço tangente possui uma estrutura natural de espaço vectorial real, pois se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in T_pM$ são derivações lineares, então $\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2$ também é uma derivação linear, para todo o número real $\lambda \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 2.2.
Seja $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^d)$ *um sistema de coordenadas em* M *com* $p \in U$*. Definimos os vectores tangentes* $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM$*,* $i = 1, \dots, d$*, como sendo as derivações*

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p ([f]) = \left.\frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\phi(p)}.$$

Observe que o vector tangente $\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ *corresponde à direcção obtida variando a coordenada* i *e congelando todas as outras coordenadas*

Para verificar que a dimensão de T_pM é igual a $\dim M$, vamos considerar os germes de funções que se anulam em p

$$\mathcal{M}_p = \{[f] \in \mathcal{G}_p : f(p) = 0\},$$

É fácil verificar que $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{G}_p$ é um ideal maximal de $\mathcal{G}_p$. Definindo as potências

$$\mathcal{M}_p^k = \underbrace{\mathcal{M}_p \cdots \mathcal{M}_p}_{k},$$

obtemos uma torre de ideais:

$$\mathcal{G}_p \supset \mathcal{M}_p \supset \mathcal{M}_p^2 \supset \cdots \supset \mathcal{M}_p^k \supset \dots$$

Observe que o ideal $\mathcal{M}_p^k$ não é mais que o conjunto dos germes de funções que são zero em p até ordem k: se $[f] \in \mathcal{M}_p^k$ e (U, ϕ) é um sistema de coordenadas centrado em p, então a função $f \circ \phi^{-1}$ tem todas as derivadas em p, de ordem menor ou igual a k, nulas.

Teorema 2.3. *O espaço tangente* T_pM *é isomorfo a* $(\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2)^*$ *e tem dimensão* $\dim M$*.*

Demonstração. Observe que, se $[c] \in \mathcal{G}_p$ é o germe da função constante $f(x) = c$, então $\mathbf{v}([c]) = 0$, para todo o vector tangente $\mathbf{v} \in T_pM$. De facto, temos que

$$\mathbf{v}([c]) = c\mathbf{v}([1]),$$

e que

$$\mathbf{v}([1]) = \mathbf{v}([1][1]) = 1\mathbf{v}([1]) + 1\mathbf{v}([1]) = 2\mathbf{v}([1]),$$

logo $\mathbf{v}([1]) = 0$. Assim, se $[f] \in \mathcal{G}_p$ e $c = f(p)$, vemos que

$$\mathbf{v}([f]) = \mathbf{v}([f] - [c]),$$

donde $\mathbf{v}$ fica completamente determinado pelos valores que toma em $\mathcal{M}_p$. Por outro lado, as derivações anulam-se nos germes de $\mathcal{M}_p^2$, pois se $f(p) = g(p) = 0$, então

$$\mathbf{v}([f][g]) = \mathbf{v}([f])g(p) + f(p)\mathbf{v}([g]) = 0.$$

Assim, todo o $\mathbf{v} \in T_pM$ determina uma transformação linear $\mathcal{M}_p \to \mathbb{R}$, que é zero em $\mathcal{M}_p^2$. Reciprocamente, dada uma transformação linear $L \in (\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2)^*$, definimos $\mathbf{v} : \mathcal{G}_p \to \mathbb{R}$ por

$$\mathbf{v}([f]) \equiv L([f] - [f(p)]).$$

É claro que $\mathbf{v}$ é um transformação linear, e verificamos facilmente que é uma derivação. Concluímos, pois, que $T_pM \simeq (\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2)^*$.

Para verificar a dimensão de T_pM, consideramos um sistema de coordenadas $(U, x^1, \ldots, x^d)$ centrado em p, e mostramos que os vectores tangentes

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM, \qquad i = 1, \ldots, d,$$

formam uma base para T_pM. Se $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, então $f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável numa vizinhança da origem. Esta função admite a expansão:

$$f \circ \phi^{-1}(x) = f \circ \phi^{-1}(0) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(0)x^i + \sum_{i,j} g_{ij}(x)x^i x^j,$$

onde os g_{ij} são funções diferenciáveis numa vizinhança de origem. Assim, compondo com ϕ, obtemos a seguinte expansão válida para qualquer $q \in U$:

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{d} \left.\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\phi(p)} x^i(q) + \sum_{i,j} h_{ij}(q)x^i(q)x^j(q),$$

onde $h_{ij} \in C^\infty(U)$. Concluímos que, para qualquer vector tangente $\mathbf{v} \in T_pM$,

$$\mathbf{v}([f]) = \sum_{i=1}^{d} \left.\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\phi(p)} \mathbf{v}([x^i]),$$

ou seja que:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p,$$

onde $a^i = \mathbf{v}([x^i])$. Isto mostra que os $(\partial/\partial x^i)|_p \in T_pM$ formam um conjunto gerador. Deixamos como exercício verificar que são linearmente independentes. □

Daqui em diante, se $\mathbf{v} \in T_pM$ e f é uma função diferenciável definida numa vizinhança de p, definimos

$$\mathbf{v}(f) \equiv \mathbf{v}([f]).$$

É claro que $\mathbf{v}(f) = \mathbf{v}(g)$, se f e g coincidem numa vizinhança de p, e que

$$\mathbf{v}(f + \lambda g) = \mathbf{v}(f) + \lambda\mathbf{v}(g), \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$
$$\mathbf{v}(fg) = f(p)\mathbf{v}(g) + \mathbf{v}(f)g(p),$$

onde $f + \lambda g$ e fg estão definidas na intersecção dos domínios de f e g.

A demonstração do Teorema 2.3 mostra que, se $(U,\phi)=(U,x^1,\dots,x^d)$ é um sistema de coordenadas em p, então qualquer vector tangente $\mathbf{v}\in T_pM$ pode ser escrito na forma

$$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{d} a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

Os $a^i=\mathbf{v}(x^i)$ são as **componentes do vector tangente v** no sistema de coordenadas $(U,x^1,\dots,x^d)$. Introduzindo a notação

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p \equiv \left.\frac{\partial f\circ\phi^{-1}}{\partial x^i}\right|_{\phi(p)},$$

temos, ainda, que

$$\mathbf{v}(f)=\sum_{i=1}^{d} a^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p .$$

Por outro lado, se $(V,y^1,\dots,y^d)$ é outro sistema de coordenadas, segue-se que

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p=\sum_{i=1}^{d}\left.\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

Assim, neste sistema de coordenadas temos

$$\mathbf{v}=\sum_{j=1}^{d} b^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p, \qquad \text{com } b^j=\mathbf{v}(y^j),$$

onde as novas componentes b^j estão relacionadas com as componentes a^i pela fórmula de transformação:

$$a^i=\sum_{j=1}^{d}\left.\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|_p b^j. \tag{2.1}$$

Uma aplicação diferenciável entre duas variedades induz uma transformação linear entre os espaços tangentes respectivos:

Definição 2.4. *Seja $\Psi : M\to N$ uma aplicação diferenciável. Chama-se **diferencial** de Ψ em $p\in M$ à transformação linear $\mathrm{d}_p\Psi : T_pM\to T_{\Psi(p)}N$ definida por*

$$\mathrm{d}_p\Psi(\mathbf{v})(f)\equiv\mathbf{v}(f\circ\Psi),$$

onde f é qualquer função diferenciável definida numa vizinhança de p.

Se $(U,x^1,\dots,x^d)$ é um sistema de coordenadas em p e $(V,y^1,\dots,y^e)$ é um sistema de coordenadas em $\Psi(p)$, obtemos

$$\mathrm{d}_p\Psi\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p=\sum_{j=1}^{e}\left.\frac{\partial(y^j\circ\Psi)}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_{\Psi(p)} .$$

À matriz das derivadas parciais $\frac{\partial(y^j\circ\Psi)}{\partial x^i}$ chamamos **matriz jacobiana** da transformação Ψ em relação aos sistemas de coordenadas escolhidos.

A proposição seguinte segue-se imediatamente das definições e do resultado correspondente para aplicações $\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^e$:

Proposição 2.5 (Regra da Cadeia)**.** *Se $\Psi : M \to N$ e $\Phi : N \to P$ são aplicações diferenciáveis, então a sua composta $\Phi \circ \Psi$ é diferenciável, e temos*

$$\mathrm{d}_p(\Phi \circ \Psi) = \mathrm{d}_{\Psi(p)}\Phi \circ \mathrm{d}_p\Psi.$$

É igualmente fácil verificar o seguinte resultado, que generaliza um resultado bem conhecido:

Proposição 2.6. *Se uma aplicação diferenciável $\Psi : M \to N$ tem diferencial nulo num aberto conexo $U \subset M$, então Ψ é constante em U.*

Um caso especial muito importante é o do diferencial de uma função $f : M \to \mathbb{R}$. Neste caso, o diferencial é uma aplicação linear $\mathrm{d}_p f : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$, e como temos uma identificação canónica $T_x\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$, o diferencial é um elemento do espaço vectorial dual de T_pM.

Definição 2.7. *Chama-se* ***espaço cotangente*** *a M num ponto p ao espaço vectorial T_p^*M dual do espaço tangente T_pM:*

$$T_p^*M \equiv \{\omega : T_pM \to \mathbb{R},\ \textit{com } \omega \textit{ linear}\}.$$

É claro que podemos definir $\mathrm{d}_p f \in T_p^*M$ mesmo que f seja uma função diferenciável definida *apenas* numa vizinhança de p. Por exemplo, uma vez fixado um sistema de coordenadas $(U, x^1, \dots, x^d)$ em p, obtemos elementos

$$\left\{\mathrm{d}_p x^1, \dots, \mathrm{d}_p x^d\right\} \subset T_p^*M.$$

É, ainda, fácil verificar que

$$\mathrm{d}_p x^i \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Logo:

Lema 2.8. $\{\mathrm{d}_p x^1, \dots, \mathrm{d}_p x^d\}$ *é a base dual da base* $\{\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x^d}\right|_p\}$.

Assim, uma vez escolhidas coordenadas locais $(U, x^1, \dots, x^d)$ em p, todo o elemento $\omega \in T_p^*M$ pode ser escrito na base $\left\{\mathrm{d}_p x^1, \dots, \mathrm{d}_p x^d\right\}$:

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} a_i \mathrm{d}_p x^i, \qquad \text{com } a_i = \omega(\left.\partial/\partial x^i\right|_p).$$

Se $(V, y^1, \dots, y^d)$ é outro sistema de coordenadas, temos que

$$\omega = \sum_{j=1}^{d} b_j \mathrm{d}_p y^j, \qquad \text{com } b_j = \omega(\left.\partial/\partial y^j\right|_p),$$

e verifica-se facilmente que

$$a_i = \sum_{j=1}^{d} \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right|_p b_j. \tag{2.2}$$

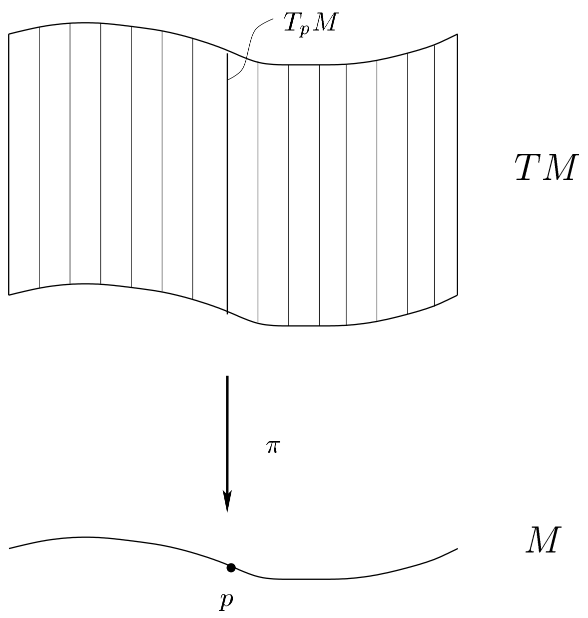
Esta fórmula de transformação de componentes de elementos de T_p^*M deve ser comparada com (2.1), a fórmula correspondente para elementos de T_pM.

Como veremos adiante, é útil considerar a família de todos os espaços tangentes (ou cotangentes) a M. Assim, definimos o **fibrado tangente** e o **fibrado cotangente** de M por

$$TM \equiv \bigcup_{p\in M} T_pM, \qquad T^*M \equiv \bigcup_{p\in M} T_p^*M.$$

Temos projecções naturais $\pi : TM \to M$ e $\pi : T^*M \to M$, que a um vector tangente $\mathbf{v} \in T_pM$ e a um covector $\omega \in T_p^*M$ associam o seu ponto base $\pi(\mathbf{v}) = p = \pi(\omega)$. A designação "fibrado" vem do facto que podemos pensar em TM (ou T^*M) como um conjunto de fibras (os espaços T_pM ou T_p^*M), justapostos uns com os outros, e formando uma variedade:

Proposição 2.9. *TM e T^*M possuem estruturas naturais de variedades diferenciáveis de dimensão $2\dim M$, tais que as projecções na base são aplicações diferenciáveis.*



Demonstração. Consideramos o caso de TM, deixando a demonstração de que T^*M é uma variedade como exercício.

Seja $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ a estrutura diferenciável de M. Para cada sistema de coordenadas $(U_\alpha, \phi_\alpha) = (U_\alpha, x^1, \ldots, x^n)$, definimos a aplicação $\tilde{\phi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to \mathbb{R}^{2d}$ por

$$\tilde{\phi}_\alpha(\mathbf{v}) = (x^1(\pi(\mathbf{v})), \ldots, x^d(\pi(\mathbf{v})), \mathrm{d}_{\pi(\mathbf{v})}x^1(\mathbf{v}), \ldots, \mathrm{d}_{\pi(\mathbf{v})}x^d(\mathbf{v})).$$

Verificamos, facilmente, que:

(a) A colecção $\left\{\tilde{\phi}_\alpha^{-1}(O) : O \subset \mathbb{R}^{2d} \text{ aberto}, \alpha \in A\right\}$ é uma base para uma topologia de TM, que faz de TM um espaço localmente euclidiano, Hausdorff, e que satisfaz o segundo axioma.

(b) Para quaisquer sistemas de coordenadas (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) de M, a função $\tilde{\phi}_\beta \circ \tilde{\phi}_\alpha^{-1}$ é de classe C^∞.

Assim, se tomarmos a colecção maximal de sistemas de coordenadas compatíveis com a colecção $\left\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde{\phi}_\alpha) : \alpha \in A\right\}$, obtemos uma estrutura de variedade em TM. Para esta estrutura, temos que $\dim TM = 2\dim M$, e a aplicação $\pi : TM \to M$ é diferenciável. $\square$

Se $\Psi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, escrevemos $\mathrm{d}\Psi : TM \to TN$ para representar a aplicação entre fibrados tangentes definida por

$$\mathrm{d}\Psi(\mathbf{v}) \equiv \mathrm{d}_{\pi(\mathbf{v})}\Psi(\mathbf{v}).$$

A esta aplicação chamamos ainda o **diferencial** de Ψ. Deixamos como exercício verificar que $\mathrm{d}\Psi : TM \to TN$ é uma aplicação diferenciável entre as variedades diferenciáveis TM e TN.

Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $(U, x^1, \ldots, x^d)$ é um sistema de coordenadas em p, então $\mathrm{d}_p f \in T_p^*M$ e, pela definição, obtemos:

$$\mathrm{d}_p f \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_p .$$

Concluímos, pois, que a expressão para o diferencial nas coordenadas locais $(x^1, \ldots, x^d)$ é:

$$\mathrm{d}f|_U = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i.$$

Observe que nesta fórmula todos os termos estão bem definidos (ao contrário de algumas manipulações clássicas com expressões do tipo $\mathrm{d}f$, que podem ser encontradas nalguns livros de texto).

Exercícios.

1. Mostre que as três descrições de vectores tangentes fornecidas nesta lição são equivalentes.

2. Considere em $\mathbb{R}^3$ as coordenadas cartesianas usuais (x, y, z). As coordenadas esféricas (U, ϕ), onde $U = \mathbb{R}^3 - \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$ e $\phi = (r, \theta, \varphi)$, são definidas, como é usual, por
   - $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância à origem;
   - $\theta(x, y, z)$ é a longitude , i.e., o ângulo em $]0, 2\pi[$ entre o vector $(x, y, 0)$ e o eixo Ox;
   - $\varphi(x, y, z)$ é a co-latitude, i.e., o ângulo em $]0, \pi[$ entre o vector (x, y, z) e o eixo Oz.

   Calcule:
   (a) As componentes do vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$ $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}$ em coordenadas cartesianas;
   (b) As componentes do vectores tangentes a $\mathbb{R}^3$ $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ em coordenadas esféricas.

3. Considere uma k-superfície $M \subset \mathbb{R}^n$ (Exercício 9 da Lição 1). Mostre que, se $\psi : V \to M \cap U$ é uma parametrização de uma vizinhança de $p \in M$, então o espaço tangente T_pM pode ser identificado com o subespaço $\psi'(q)(\mathbb{R}^k) \subset \mathbb{R}^n$.

4. Seja $(U, x^1, \ldots, x^d)$ um sistema de coordenadas locais na variedade M. Mostre que os vectores tangentes
$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \in T_pM, \qquad i = 1, \ldots, d,$$
são linearmente independentes.

5. Mostre que T^*M possui uma estrutura natural de variedade diferenciável de dimensão $2\dim M$, tal que a projecção na base é uma aplicação diferenciável.

6. Verifique que, se M e N são variedades diferenciáveis e $\Psi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, então $\mathrm{d}\Psi : TM \to TN$ é uma aplicação diferenciável.

Lição 3. Imersões e Subvariedades

As propriedades do diferencial de uma aplicação entre variedades reflectem as propriedades locais da aplicação. A seguinte definição distingue os tipos principais de aplicações diferenciáveis:

Definição 3.1. *Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável.*
(a) Ψ diz-se uma ***imersão*** *se $\mathrm{d}_p\Psi : T_pM \to T_{\Psi(p)}N$ é injectiva, para todo o $p \in M$;*
(b) Ψ diz-se uma ***submersão*** *se $\mathrm{d}_p\Psi : T_pM \to T_{\Psi(p)}N$ é sobrejectiva, para todo o $p \in M$;*
(a) Ψ diz-se uma ***étale***[1] *se $\mathrm{d}_p\Psi : T_pM \to T_{\Psi(p)}N$ é um isomorfismo, para todo o $p \in M$.*

As imersões, submersões, e étales, possuem formas canónicas locais. Todas elas são casos especiais do seguinte resultado geral:

Teorema 3.2 (Teorema do Rank). *Seja $\Psi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável e $p \in M$. Se a aplicação $\mathrm{d}_q\Psi : T_qM \to T_{\Psi(q)}N$ tem rank constante r, para todo o q numa vizinhança de p, então existem coordenadas locais $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^d)$ centradas em p e coordenadas locais $(V, \psi) = (V, y^1, \ldots, y^e)$ centradas em $\Psi(p)$, tais que:*
$$\psi \circ \Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \ldots, x^d) = (x^1, \ldots, x^r, 0, \ldots, 0).$$

Demonstração. Seja $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ e $(\tilde{V}, \tilde{\psi})$ coordenadas locais centradas em p e em $\Psi(p)$, respectivamente. A aplicação $\tilde{\psi} \circ \Psi \circ \tilde{\phi}^{-1}$ é uma aplicação de uma vizinhança de zero em $\mathbb{R}^d$ numa vizinhança de zero em $\mathbb{R}^e$, cujo diferencial tem rank constante. Assim, basta considerar o caso em que $\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e$ é uma aplicação
$$(x^1, \ldots, x^d) \mapsto (\Psi^1(x), \ldots, \Psi^e(x)),$$
com diferencial de rank constante numa vizinhança da origem.

Designando por r o rank de $\mathrm{d}\Psi$, podemos então assumir, eventualmente após um reordenamento das coordenadas, que
$$\det \left[\frac{\partial \Psi^j}{\partial x^i}\right]_{i,j=1}^{r} (0) \neq 0.$$

[1] Usamos este termo provisoriamente. Veremos mais adiante que uma étale não é mais que um difeomorfismo local (ver Corolário 3.5).

Segue-se, do Teorema da Função Inversa, que a aplicação $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definida por

$$(x^1, \dots, x^d) \to (\Psi^1(x), \dots, \Psi^r(x), x^{r+1}, \dots, x^d),$$

é um difeomorfismo numa vizinhança da origem. É fácil de ver que:

$$\Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^d) = (x^1, \dots, x^r, *, \dots, *).$$

Se q é um ponto qualquer do domínio de $\Psi \circ \phi^{-1}$, calculamos a matriz jacobiana desta transformação:

$$(\Psi \circ \phi^{-1})'(q) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline * & \frac{\partial(\Psi^j \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(q) \end{array} \right],$$

onde I_r é a matriz identidade $r \times r$ e no canto inferior direito $i, j > r$. Como esta matriz tem rank precisamente r, concluímos que

$$\frac{\partial(\Psi^j \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(q) = 0, \text{ se } i, j > r.$$

Ou seja, as componentes $\Psi^j \circ \phi^{-1}$, para $j > r$, não dependem de $x^{r+1}, \dots, x^d$:

$$\Psi^j \circ \phi^{-1}(x) = \Psi^j \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^r), \quad \text{se } j > r.$$

Assim, se considerarmos a aplicação $\psi : \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^e$ dada por

$$\psi(y^1, \dots, y^e) = (y^1, \dots, y^r, y^{r+1} - \Psi^{r+1} \circ \phi^{-1}(y), \dots, y^e - \Psi^e \circ \phi^{-1}(y)),$$

temos, por um lado, que ψ é um difeomorfismo numa vizinhança da origem, pois a sua matriz jacobiana é dada por

$$\psi'(0) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline * & I_{e-r} \end{array} \right],$$

donde é não singular. Por outro lado, verificamos facilmente que

$$\psi \circ \Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^d) = (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0).$$

□

Um corolário imediato é que uma imersão de uma variedade de dimensão d numa variedade de dimensão e é, localmente, como a *inclusão* $\mathbb{R}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^e$:

Corolário 3.3. *Se $\Psi : M \to N$ é uma imersão, então, para todo o $p \in M$, existem coordenadas locais $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^d)$ centradas em p e coordenadas locais $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^e)$ centradas em $\Psi(p)$, tais que:*

$$\psi \circ \Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^d) = (x^1, \dots, x^d, 0, \dots, 0).$$

De igual forma, obtemos que uma submersão de uma variedade de dimensão d numa variedade de dimensão e é, localmente, como a *projecção* $\mathbb{R}^d \twoheadrightarrow \mathbb{R}^e$:

Corolário 3.4. *Se $\Psi : M \to N$ é uma submersão, então, para todo o $p \in M$, existem coordenadas locais $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^d)$ centradas em p e coordenadas locais $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^e)$ centradas em $\Psi(p)$, tais que:*

$$\psi \circ \Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^d) = (x^1, \dots, x^e).$$

Visto que uma étale não é mais que uma aplicação que é, simultaneamente, uma imersão e uma submersão, combinando estes dois resultados vemos que uma étale é a mesma coisa que um difeomorfismo local:

Corolário 3.5. *Se $\Psi : M \to N$ é uma étale, então, para todo o $p \in M$, existem existem coordenadas locais $(U, \phi) = (U, x^1, \dots, x^d)$ centradas em p e coordenadas locais $(V, \psi) = (V, y^1, \dots, y^d)$ centradas em $\Psi(p)$, tais que:*

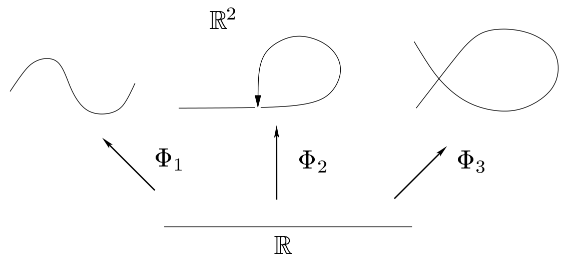
$$\psi \circ \Psi \circ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^d) = (x^1, \dots, x^d).$$

Vejamos agora os sub-objectos da categoria diferenciável:

Definição 3.6. *Uma* ***subvariedade*** *de uma variedade M é um par (N, Φ), onde N é uma variedade e $\Phi : N \to M$ é uma imersão injectiva.*

Por vezes, usa-se o termo **subvariedade imersa** para acentuar que $\Phi : N \to M$ é uma imersão. Quando $\Phi : N \to M$ é um mergulho, i.e., quando $\Phi : N \to \Phi(N)$ é um homeomorfismo, onde em $\Phi(N) \subset M$ tomamos a topologia relativa, dizemos que (N, Φ) é uma **subvariedade mergulhada**.

Exemplo 3.7.
A figura seguinte ilustra várias imersões de $N = \mathbb{R}$ em $M = \mathbb{R}^2$. Observe que $(\mathbb{R}, \Phi_1)$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^2$, enquanto que $(\mathbb{R}, \Phi_2)$ é uma subvariedade imersa de $\mathbb{R}^2$. Por seu turno, Φ_3 é uma imersão que não é injectiva, logo $(\mathbb{R}, \Phi_3)$ não é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$.



A forma canónica para imersões (Corolário 3.3), implica imediatamente a

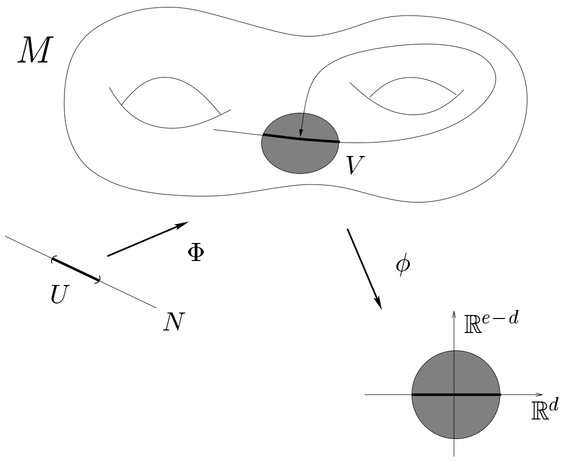
Proposição 3.8. *Seja (N, Φ) uma subvariedade de dimensão d de uma variedade M. Para todo o $p \in N$, existe um sistema de coordenadas local $(V, x^1, \dots, x^e)$ de M centrado em $\Phi(p)$, e uma vizinhança U de p, tal que*

$$\Phi(U) = \left\{ q \in V : x^{d+1}(q) = \cdots = x^e(q) = 0 \right\}.$$

Note-se que (na notação da proposição) em geral $\Phi(N) \cap V \neq \Phi(U)$, e portanto podem existir outros pontos em $\Phi(N) \cap V$ que *não pertencem* à fatia $\left\{ q \in V : x^{d+1}(q) = \cdots = x^e(q) = 0 \right\}$. No entanto, quando (N, Φ) é uma subvariedade mergulhada temos:

Corolário 3.9. *Seja (N, Φ) uma subvariedade mergulhada, de dimensão d, de uma variedade M. Para todo o $p \in N$, existe um sistema de coordenadas $(V, x^1, \dots, x^e)$ de M centrado em $\Phi(p)$, tal que:*

$$\Phi(N) \cap V = \left\{ q \in V : x^{d+1}(q) = \cdots = x^e(q) = 0 \right\}.$$



Demonstração. Fixe-se $p \in N$ e escolha-se um sistema de coordenadas $(V', x^1, \ldots, x^e)$ em $\Phi(p)$ e uma vizinhança U de p como na proposição. Como (N, Φ) é uma subvariedade mergulhada, $\Phi(U)$ é um aberto de $\Phi(N)$ para a topologia relativa, logo existe um aberto $V'' \subset M$ tal que $\Phi(U) = V'' \cap \Phi(N)$. Tomando $V = V' \cap V''$ e as restrições de x^i a V, obtemos um sistema de coordenadas $(V, x^1, \ldots, x^e)$ tal que:

$$\Phi(N) \cap V = \left\{ q \in V : x^{d+1}(q) = \cdots = x^e(q) = 0 \right\}.$$

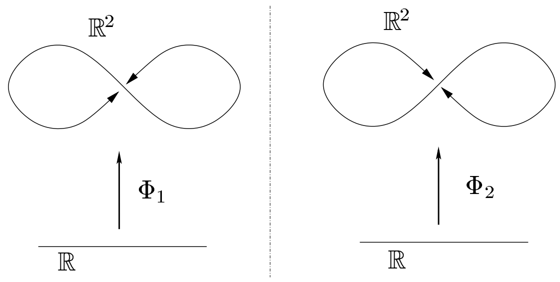
□

Se (N, Φ) é uma subvariedade de M e $\Psi : P \to M$ é uma aplicação diferenciável tal que $\Psi(P) \subset \Phi(N)$, então, como Φ é injectiva, Ψ factoriza-se por uma aplicação $\hat{\Psi} : P \to N$, i.e., temos o diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, dashed, "\hat{\Psi}"'] & M \\ & N \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Em geral, a aplicação $\hat{\Psi}$ *não é* diferenciável.

Exemplo 3.10.
Considere as seguintes duas imersões injectivas $\Phi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, cujas imagens em $\mathbb{R}^2$ coincidem (o oito deitado):



Como $\Phi_1(\mathbb{R}) = \Phi_2(\mathbb{R})$, temos aplicações induzidas $\hat{\Phi}_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\hat{\Phi}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. É fácil verificar que $\hat{\Phi}_1$ e $\hat{\Phi}_2$ não são contínuas, logo não são diferenciáveis.

A proposição seguinte mostra que o que pode falhar é precisamente a continuidade:

Proposição 3.11. *Seja (N, Φ) uma subvariedade de M, $\Psi : P \to M$ uma aplicação diferenciável tal que $\Psi(P) \subset \Phi(N)$, e $\hat{\Psi} : P \to N$ a aplicação induzida.*

(i) Se $\hat{\Psi}$ é contínua então é diferenciável.

(ii) Se Φ é um mergulho então $\hat{\Psi}$ é contínua (logo diferenciável).

Demonstração. Suponha-se que $\hat{\Psi}$ é contínua. Para todo o $p \in N$, escolhemos $U \subset N$ e $(V, \phi) = (V, x^1, \dots, x^e)$ como na Proposição 3.8, e definimos a aplicação diferenciável $\psi = \pi \circ \phi \circ \Phi : U \to \mathbb{R}^d$, onde $\pi : \mathbb{R}^e \to \mathbb{R}^d$ é a projecção $(x^1, \dots, x^e) \mapsto (x^1, \dots, x^d)$. O par (U, ψ) é um sistema de coordenadas de N centrado em p. Por outro lado, vemos que

$$\psi \circ \hat{\Psi} = \pi \circ \phi \circ \Phi \circ \hat{\Psi} = \pi \circ \phi \circ \Psi,$$

é diferenciável no aberto $\hat{\Psi}^{-1}(U)$. Como os abertos $\hat{\Psi}^{-1}(U)$ cobrem P, concluímos que $\hat{\Psi}$ é diferenciável, e que (i) se verifica.

Se Φ é um mergulho, então todo o aberto $U \subset N$ é da forma $\Phi^{-1}(V)$, onde $V \subset M$ é um aberto. Assim, $\hat{\Psi}^{-1}(U) = \hat{\Psi}^{-1}(\Phi^{-1}(V)) = \Psi^{-1}(V)$ é aberto. Concluímos pois que $\hat{\Psi}$ é contínua e que (ii) também se verifica. □

Estes comentários justificam a seguinte definição:

Definição 3.12. *Uma **subvariedade inicial** de M é uma subvariedade (N, Φ) tal que toda a aplicação diferenciável $\Psi : P \to M$ com $\Psi(P) \subset \Phi(N)$ se factoriza por uma aplicação $\hat{\Psi} : P \to N$ diferenciável:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, dashed, "\hat{\Psi}"'] & M \\ & N \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

Existem subvariedades iniciais que não são mergulhadas. Deixamos aqui um exemplo simples, e veremos outros exemplos importantes mais tarde.

Exemplo 3.13.
No 2-toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ temos uma família de subvariedades $(\mathbb{R}, \Phi_a)$, dependendo de um parâmetro $a \in \mathbb{R}$, definidas por:

$$\Phi_a(t) = (e^{it}, e^{iat}).$$

Se $a = m/n$ é racional esta curva é fechada e, portanto, é uma variedade mergulhada (uma espiral fechada que dá m voltas na direcção de um dos ciclos geradores e n voltas na direcção do outro ciclo).

Se a é irracional, esta curva é densa no toro, logo é uma variedade imersa. Neste caso, dada uma aplicação $\hat{\Psi} : P \to \mathbb{R}$, tal que a composta $\Phi_a \circ \hat{\Psi}$ é C^∞, pode mostar-se que $\hat{\Psi} : P \to \mathbb{R}$ é contínua (exercício). Pela Proposição 3.11, concluímos que $\hat{\Psi}$ é C^∞. Assim, $(\mathbb{R}, \Phi_a)$ é uma variedade inicial.

Quando pensamos numa subvariedade de M pensamos usualmente num subconjunto de M. Para justificar até que ponto isto é válido, introduzimos a seguinte relação de equivalência:

Definição 3.14. *Dizemos que (N_1, Φ_1) e (N_2, Φ_2) são* ***subvariedades equivalentes*** *de M se existir um difeomorfismo $\Psi : N_1 \to N_2$ tal que o diagrama seguinte comuta:*

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, "\Phi_1"] \arrow[dr, dashed, "\Psi"'] & M \\ & N_2 \arrow[u, "\Phi_2"'] \end{tikzcd}$$

Se (N, Φ) é uma subvariedade de M, podemos considerar $\Phi(N) \subset M$ com a única estrutura de variedade, tal que $\hat{\Phi} : N \to \Phi(N)$ é um difeomorfismo. Para esta estrutura diferenciável em $\Phi(N)$, a inclusão $i : \Phi(N) \hookrightarrow M$ é uma imersão injectiva, e o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\hat{\Phi}"'] & M \\ & \Phi(N) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Assim, toda a subvariedade (N, Φ) possui um único representante (A, i), onde $A \subset M$ é um subconjunto e $i : A \hookrightarrow M$ é a inclusão. Dizemos, então, que o subconjunto $A \subset M$ é uma subvariedade.

Exemplo 3.15.

Se $A \subset M$ é um subconjunto, em geral, não existe uma estrutura diferenciável em A, tal que a inclusão $i : A \hookrightarrow M$ é uma imersão. É o que se passa, por exemplo, com o subconjunto $A = \{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$ (exercício).

Por outro lado, se existir uma estrutura diferenciável em A, tal que a inclusão $i : A \hookrightarrow M$ é uma imersão, ela pode não ser única. É o que se passa, por exemplo, com o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ em forma de oito do Exemplo 3.10.

Proposição 3.16. *Seja $A \subset M$ um subconjunto de uma variedade diferenciável e $i : A \hookrightarrow M$ a inclusão. Então:*

(i) Fixada uma topologia em A, existe no máximo uma estrutura diferenciável para esta topologia tal que (A, i) é uma subvariedade de M.
(ii) Se, para a topologia relativa em A, existe uma estrutura diferenciável tal que (A, i) é uma subvariedade de M, então esta é a única topologia em A para a qual existe uma estrutura diferenciável tal que (A, i) é uma subvariedade de M.

Demonstração. Observe que (i) segue-se imediatamente da Proposição 3.11 (i). Por outro lado, para verificar (ii), seja (N, Φ) uma subvariedade com $\Phi(N) = A$, e considere-se o diagrama:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\hat{\Phi}"'] & M \\ & A \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Como A possui a topologia relativa, pela Proposição 3.11 (i), $\hat{\Phi}$ é diferenciável. Assim, $\hat{\Phi}$ é uma imersão bijectiva, logo é um difeomorfismo (exercício). Concluímos que (N, Φ) é equivalente a (A, i), e (ii) segue-se. $\square$

Se (N, Φ) é uma subvariedade de M, então, para qualquer $p \in N$, a aplicação $\mathrm{d}_p\Phi : T_pN \to T_{\Phi(p)}M$ é injectiva. Assim, podemos identificar o espaço tangente T_pN com a imagem $\mathrm{d}_p\Phi(T_pN)$, que é um subespaço de $T_{\Phi(p)}M$. Daqui em diante usamos esta identificação, de forma que T_pN será sempre visto como um subespaço de $T_{\Phi(p)}M$.

Exercícios.

1. Mostre que o conjunto $\{(x, |x|) : x \in \mathbb{R}\}$ *não* é a imagem de uma imersão $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

2. Mostre que existe um difeomorfismo $\Psi : T\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3$, que torna o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} T\mathbb{S}^3 \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 \arrow[dl, "\tau"] \\ & \mathbb{S}^3 & \end{tikzcd}$$

onde $\tau : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{S}^3$ é a projecção no primeiro factor, e tal que a restrição $\Psi : T_p\mathbb{S}^3 \to \mathbb{R}^3$ é linear.

3. Seja $\{y^1, \dots, y^e\}$ um conjunto de funções diferenciáveis de uma variedade M. Mostre que:
   (a) Se $\{\mathrm{d}_py^1, \dots, \mathrm{d}_py^e\} \subset T_p^*M$ é linearmente independente, então as funções $\{y^1, \dots, y^e\}$ são parte de um sistema de coordenadas em p.
   (b) Se $\{\mathrm{d}_py^1, \dots, \mathrm{d}_py^e\} \subset T_p^*M$ é um conjunto gerador, então um subconjunto de $\{y^1, \dots, y^e\}$ é um sistema de coordenadas em p.
   (c) Se $\{\mathrm{d}_py^1, \dots, \mathrm{d}_py^e\} \subset T_p^*M$ é uma base, então as funções $\{y^1, \dots, y^e\}$ formam um sistema de coordenadas numa vizinhança de p.

4. Mostre que uma submersão é uma aplicação aberta. O que pode dizer sobre uma imersão?

5. Seja $\Phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$\Phi([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(yz, xz, xy).$$

Mostre que Φ é uma aplicação diferenciável e verifique que é uma imersão quando restrita a $\mathbb{P}^2$ excepto exactamente 6 pontos. Esboce a imagem de Φ.

6. Seja M uma variedade, $A \subset M$, e $i : A \hookrightarrow M$ a inclusão canónica. Mostre que (A, i) é uma subvariedade de M, mergulhada, de dimensão d sse, para cada $p \in A$, existe um sistema de coordenadas $(U, x^1, \dots, x^e)$ centrado em p tal que

$$A \cap U = \left\{p \in U : x^{d+1}(p) = \cdots = x^e(p) = 0\right\}.$$

7. Mostre que um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma k-superfície sse é uma subvariedade mergulhada.

8. Mostre que a subvariedade $(\mathbb{R}, \Phi_a)$ do Exemplo 3.13 é uma subvariedade inicial.

9. Dizemos que um subconjunto S de uma variedade M tem **medida nula** se, para todo o sistema de coordenadas (U, ϕ) de M, o conjunto $\phi(S \cap U) \subset \mathbb{R}^d$ tem medida nula. Mostre que, se $\Phi : N \to M$ é uma imersão, então:
(a) Φ leva conjuntos de medida nula em conjuntos de medida nula;
(b) Se $\dim N < \dim M$ então $\Phi(N)$ tem medida nula.

10. Mostre que, se (N, Φ) é uma subvariedade de M, com $\Phi : N \to M$ uma aplicação própria (i.e., $\Phi^{-1}(K) \subset N$ é compacto, sempre que $K \subset M$ é compacto), então N é uma subvariedade mergulhada. Conclua que se N é compacta, então N é uma subvariedade mergulhada.

11. Mostre que uma imersão bijectiva $\Phi : N \to M$ é um difeomorfismo. Se N não possui uma base contável, mostre que isto pode ser falso.

12. Seja $\pi : \widetilde{M} \to M$ um revestimento de uma variedade diferenciável M (com $\widetilde{M}$ conexa). Mostre que existe uma única estrutura de variedade diferenciável em $\widetilde{M}$ para a qual a aplicação de revestimento é um difeomorfismo local.

Lição 4. Mergulhos e o Teorema de Whitney

Definição 4.1. *Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável.*
(i) $p \in M$ diz-se ***ponto regular*** *de Ψ se $\mathrm{d}_p\Psi : T_pM \to T_{\Psi(p)}N$ é sobrejectiva. Caso contrário, dizemos que p é* ***ponto singular*** *de Ψ;*
(ii) $q \in N$ diz-se ***valor regular*** *de Ψ se todo o $p \in \Psi^{-1}(q)$ é um ponto regular. Caso contrário, dizemos que q é* ***valor singular*** *de Ψ.*

O seguinte exemplo justifica o uso dos termos "regular" e "singular".

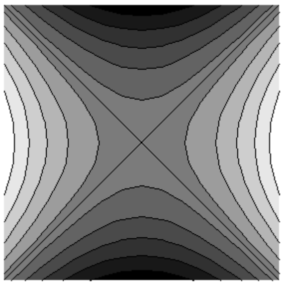
Exemplo 4.2.
Considere a aplicação $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\Phi(x, y) = x^2 - y^2.$$

A matriz jacobiana desta aplicação é dada por:

$$\Phi'(x, y) = [2x \ 2y].$$

Os pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ são pontos regulares de ϕ, enquanto que $(0, 0)$ é um ponto singular. Portanto, 0 é um valor singular de Φ e todos os outros valores são regulares.



Se considerarmos um valor regular $c \neq 0$, o conjunto de nível $\Phi^{-1}(c)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^2$ (uma hipérbole). Por outro lado, para o valor singular 0, vemos que $\Phi^{-1}(0)$ é a união das duas rectas $x = \pm y$, que não é uma variedade (na origem $(0,0)$ as rectas cruzam-se).

De facto, para valores regulares, os conjuntos de nível são sempre subvariedades:

Teorema 4.3. *Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $q \in N$ um valor regular. Então $\Psi^{-1}(q) \subset M$ é uma subvariedade mergulhada de dimensão* $\dim M - \dim N$.

Demonstração. Se $q \in N$ é um valor regular de Ψ, então existe um aberto $\Psi^{-1}(q) \subset O \subset M$ tal que $\Psi|_O$ é uma submersão. Assim, para qualquer $p \in \Psi^{-1}(q)$, existem coordenadas $(U, x^1, \dots, x^d)$ em p e coordenadas $(V, y^1, \dots, y^e)$ em q, tais que nestas coordenadas Ψ é representada pela projecção

$$\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^e : \ (x^1, \dots, x^d) \mapsto (x^1, \dots, x^e).$$

Temos então que

$$\Psi^{-1}(q) \cap U = \left\{ p \in U : x^1(p) = \cdots = x^e(p) = 0 \right\}.$$

Assim, por um exercício da Lição 3, $\Psi^{-1}(q)$ é uma subvariedade mergulhada de dimensão $d - e = \dim M - \dim N$. $\square$

Se $N \subset M$ é uma subvariedade, chamamos **codimensão** de N ao inteiro $\dim M - \dim N$. Se pensarmos num conjunto com um só ponto como uma variedade de dimensão 0, o resultado anterior afirma que, se q é um valor regular de Ψ, então $\Psi^{-1}(q)$ é uma subvariedade mergulhada com $\operatorname{codim} \Psi^{-1}(q) = \operatorname{codim} \{q\}$. Este resultado admite a seguinte generalização:

Teorema 4.4. *Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $Q \subset N$ uma subvariedade mergulhada. Suponha-se que, para todo o $p \in \Psi^{-1}(Q)$, se verifica*

$$\operatorname{Im} \mathrm{d}_p \Psi + T_{\Psi(p)} Q = T_{\Psi(p)} N. \tag{4.1}$$

Então $\Psi^{-1}(Q) \subset M$ é uma subvariedade mergulhada e $\operatorname{codim} \Psi^{-1}(Q) = \operatorname{codim} Q$.

Demonstração. Seja $p_0 \in \Psi^{-1}(Q)$ e $q_0 = \Psi(p_0)$. Como $Q \subset N$ é uma subvariedade mergulhada, existem coordenadas $(V, \phi) = (V, y^1, \dots, y^d)$ para N em q_0, tais que

$$Q \cap V = \left\{ q \in V : y^{l+1}(q) = \cdots = y^d(q) = 0 \right\},$$

onde $l = \dim Q$. Considere-se a aplicação $\Phi : \Psi^{-1}(V) \to \mathbb{R}^{d-l}$ dada por

$$\Phi = (y^{l+1} \circ \Psi, \dots, y^d \circ \Psi).$$

Temos que $U = \Psi^{-1}(V)$ é um aberto de M contendo p_0 e $\Psi^{-1}(Q) \cap U = \Phi^{-1}(0)$. Se verificarmos que 0 é um valor regular de Φ, então segue-se que, para todo o $p_0 \in \Psi^{-1}(Q)$, existe um aberto $U \subset M$ tal que $\Psi^{-1}(Q) \cap U$ é uma subvariedade mergulhada de M, com codimensão $d - l = \operatorname{codim} Q$. Isto mostra que $\Psi^{-1}(Q)$ é uma subvariedade mergulhada de M.

Observe-se que $\Phi = \pi\circ\phi\circ\Psi$, onde $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-l}$ é a projecção nas últimas $d-l$ componentes. É claro que $\pi\circ\phi$ é uma submersão, e que $\ker d_q(\pi\circ\phi) = T_qQ$, para $q \in Q\cap V$. Por (4.1), segue-se que $\mathrm{d}_p\Phi = d_{\Psi(p)}(\pi\circ\phi)\cdot \mathrm{d}_p\Psi$ é sobrejectiva, para todo o $p \in \Psi^{-1}(Q)\cap U = \Phi^{-1}(0)$, i.e., 0 é um valor regular de Φ. □

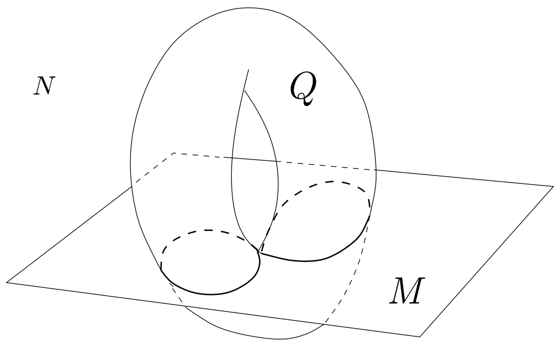
Quando a condição (4.1) é satisfeita, dizemos que Ψ é **transversal** à subvariedade $Q\subset N$, e escrevemos $\Psi \pitchfork Q$. Um caso especial que justifica este nome, é o caso em que $M\subset N$ é uma subvariedade e $\Psi : M \hookrightarrow N$ é a inclusão. Neste caso, $\Psi^{-1}(Q) = M\cap Q$ é a intersecção das duas subvariedades, e a condição de transversalidade reduz-se a

$$T_qM + T_qQ = T_qN, \quad \forall q\in M\cap Q.$$

Em vez de $\Psi\pitchfork Q$ escrevemos $M\pitchfork Q$. Se esta condição se verifica, então $M\cap Q$ é uma subvariedade e

$$\dim M\cap Q = \dim M + \dim Q - \dim N.$$

Por outro lado, quando a intersecção não é transversal, em geral, $M\cap Q$ não é uma variedade, como se ilustra na figura seguinte.



Exemplos 4.5.

1. *Seja $M = \mathbb{R}^{d+1}$ e $\Psi : \mathbb{R}^{d+1}\to\mathbb{R}$ a aplicação:*

$$\Psi(x) = ||x||^2.$$

A matriz jacobiana de Ψ é dada por

$$\Psi'(x) = [2x^1, \dots, 2x^{d+1}].$$

Como $\Psi'(x)$ tem rank 1, se $||x|| > 0$, concluímos que todo o c => 0 é um valor regular de Ψ, e que a esfera $\mathbb{S}^d = \Psi^{-1}(1)$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Note que, para a estrutura diferenciável em $\mathbb{S}^d$ definida na Lição 1, $\mathbb{S}^d$ também é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{d+1}$. Logo, essa estrutura diferencial coincide necessariamente com esta.

2. *Seja $M = \mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ um cilindro. Podemos mergulhar M em $\mathbb{R}^3$ da seguinte forma: tomamos a aplicação $\Phi : M\to\mathbb{R}^3$ definida por:*

$$\Phi(\theta, t) = (R\cos\theta, R\,\mathrm{sen}\,\theta, t),$$

onde identificamos $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Esta aplicação é injectiva, e a matriz jacobiana $\Phi'(\theta,t)$ tem rank 2, logo Φ é uma imersão injectiva.

A imagem de Φ é o conjunto

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=R^2\right\}=\Psi^{-1}(c),$$

onde $c=R^2$ e $\Psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ é a aplicação diferenciável

$$\Psi(x,y,z)=x^2+y^2.$$

Como $\Psi'(x,y,z)=[2x,2y,0]\neq 0$ se $x^2+y^2=c\neq 0$, concluímos que todo o $c\neq 0$ é um valor regular de Ψ. Assim, o cilindro $\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ é uma variedade que pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^3$.

3. *Tal como no exemplo anterior, o 2-toro $M=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ também pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^3$: identificamos $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e definimos uma aplicação $\Phi:M\to\mathbb{R}^3$ por:*

$$\Phi(\theta,\phi)=((R+r\cos\phi)\cos\theta,(R+r\cos\phi)\operatorname{sen}\theta,r\operatorname{sen}\phi).$$

É fácil de ver que, se $R>r>0$, então Φ é uma imersão injectiva cuja imagem é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$

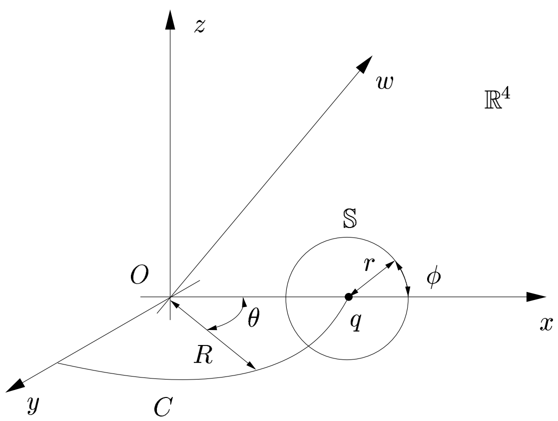
$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x^2+y^2+z^2-R^2-r^2)^2+4R^2z^2=4R^2r^2\right\}=\Psi^{-1}(c),$$

onde $c=4R^2r^2$ e $\Psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ é a aplicação diferenciável

$$\Psi(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2-R^2-r^2)^2+4R^2z^2.$$

Deixamos como exercício verificar que todo o $c\neq 0$ é um valor regular desta aplicação. Portanto, o 2-toro $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ é uma variedade que pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^3$.

4. *A **garrafa de Klein** é o subconjunto $K\subset\mathbb{R}^4$ definido da seguinte forma: Sejam Ox, Oy, Oz, e Ow, os quatro eixos de coordenadas em $\mathbb{R}^4$, e designe por C uma circunferência de raio R no plano xOy. Seja ainda θ o ângulo nesta circunferência, contado a partir do eixo Ox.*



Considerando uma circunferência $\mathbb{S}^1$ no plano xOz, de raio r e com centro q em C, K é obtida rodando esta circunferência em torno do eixo Oz de forma que, quando o seu centro $q\in C$ rodou de um ângulo θ, o plano de $\mathbb{S}^1$ rodou em torno do eixo Oq no 3-espaço $OqOzOw$ de um ângulo $\theta/2$. Designamos por ϕ o ângulo na circunferência $\mathbb{S}^1$, medido a partir do eixo Oq.

Observe-se que os pontos de K com $\theta\neq 0$ e $\phi\neq 0$ são parametrizados pela aplicação $\Phi_1:]0,2\pi[\times]0,2\pi[\to\mathbb{R}^4$:

$$\Phi_1(\theta,\phi)=((R+r\cos\phi)\cos\theta,(R+r\cos\phi)\operatorname{sen}\theta,r\operatorname{sen}\phi\cos\theta/2,r\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta/2).$$

Mudando a origem a θ e a ϕ, obtemos outras parametrizações que cobrem os pontos que ficaram de fora. Deixamos como exercício verificar que três parametrizações Φ_1, Φ_2 e Φ_3 bastam. Para estas parametrizações, as composições $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$ são aplicações C^∞, logo K é uma 2-superfície em $\mathbb{R}^4$.

De forma análoga ao 2-toro, verificamos ainda que K é dada por:

$$K = \Psi^{-1}(c, 0),$$

onde $c = 4R^2r^2$ e $\Psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ é a aplicação diferenciável

$$\Psi(x, y, z) = ((x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - R^2 - r^2)^2 + 4R^2(z^2 + w^2), y(z^2 - w^2) - 2xzw).$$

Para $c \neq 0$, temos que $(c, 0)$ é um valor regular de Ψ, e concluímos que K é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^4$.

Na verdade, qualquer variedade poder ser mergulhada num espaço euclidiano de dimensão suficientemente elevada.

Teorema 4.6 (Whitney). *Seja M uma variedade compacta. Existe um mergulho $\Psi : M \to \mathbb{R}^m$, para algum inteiro m.*

Demonstração. Como M é compacta, podemos encontrar uma colecção finita de sistemas de coordenadas $\{(U_i, \phi_i) : i = 1, \ldots, N\}$ tais que:

(a) $\overline{B_1(0)} \subset \phi_i(U_i)$;

(b) $\bigcup_{i=1}^N \phi_i^{-1}(B_1(0)) = M$.

Sejam $\lambda_i : M \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, N$, funções em $C^\infty(M)$ tais que

$$\lambda_i(p) = \begin{cases} 1 \text{ se } p \in \phi_i^{-1}(\overline{B_1(0)}), \\ \\ 0 \text{ se } p \notin U_i. \end{cases}$$

Definam-se, ainda, aplicações diferenciáveis $\psi_i : M \to \mathbb{R}^d$, $i = 1, \ldots, N$, por:

$$\psi_i(p) = \begin{cases} \lambda_i \phi_i(p) \text{ se } p \in U_i, \\ \\ 0 \text{ se } p \notin U_i. \end{cases}$$

A aplicação $\Phi : M \to \mathbb{R}^{Nd+N}$ dada por

$$\Phi(p) = (\psi_1(p), \lambda_1(p), \ldots, \psi_N(p), \lambda_N(p))$$

é o mergulho procurado. De facto, temos que:

(i) Φ é uma imersão: Se $p \in M$, então $p \in \phi_i^{-1}(B_1(0))$, para algum i. Temos, pois, que $\psi_i = \phi_i$ numa vizinhança de p, logo $\mathrm{d}_p\psi_i = \mathrm{d}_p\phi_i$ é injectivo. Isto mostra que $\mathrm{d}_p\Phi$ é injectivo.

(ii) Φ é injectivo: Sejam $p, q \in M$, com $p \neq q$, e seja i tal que $p \in \lambda_i^{-1}(1)$. Se $q \notin \lambda_i^{-1}(1)$, então $\lambda_i(p) \neq \lambda_i(q)$ e, também, $\Phi(p) \neq \Phi(q)$. Por outro lado, se $q \in \lambda_i^{-1}(1)$, então $\psi_i(p) = \phi_i(p) \neq \phi_i(q) = \psi_i(q)$, pois ϕ_i é injectiva. Em todo o caso, $\Phi(p) \neq \Phi(q)$, logo Φ é injectiva.

Como M é compacta, concluímos que Φ é um mergulho.

□

O resultado anterior é apenas a versão mais fraca dos resultados de Whitney. Ele mostrou que toda a variedade diferenciável (compacta ou não) de dimensão d pode ser mergulhada em $\mathbb{R}^{2d}$. A dimensão $2d$ é a menor possível, pois há variedades de dimensão d que não podem ser mergulhadas em $\mathbb{R}^{2d-1}$. Por outro lado, para $d > 1$, Whitney também mostrou que toda a variedade diferenciável de dimensão d pode ser *imersa* em $\mathbb{R}^{2d-1}$.

Exercícios.

1. Seja $O(n) = \left\{A : AA^T = I\right\}$ o conjunto das matrizes $n \times n$ ortogonais. Mostre que $O(n)$ é uma subvariedade mergulhada do espaço das matrizes $n \times n$. Verifique que o espaço tangente $T_I O(n)$, onde I designa a matriz identidade, pode ser identificado com o espaço das matrizes $n \times n$ anti-simétricas.

2. Seja $\Phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação definida por
$$\Phi([x, y, z]) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 - z^2, yz, xz, xy).$$
Mostre que $(\mathbb{P}^2, \Phi)$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^4$.

3. Complete os detalhes do exemplo da garrafa de Klein, e verifique que K é uma 2-superfície em $\mathbb{R}^4$.

4. Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $q \in N$ um valor regular. Mostre que
$$T_p\Psi^{-1}(q) = \{\mathbf{v} \in T_pM : \mathrm{d}_p\Psi \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

5. Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável, transversal a uma subvariedade $Q \subset N$ (não necessariamente mergulhada). Mostre que $\Psi^{-1}(Q)$ é uma subvariedade de M (não necessariamente mergulhada) e que
$$T_p\Psi^{-1}(Q) = \left\{\mathbf{v} \in T_pM : \mathrm{d}_p\Psi \cdot \mathbf{v} \in T_{\Psi(p)}Q\right\}.$$

6. Mostre a seguinte versão fraca do **Teorema de Sard**: Seja $\Psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades da mesma dimensão. O conjunto dos valores críticos de Ψ tem medida nula.

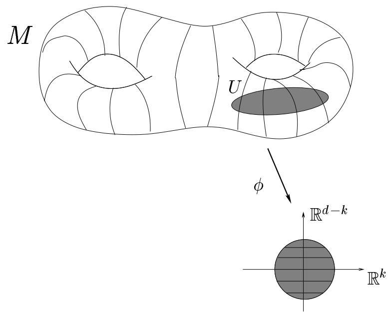
Lição 5. Folheações

Uma folheação é uma decomposição de uma variedade em subvariedades:

Definição 5.1. *Seja M uma variedade de dimensão d. Uma **folheação** de dimensão k de M é uma decomposição $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$ de M em conjuntos conexos por arcos disjuntos, que satisfaz a seguinte propriedade: para todo o $p \in M$, existe uma carta $\phi = (x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^{d-k}) : U \to \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$, tal que as componentes conexas de $L_\alpha \cap U$ são os conjuntos da forma*
$$\{p \in U : y^1(p) = const., \ldots, y^{d-k}(p) = const.\}.$$

Vamos designar uma folheação por $\mathcal{F} = \{L_\alpha : \alpha \in A\}$. Aos conjuntos conexos por arcos L_α chamamos **folhas**. Um sistema de coordenadas (U, ϕ) com a propriedade da definição diz-se **distinguido**. As componentes conexas de $U \cap L_\alpha$ chamam-se **placas**.

Um **caminho de placas** é uma colecção de placas $P_1, \ldots, P_l$ tal que $P_i \cap P_{i+1} \neq \varnothing$, para todo o $i = 1, \ldots, l-1$. É fácil de ver que dois pontos $p, q \in$



M pertencem à mesma folha sse existe um caminho de placas $P_1, \ldots, P_l$, com $p \in P_1$ e $q \in P_l$.

Cada folha de uma folheação k-dimensional de M, é uma subvariedade de M de dimensão k. Em geral, as folhas não são mergulhadas: uma folha pode intersectar um número infinito de vezes um domínio de coordenadas U, e acumular sobre si própria. Antes de verificarmos estes factos, vejamos alguns exemplos.

Exemplos 5.2.

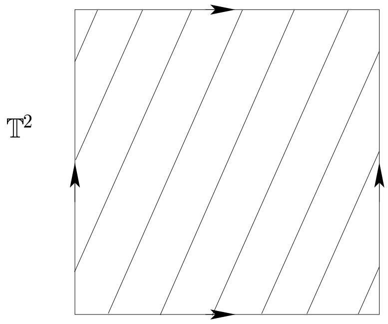
1. *Seja $\Phi : M \to N$ uma submersão. Pela forma local das submersões, as componentes conexas de $\Phi^{-1}(q)$, onde $q \in N$, formam uma folheação de M. Esta folheação tem codimensão igual à dimensão de N. Neste caso, as folhas são todas variedades mergulhadas.*

2. *Em $M = \mathbb{R}^2$, fixando $a \in \mathbb{R}$, podemos considerar a folheação pelas rectas de declive a. Este é um caso especial do Exemplo 1, pois esta folheação é obtida a partir da submersão $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por:*

$$\Phi(x, y) = y - ax.$$

Neste exemplo, as folhas são todas mergulhadas.

3. *Consideremos o toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. A folheação do Exemplo 2, induz uma folheação de $\mathbb{T}^2$. Se $a \in \mathbb{Q}$, as folhas são curvas fechadas, sendo, pois, variedades mergulhadas. No entanto, se $a \notin \mathbb{Q}$, as folhas são curvas densas no toro, sendo apenas variedades imersas.*



4. *Seja $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a aplicação*

$$\Phi(x, y, z) = f(x^2 + y^2)e^z,$$

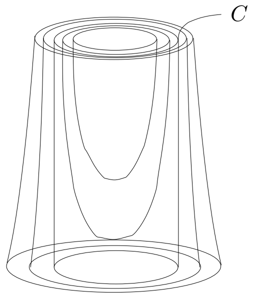
onde $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ é uma função tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ e $f'(t) < 0$. Esta aplicação é uma submersão que determina uma folheação $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$, com dois tipos de folhas:

- *As folhas no interior do cilindro $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$ são difeomorfas a $\mathbb{R}^2$;*
- *As folhas no exterior do cilindro C são todas difeomorfas a C;*
- *C é uma folha de $\mathcal{F}$.*

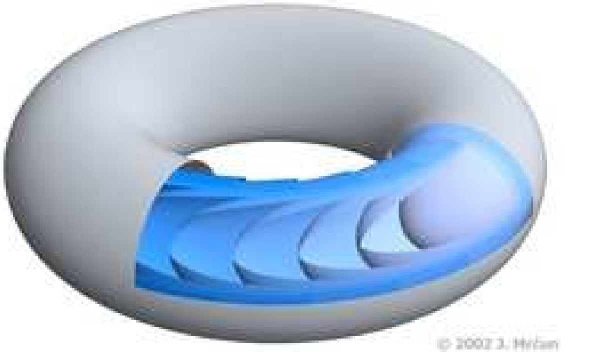
Uma parametrização explícita das folhas (excepto C) é dada por

$$(x, y) \mapsto (x, y, \log(c/f(x^2 + y^2)),$$

onde $c \neq 0$ é uma constante. No primeiro caso, $c > 0$ e $x^2 + y^2 < 1$, enquanto no segundo caso, $c < 0$ e $x^2 + y^2 > 1$.



5. *A folheação do exemplo anterior é invariante por translações ao longo do eixo Oz. Assim, identificando $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, obtemos uma folheação no quociente $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Restringindo esta folheação a $D^2 \times \mathbb{S}^1$, onde $D^2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, obtemos uma folheação de um toro sólido de dimensão dois.*



A esfera de dimensão 3 pode ser obtida colando dois toros sólidos de dimensão 2 ao longo do seu bordo:

$$\mathbb{S}^3 = T_1 \cup_\Phi T_2,$$

onde $\Phi : \partial T_1 \to \partial T_2$ é um difeomorfismo que leva meridianos de ∂T_1 em paralelos de ∂T_2, e vice-versa. Explicitamente, se $\mathbb{S}^3 = \{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 +$

$z^2 + w^2 = 1\}$, então podemos tomar:

$$T_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 : x^2 + y^2 \leq 1/2\},$$
$$T_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3 : x^2 + y^2 \geq 1/2\}.$$

*Cada um destes toros possui uma folheação de dimensão 2 como acima. Obtemos, então, uma folheação de dimensão 2 da esfera $\mathbb{S}^3$, que se chama **folheação de Reeb** de $\mathbb{S}^3$.*

Proposição 5.3. *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação k-dimensional de uma variedade M. Toda a folha $L \in \mathcal{F}$ é uma subvariedade inicial de dimensão k.*

Demonstração. Seja L uma folha de $\mathcal{F}$. A topologia de L é a topologia gerada pelas placas de L, i.e., as componentes conexas de $L \cap U$, onde U é um aberto distinguido. Para cada cada placa P, associada a um sistema de coordenadas distinguido $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^{d-k})$, consideramos a aplicação $\psi : P \to \mathbb{R}^k$ definida pelas primeiras k-componentes:

$$\psi(p) = (x^1(p), \ldots, x^k(p)).$$

Assim, L é um espaço localmente euclidiano, Hausdorff, e as funções de transição são claramente C^∞. Podemos, pois, considerar o atlas maximal que contém as cartas (P, ψ). Para verificar que L é uma variedade falta apenas mostrar que a sua topologia admite uma base contável. Para isso, recorremos ao seguinte lema:

Lema 5.4. *Seja L uma folha de $\mathcal{F}$ e $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma cobertura contável de M por abertos distinguidos. As placas de L nesta cobertura (i.e., as componentes conexas dos $L \cap U_n$, $n \in \mathbb{N}$) são em número contável.*

Fixemos uma placa P_0 de L na cobertura $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Se uma placa P' pertence a L então existe um caminho de placas $P_1, \ldots, P_l$ na cobertura, que liga P' a P_0. Basta, pois, verificar que a colecção de caminhos de placas na cobertura é contável.

Para uma caminho de placas $P_1, \ldots, P_l$ chamamos a l o comprimento do caminho. Vamos mostrar, por indução, que a colecção de caminhos de placas na cobertura, de comprimento menor ou igual a N, é contável:

- A colecção de caminhos de placas na cobertura de comprimento 1 contém um só elemento, logo é contável.
- Suponhamos que a colecção de caminhos de placas na cobertura, de comprimento menor que N, é contável. Seja $P_1, \ldots, P_{N-1}$ um caminho de placas de comprimento $N-1$, que corresponde a abertos distinguidos $U_1, \ldots, U_{N-1}$. Para obter um caminho de placas de comprimento N, tomamos um aberto distinguido $U_N \neq U_{N-1}$ e consideramos as placas P', componentes conexas de $L \cap U_N$, tais que a intersecção com P_{N-1} é não-nula. Ora, $(L \cap U_N) \cap P_{N-1} = U_N \cap P_{N-1}$ é uma aberto de P_{N-1}, pelo que possui um número contável de componentes conexas (uma vez que P_{N-1} é um espaço localmente euclidiano). Assim, os P' são em número contável. Concluímos que a colecção de caminhos de placas na cobertura, de comprimento menor ou igual a N, é contável.

Escolhendo $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de forma a ser uma base para a topologia de M, obtemos então uma base contável para a topologia de L. Deixamos como exercício verificar que as folhas são subvariedade iniciais. $\square$

Observação 5.5. Uma consequência da proposição é que uma folha intersecta um aberto distinguido um número contável de vezes.

Observação 5.6. Pode mostrar-se que se uma folha de uma folheação é fechada então é uma subvariedade mergulhada.

Vamos ver agora algumas caracterizações alternativas de folheações.

Seja $\mathcal{F} = \{L_\alpha : \alpha \in A\}$ uma folheação de M, de dimensão k. Se (U, ϕ) e (V, ψ) são sistemas de coordenadas distinguidos, então a transformação de coordenadas $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$, é da forma:

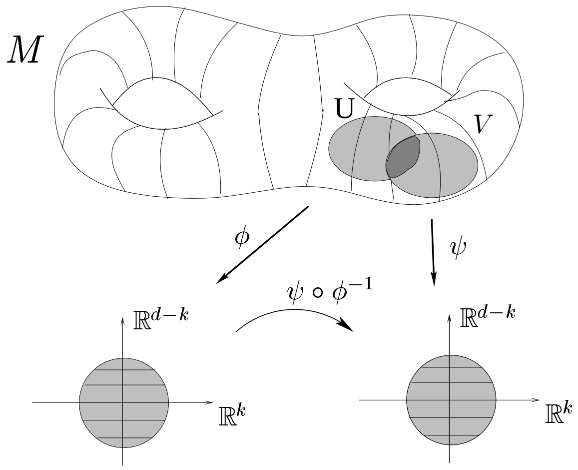
$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \ni (x, y) \mapsto (h_1(x, y), h_2(y)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}.$$

Por outras palavras, é válida a relação:

$$\frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})^j}{\partial x^i} = 0, \quad (i = 1, \ldots, k,\ j = k+1, \ldots, d). \tag{5.1}$$

Reciprocamente, designemos por $\mathcal{G}_d^k$ os difeomorfismos locais $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ que satisfazem esta condição. Podemos generalizar a noção de estrutura diferenciável requerendo que, na Definição 1.1, as funções de transição sejam elementos de $\mathcal{G}_d^k$, e ainda que para qualquer carta local (ϕ, U) os conjuntos $\phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{c\})$ $(c \in \mathbb{R}^{d-k})$ sejam conexos. Obtemos assim a noção de **$\mathcal{G}_d^k$-estrutura diferenciável**. Temos a seguinte caracterização alternativa de folheação:

Proposição 5.7. *Seja M uma variedade diferenciável. Para toda a folheação $\mathcal{F} = \{L_\alpha : \alpha \in A\}$ de M, a colecção $\mathcal{C} = \{(U, \phi)\}$ dos sistemas de coordenadas distinguidos, define uma $\mathcal{G}_d^k$-estrutura diferenciável. Reciprocamente, para toda a $\mathcal{G}_d^k$-estrutura diferenciável $\mathcal{C}$ em M, existe uma única folheação $\mathcal{F}$ de M, para a qual os sistemas de coordenadas distinguidos são os elementos de $\mathcal{C}$.*



Demonstração. Já vimos que toda a folheação determina uma $\mathcal{G}_d^k$-estrutura diferenciável. Reciprocamente, dada uma $\mathcal{G}_d^k$-estrutura diferenciável $\mathcal{C} = \{(U,\phi)\}$, vamos associar-lhe uma folheação de M.

Para isso, consideramos as placas $\phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c\})$, onde $c \in \mathbb{R}^{d-k}$. Como M é coberta pelas placas, podemos definir a relação de equivalência em M:

- $p \sim q$ se existe um caminho de placas $P_1, \dots, P_l$ com $p \in P_1$ e $q \in P_l$.

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto das classes de equivalência. Vamos verificar que $\mathcal{F}$ é uma folheação de M.

Seja $p_0 \in M$, e consideremos uma placa P_0 que contém p_0. Então

$$P_0 = \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c_0\}),$$

para um sistema de coordenadas $(U,\phi) \in \mathcal{C}$, onde $\phi(p_0) = (a_0, c_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$. Vejamos que o sistema de coordenadas (U,ϕ) é um sistema de coordenadas distinguido: Seja $L \in \mathcal{F}$ uma classe de equivalência que intersecta U. Se $p \in U \cap L$, então $\phi(p) = (a,c) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k}$, e temos que a placa

$$P = \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c\}),$$

está contida em L. Como P é conexa, é claro que P está contida na componente conexa de $L \cap U$ que contém p. Afirmamos que esta componente conexa é precisamente P, donde resulta que (U,ϕ) é um sistema de coordenadas distinguido.

Seja $q \in L \cap U$ um ponto da componente conexa que contém p. Vamos mostrar que $q \in P$. Por definição de $\sim$, existe um caminho de placas $P_1, \dots, P_l$, com $p \in P_1$ e $q \in P_l$, e tal que $P_i \subset U$. A cada placa P_i está associado um sistema de coordenadas $(U_i, \phi_i) \in \mathcal{C}$, tal que

$$P_i = \phi_i^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c_i\}).$$

Podemos, ainda, assumir que $U_1 = U$, $\phi_1 = \phi$, $P_1 = P$ e $c_1 = c$. Como $\phi_2 \circ \phi^{-1} \in \mathcal{G}_d^k$, temos que:

$$\phi_2^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c_2\}) \subset \phi_2^{-1} \circ \phi_2 \circ \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{\bar{c}_2\}) = \phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{\bar{c}_2\}),$$

para algum $\bar{c}_2 \in \mathbb{R}^{d-k}$. Como $P_2 \cap P_1 \neq \varnothing$, e as placas $\phi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c\})$ são disjuntas, concluímos que $\bar{c}_2 = c_1$ e $P_2 \subset P_1 = P$. Por indução $P_i \subset P$, logo $q \in P$, como pretendido. □

Vimos acima que um exemplo muito simples de folheação é dado pelas componentes conexas das fibras de uma submersão. De facto, toda a folheação $\mathcal{F} = \{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M é, localmente, desta forma: para cada $p \in M$, podemos escolher um sistema de coordenadas distinguido

$$\phi = (x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{d-k}) : U \to \mathbb{R}^d,$$

e a projecção nas últimas $(d-k)$-componentes:

$$\psi = (y^1, \dots, y^{d-k}) : U \to \mathbb{R}^{d-k},$$

é uma submersão, cujas fibras são as componentes conexas de $L_\alpha \cap U$. Observe que dado outro sistema de coordenadas distinguido

$$\bar{\phi} = (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{d-k}) : \bar{U} \to \mathbb{R}^d,$$

com $U \cap \bar{U} \neq \varnothing$, temos uma nova submersão

$$\bar{\psi} = (\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{d-k}) : \bar{U} \to \mathbb{R}^{d-k}.$$

Como a transformação de coordenadas é da forma

$$\bar{\phi} \circ \phi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)),$$

onde h_2 é uma aplicação cuja matriz jacobiana

$$\left[\frac{\partial h_2^j}{\partial y^i}\right]_{i,j=1}^{d-k}$$

tem rank $d - k$, concluímos que as submersões ψ e $\bar{\psi}$ diferem por um difeomorfismo local: para cada $p \in U \cap \bar{U}$ existe um difeomorfismo local $\Psi : \mathbb{R}^{d-k} \to \mathbb{R}^{d-k}$, tal que

$$\bar{\psi} = \Psi \circ \psi,$$

numa vizinhança $U_p \subset U \cap \bar{U}$ de p.

Isto sugere uma nova definição alternativa de folheação:

Proposição 5.8. *Seja M uma variedade de dimensão d. Uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k de M determina uma colecção maximal $\{\psi_i\}_{i\in I}$ de submersões $\psi_i : U_i \to \mathbb{R}^{d-k}$, onde $\{U_i\}_{i\in I}$ é uma cobertura aberta de M, que satisfaz a seguinte propriedade: Para todo o $i, j \in I$ e $p \in U_i \cap U_j$, existe um difeomorfismo local ψ_{ji}^p de $\mathbb{R}^{d-k}$, tal que:*

$$\psi_j = \psi_{ji}^p \circ \psi_i,$$

numa vizinhança U_p de p. Reciprocamente, toda a colecção deste tipo define uma folheação de M.

A demonstração desta proposição será deixada como exercício.

Dada uma colecção de submersões $\{\psi_i\}_{i\in I}$, como na proposição, consideremos, para cada par $i, j \in I$, a aplicação

$$\phi_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{Dif}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{d-k}),\ p \longmapsto \phi_{ij}^p.$$

Esta aplicação satisfaz

$$(\phi_{ij})^{-1} = \phi_{ji} \text{ em } U_i \cap U_j, \tag{5.2}$$

e a condição de *cociclo*:

$$\phi_{ij} \circ \phi_{jk} \circ \phi_{ki} = 1 \text{ em } U_i \cap U_j \cap U_k. \tag{5.3}$$

A possibilidade de associar um cociclo a uma folheação é um facto muito importante, como veremos mais tarde aquando do estudo dos fibrados, na Parte IV destas notas.

Vejamos agora algumas construções que nos permitem obter novas folheações a partir de folheações conhecidas. Os detalhes são deixados como exercício.

Produto de folheações. Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ folheações de M_1 e M_2. Então temos uma *folheação produto* $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ de $M_1 \times M_2$: se $\mathcal{F}_1 = \{L_\alpha^{(1)}\}_{\alpha\in A}$ e $\mathcal{F}_2 = \{L_\beta^{(2)}\}_{\beta\in B}$, então $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{L_\alpha^{(1)} \times L_\beta^{(2)}\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$. Para esta folheação produto temos $\operatorname{codim}(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2) = \operatorname{codim}\mathcal{F}_1 + \operatorname{codim}\mathcal{F}_2$.

Pull-back de uma folheação. Sejam M e N variedades diferenciáveis, $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável, e $\mathcal{F}$ uma folheação de N. Assuma-se que Φ é *transversal* a $\mathcal{F}$, i.e., que para todo o $p \in M$

$$\mathrm{d}_p\Phi(T_pM) + T_{\Phi(p)}L = T_{\Phi(p)}N,$$

onde L é a folha de $\mathcal{F}$ que contém p. Então obtemos uma nova folheação $\Phi^*(\mathcal{F})$ de M, em que as folhas são as componentes conexas de $\Phi^{-1}(L)$, com $L \in \mathcal{F}$. Para esta folheação temos $\operatorname{codim}\Phi^*(\mathcal{F}) = \operatorname{codim}\mathcal{F}$.

Suspensão de um difeomorfismo. Seja $\Phi : M \to M$ um difeomorfismo. Na variedade $\mathbb{R} \times M$ temos uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão 1, em que as folhas são os conjuntos $\mathbb{R} \times \{p\}$, com $p \in M$. Em $\mathbb{R} \times M$ temos uma acção de $\mathbb{Z}$ definida por

$$n \cdot (t,p) = (t+n, \Phi^n(p)).$$

Esta acção transforma folhas de $\mathcal{F}$ em folhas de $\mathcal{F}$, e o quociente $N = (\mathbb{R} \times M)/\mathbb{Z}$ é uma variedade. Assim, obtemos uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ de N, cujas folhas são as classes $[L]$ em N, com $L \in \mathcal{F}$. A esta folheação chama-se *suspensão* do difeomorfismo Φ.

As folheações surgem naturalmente em muitas construções de geometria diferencial e veremos muitos outros exemplos de folheações nestas notas.

Exercícios.

1. Mostre que as folhas de uma folheação são subvariedades iniciais.

2. Demonstre a Proposição 5.8.

3. Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ folheações de M_1 e M_2, definidas por famílias de submersões $\{(U_i, \psi_i)\}_{i\in I}$ e $\{(V_j, \phi_j)\}_{j\in J}$. Mostre que $\{(U_i \times V_j, \psi_i \times \phi_j)\}_{(i,j)\in I\times J}$ define uma família de submersões associada à folheação produto $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ de $M_1 \times M_2$.

4. Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $\mathcal{F}$ uma folheação de N. Se $\mathcal{F}$ é definida por uma família de submersões $\{(U_i, \psi_i)\}_{i\in I}$, mostre que Φ é transversal a $\mathcal{F}$ sse $\psi_i \circ \Phi$ é uma submersão, para cada $i \in I$. Conclua que $\Phi^*(\mathcal{F})$ é a folheação definida pela família de submersões $\{(\Phi^{-1}(U_i), \psi_i \circ \Phi)\}_{i\in I}$.

5. Seja $\mathcal{F}$ a folheação de Reeb de $\mathbb{S}^3$, e $\Phi : \mathbb{S}^3 \to N$ uma aplicação contínua constante em cada folha de $\mathcal{F}$. Mostre que Φ é constante.

6. Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ duas folheações de uma variedade M com a propriedade:
$$T_pM = T_pL^{(1)} + T_pL^{(2)}, \qquad \forall p \in M,$$
onde $L^{(1)}$ e $L^{(2)}$ são as folhas de $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ que passam por p. Mostre que existe uma folheação $\mathcal{F}$ de M cujas folhas são as componentes conexas de $L_i^{(1)} \cap L_j^{(2)}$, e que satisfaz $\operatorname{codim}\mathcal{F} = \operatorname{codim}\mathcal{F}_1 + \operatorname{codim}\mathcal{F}_2$.

7. Para uma folheação $\mathcal{F}$ de M, designa-se por $M/\mathcal{F}$ o espaço das folhas com a topologia quociente. Para cada um dos exemplos do texto, descreva explicitamente o espaço das folhas.
(Nota: O espaço das folhas é, frequentemente, bastante pobre. Uma boa parte da teoria da folheações é dedicada a encontrar melhores modelos para $M/\mathcal{F}$.)

Lição 6. Quocientes

Já vimos várias construções que produzem novas variedades a partir de variedades conhecidas, tais como o produto cartesiano de variedades, ou a imagem inversa de subvariedades por aplicações transversais. Uma outra forma de produzir novas variedades é formando quocientes de variedades.

Seja M um espaço topológico. Se $\sim$ é uma relação de equivalência em M, vamos designar por $M/\sim$ o conjunto das classes equivalência e por $\pi : M \to M/\sim$ a aplicação que a $p \in M$ associa a sua classe de equivalência: $\pi(p) = [p]$. Em $M/\sim$ consideramos a *topologia quociente*: um conjunto $V \subset M/\sim$ é aberto sse $\pi^{-1}(V)$ é aberto. Esta é a topologia mais fina em $M/\sim$ para a qual a aplicação quociente $\pi : M \to M/\sim$ é contínua. Um resultado básico sobre a topologia quociente, cuja verificação deixamos como exercício, é o seguinte:

Lema 6.1. *Seja M um espaço topológico Hausdorff e $\sim$ uma relação de equivalência em M, tal que $\pi : M \to M/\sim$ é uma aplicação aberta para a topologia quociente. Então $M/\sim$ é Hausdorff sse o gráfico de $\sim$, dado por*

$$R = \{(p, q) \in M \times M : p \sim q\},$$

é um subconjunto fechado de $M \times M$.

Seja, agora, M uma variedade e $\sim$ uma relação de equivalência em M. Gostaríamos, naturalmente, de saber quando é que existe um estrutura diferenciável em $M/\sim$, compatível com a topologia quociente. Antes de enunciar um resultado que fornece uma resposta completa a esta questão, precisamos de uma definição.

Recordemos que uma aplicação contínua $\Phi : X \to Y$, entre dois espaços topológicos, diz-se **própria** se $\Phi^{-1}(K) \subset X$ é compacto para todo o conjunto compacto $K \subset Y$. Se X e Y são Hausdorff e localmente compactos, uma aplicação própria é, necessariamente, uma aplicação fechada.

Definição 6.2. *Uma **subvariedade própria** é uma subvariedade (N, Φ) de M em que $\Phi : N \to M$ é uma aplicação própria.*

Por um exercício da Lição 3, uma subvariedade própria é mergulhada. Por outro lado, se $\Phi : N \to M$ é própria, então a sua imagem $\Phi(N)$ é fechada. Reciprocamente, é fácil de ver que uma subvariedade mergulhada e fechada, é uma subvariedade própria.

Teorema 6.3. *Seja M uma variedade e $\sim$ uma relação de equivalência em M. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) Existe uma estrutura diferenciável em $M/\sim$ tal que $\pi : M \to M/\sim$ é uma submersão.

(ii) O gráfico R de $\sim$ é uma subvariedade própria de $M \times M$ e a projecção $p_1 : M \times M \to M$ restrita a R é uma submersão.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook] & M \times M \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ M & & M \end{tikzcd}$$

Demonstração. Vejamos, separadamente, ambas as implicações.

(i) $\Rightarrow$ (ii). O gráfico da aplicação quociente

$$\mathcal{G}(\pi) = \{(p, \pi(p)) : p \in M\} \subset M \times M/\sim,$$

é uma subvariedade própria (ver Exercício 4). Como $Id \times \pi : M \times M \to M \times M/\sim$ é uma submersão, e

$$R = (Id \times \pi)^{-1}(\mathcal{G}(\pi)),$$

vemos que $R \subset M \times M$ é uma subvariedade mergulhada e fechada, i.e., é uma subvariedade própria.

Por outro lado, a aplicação $(Id \times \pi)|_R : R \to \mathcal{G}(\pi)$ é uma submersão e a aplicação $\mathcal{G}(\pi) \to M$, $(p, \pi(p)) \mapsto p$ é um difeomorfismo. Logo a sua composição $p_1|R$ é uma submersão.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Dividimos a demonstração em vários lemas. O primeiro lema afirma que, localmente, podemos "endireitar" $\sim$:

Lema 6.4. *Para todo o $p \in M$, existe um sistema de coordenadas locais $(U, (x^1, \ldots, x^d))$ centrado em p, tal que*

$$\forall q, q' \in U,\ q \sim q' \ \text{ sse } \ x^{k+1}(q) = x^{k+1}(q'), \ldots, x^d(q) = x^d(q'),$$

onde k é um inteiro independente de p e $d = \dim M$.

Para demonstrar este lema, seja $\Delta \subset M \times M$ a diagonal. Temos que $\Delta \subset R \subset M \times M$, com Δ e R ambas subvariedades mergulhadas de $M \times M$. Logo, Δ é uma subvariedade mergulhada de R.

Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança O de (p, p) em $M \times M$ e uma submersão $\Phi : O \to \mathbb{R}^{d-k}$, onde $d - k = \operatorname{codim} R$, tais que:

$$(q, q') \in O \cap R \ \text{ sse } \Phi(q, q') = 0.$$

Note-se que $k \geq 0$, pois $\Delta \subset R$ e $\operatorname{codim} \Delta = d$.

A aplicação $q \mapsto \Phi(q, p)$ tem diferencial com rank máximo em $q = p$. De facto, identificando $T_{(p,p)}(M \times M) = T_pM \times T_pM$, vemos que o diferencial $\mathrm{d}_{(p,p)}\Phi$ é zero no subespaço formado pelos elementos da forma $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in T_pM \times T_pM$, e este subespaço é transversal ao subespaço formado por elementos da forma $(\mathbf{v}, 0) \in T_pM \times T_pM$. Assim, existe uma vizinhança V de p tal que $V \times V \subset O$, e a aplicação $q \mapsto \Phi(q, p)$ é uma submersão em V. Pela forma canónica para submersões, podemos assumir que existem coordenadas locais $(V, \phi) = (V, (u^1, \ldots, u^k, v^1, \ldots, v^{d-k}))$ centradas em p, tais que

$$\Phi \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1})(u^1, \ldots, u^k, v^1, \ldots, v^{d-k}, 0, \ldots, 0) = (v^1, \ldots, v^{d-k}).$$

Nestas coordenadas, os pontos $q \in V$ tais que $q \sim p$ são precisamente os pontos que satisfazem $v^1(q) = 0, \ldots, v^{d-k}(q) = 0$.

Vamos escrever $\widehat{\Phi} = \Phi \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1})$. A aplicação

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d-k} \to \mathbb{R}^{d-k},\ (u, v, w) \mapsto \widehat{\Phi}((u, v), (0, w)),$$

satisfaz

$$\widehat{\Phi}((u, v), (0, 0)) = v.$$

Assim, a matriz das derivadas parciais $\partial\widehat{\Phi}^i/\partial v^j$, $(i, j = 1, \ldots, d - k)$, é invertível, e podemos aplicar o Teorema da Função Implícita, para concluir que existe uma função diferenciável $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{d-k} \to \mathbb{R}^{d-k}$, $(u,w) \mapsto v(u,w)$, com a propriedade de que:

$$\widehat{\Phi}((u,v),(0,w)) = 0 \ \text{ sse } v = v(u,w).$$

Como $v(0,w) = w$ é solução desta equação, por unicidade, temos que

$$\phi(0,w) \sim \phi(0,w') \ \text{ sse } w = w'.$$

Isto mostra, ainda, que a aplicação $(u,w) \mapsto (u, v(u,w))$ é um difeomorfismo local. Existe, pois, um aberto U onde

$$(x^1,\ldots,x^d) = (u^1,\ldots,u^k,w^1,\ldots,w^{d-k})$$

são coordenadas locais. Nestas coordenadas, temos que

$$\forall q,q' \in U,\ q \sim q' \ \text{ sse } \ x^{k+1}(q) = x^{k+1}(q'),\ldots,x^d(q) = x^d(q'),$$

o que termina a demonstração do lema.

Como as funções coordenadas $x^{k+1},\ldots,x^d$, dadas pelo lema, passam ao quociente $M/\sim$, vamos considerar os pares da forma $(\pi(U),(\bar{x}^{k+1},\ldots,\bar{x}^d))$, onde $\bar{x}^i$ é a função induzida por x^i em $\pi(U)$.

Lema 6.5. *A família $\{(\pi(U),(\bar{x}^{k+1},\ldots,\bar{x}^d))\}$ define em $M/\sim$ uma estrutura de espaço localmente euclidiano.*

Primeiro observamos que $\pi : M \to M/\sim$ é uma aplicação aberta. De facto, para qualquer $V \subset M$, temos que

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = p_1|_R((p_2|_R)^{-1}(V)).$$

Mas, por hipótese, $p_1|_R$ é uma submersão, logo é uma aplicação aberta. Assim, se $V \subset M$ é aberto, então $\pi^{-1}(\pi(V))$ também é aberto, donde concluímos que $\pi(V) \subset M/\sim$ é aberto.

Temos, pois, que os $\pi(U)$ são abertos. Como a aplicação

$$(x^{k+1},\ldots,x^d) : U \to \mathbb{R}^{d-k}$$

é contínua e aberta, segue-se também que a aplicação induzida

$$(\bar{x}^{k+1},\ldots,\bar{x}^d) : \pi(U) \to \mathbb{R}^{d-k}$$

é contínua, aberta, e injectiva, i.e., é um homeomorfismo para a sua imagem.

Mostramos ainda que:

Lema 6.6. *A família $\{(\pi(U),(\bar{x}^{k+1},\ldots,\bar{x}^d))\}$ determina uma estrutura diferenciável em $M/\sim$ tal que $\pi : M \to M/\sim$ é uma submersão.*

Consideremos dois sistemas de coordenadas na nossa família:

$$(\pi(U),\bar{\phi}) = (\pi(U),(\bar{x}^{k+1},\ldots,\bar{x}^d)) \text{ e}$$
$$(\pi(V),\bar{\psi}) = (\pi(V),(\bar{y}^{k+1},\ldots,\bar{y}^d)),$$

que correspondem a sistemas de coordenadas em M:

$$(U,\phi) = (U,(x^1,\ldots,x^d)) \text{ e}$$
$$(V,\psi) = (V,(y^1,\ldots,y^d)).$$

A respectiva função de transição

$$\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1} : \mathbb{R}^{d-k} \to \mathbb{R}^{d-k},$$

composta com a projecção $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-k}$ nas últimas $d-k$ componentes, é dada por:

$$\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1} \circ p = p \circ \psi \circ \phi^{-1}.$$

Como o lado direito é uma aplicação diferenciável $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-k}$, segue-se que a função de transição $\bar{\psi} \circ \bar{\phi}^{-1}$ é diferenciável.

Para verificar que $\pi : M \to M/\sim$ é uma submersão, basta observar que nos sistemas de coordenadas $(U, x^1, \ldots, x^d)$ para M e $(\pi(U), (\bar{x}^{k+1}, \ldots, \bar{x}^d))$ para $M/\sim$, esta aplicação coincide com a projecção $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-k}$.

Para terminar a demonstração, verificamos que

Lema 6.7. *A topologia em $M/\sim$ é Hausdorff e possui uma base contável.*

É claro que se M possui uma base contável, então a topologia quociente também possui uma base contável. Como o gráfico de $\sim$ é fechado em $M \times M$, M é Hausdorff e π é aberta, segue-se que $M/\sim$ é Hausdorff (cf. Lema 6.1).

□

Uma classe muito importante de relações de equivalência é dada pelas acções de grupos de difeomorfismos. Fixemos uma acção de um grupo G numa variedade M, i.e., um homomorfismo $\widehat{\Psi} : G \to \text{Dif}(M)$, onde $\text{Dif}(M)$ é o grupo dos difeomorfismos de M. Também podemos ver uma acção como uma aplicação $\Psi : G \times M \to M$, que escrevemos $(g, p) \mapsto g \cdot p$, de forma que

$$g \cdot p = \widehat{\Psi}(g)(p).$$

Como $\widehat{\Psi}$ é um homomorfismo de grupos, obtemos:

(a) $e \cdot p = p$, para todo o $p \in M$;
(b) $g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p$, para todo o $g, h \in G$ e $p \in M$.

Reciprocamente, toda a aplicação $\Psi : G \times M \to M$, com $p \mapsto g \cdot p$ diferenciável para $g \in G$, determina um homomorfismo $\widehat{\Psi} : G \to \text{Dif}(M)$.

O quociente $G \backslash M$ é, por definição, o conjunto das classes de equivalência associadas à relação definida por:

$$p \sim q \iff \exists g \in G : \ q = g \cdot p.$$

Gostaríamos, pois, de saber que condições deve satisfazer uma acção para que o quociente $G \backslash M$ seja uma variedade.

Uma **acção livre** é uma acção $G \times M \to M$ em que todo o $g \in G - \{e\}$ actua sem pontos fixos, i.e.,

$$g \cdot p = p \text{ para algum } p \in M \quad \Longrightarrow \quad g = e.$$

Designando por G_p o **subgrupo de isotropia** do ponto $p \in M$, i.e.,

$$G_p = \{g \in G : g \cdot p = p\},$$

vemos que uma acção é livre sse $G_p = \{e\}$, para todo o $p \in M$.

Estamos, ainda, interessados na seguinte classe de acções:

Definição 6.8. *Dizemos que a acção $\Psi : G \times M \to M$ é* ***propriamente descontínua*** *se satisfaz as seguintes duas condições:*

(a) Para todo o $p \in M$, existe um vizinhança U de p, tal que:

$$g \cdot U \cap U = \varnothing, \quad \forall g \in G - G_p.$$

(b) Se $p, q \in M$ não pertencem à mesma órbita, então existem vizinhanças U de p e V de q, tais que

$$g \cdot U \cap V = \varnothing, \quad \forall g \in G.$$

Temos então:

Corolário 6.9. *Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção livre e propriamente descontínua dum grupo G numa variedade M. Então existe uma estrutura diferenciável em $G\backslash M$ tal que $\pi : M \to G\backslash M$ é um difeomorfismo local.*

Demonstração. Vamos verificar a condição (ii) do Teorema 6.3.

Vejamos que $R \subset M \times M$ é uma subvariedade mergulhada. Como a acção é livre, a condição (a) da Definição 6.8 mostra que, dado um ponto $(p_0, g_0 \cdot p_0) \in R$, existe um aberto U contendo p_0, tal que:

$$g \cdot U \cap U = \varnothing, \quad \forall g \in G - \{e\}.$$

Vemos imediatamente que

$$(U \times g_0 \cdot U) \cap R = \{(q, g_0 \cdot q) : q \in U\}.$$

Assim, a aplicação

$$U \to (U \times g_0 \cdot U) \cap R, \quad q \mapsto (q, g_0 \cdot q),$$

é uma parametrização de uma vizinhança de $(p_0, g_0 \cdot p_0)$ em R (com a topologia relativa). Como este ponto era arbitrário, segue-se que R é uma variedade mergulhada. Note-se, ainda, que a projecção $p_1 : M \times M \to M$ restrita a R inverte estas parametrizações. Logo, p_1 restrito a R é um difeomorfismo local.

Deixamos como exercício verificar que a inclusão

$$R = \{(p, g \cdot p) : p \in M, g \in G\} \hookrightarrow M \times M$$

é própria. □

Nas condições do corolário, é fácil de ver que a projecção $\pi : M \to G\backslash M$ é, de facto, um revestimento. Assim, se M é 1-conexa, então M é um revestimento universal de $G\backslash M$, e temos que $\pi_1(G\backslash M) \simeq G$.

Exemplo 6.10.
Seja $M = \mathbb{S}^n$, com $n > 1$. Consideremos a acção $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ definida por:

$$\pm 1 \cdot (x_0, \ldots, x_n) = \pm(x_0, \ldots, x_n).$$

Esta acção é livre e propriamente descontínua. Concluímos que o quociente $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$ é uma variedade. Como $\mathbb{S}^n$, para $n > 1$, é 1-conexa, concluímos ainda que esta aplicação é um revestimento universal e que $\pi_1(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}_2$.

As acções propriamente descontínuas surgem naturalmente no estudo de grupos finitos ou discretos (ver exercícios). No estudo de grupos contínuos há que considerar outras classes de acções. Na próxima série de lições, estudaremos acções de uma classe muito importante de grupos infinitos contínuos, os chamados *grupos de Lie*. Iremos estudar nessa altura outros exemplos de quocientes.

Exercícios.

1. Seja M um espaço topológico Hausdorff e $\sim$ uma relação de equivalência em M, tal que $\pi : M \to M/\sim$ é uma aplicação aberta para a topologia quociente. Mostre que $M/\sim$ é Hausdorff sse o gráfico de $\sim$ é um subconjunto fechado de $M \times M$.

2. Sejam X e Y espaços topológicos Hausdorff e $\Phi : X \to Y$ uma aplicação contínua e própria.
   (1) Mostre que se X e Y são localmente compactos então Φ é fechada. (Sugestão: Recorde que neste caso X e Y podem ser compactificados com um ponto no infinito.)
   (2) Mostre que se X e Y satisfazem o primeiro axioma da numerabilidade então Φ é fechada.
   (3) Indique um exemplo em que Φ não seja fechada.

3. Mostre que (N, Φ) é uma subvariedade própria sse Φ é um mergulho e $\Phi(N) \subset M$ é fechado.

4. Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Mostre que o seu gráfico
$$\mathcal{G}(\Phi) = \{(p, \Phi(p)) : p \in M\} \subset M \times N,$$
é uma subvariedade própria de $M \times N$.

5. Na variedade $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ considere a relação de equivalência $\sim$ em que as classes de equivalência são as componentes conexas das rectas horizontais $y =$ const. Mostre que no espaço quociente existe uma estrutura diferenciável não-Hausdorff.

6. Se $G \times M \to M$ é uma acção livre e propriamente descontínua verifique que a inclusão
$$R = \{(p, g \cdot p) : p \in M, g \in G\} \hookrightarrow M \times M$$
é própria.

7. Se $G \times M \to M$ é uma acção dum grupo finito G numa variedade compacta M, mostre que a inclusão
$$R = \{(p, g \cdot p) : p \in M, g \in G\} \hookrightarrow M \times M$$
é própria.

8. Mostre que uma acção livre de um grupo finito G numa variedade M é propriamente descontínua.

9. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de M e designe por $M/\mathcal{F}$ o espaço das folhas. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma **folheação simples** se para cada $p \in M$ existe um sistema de coordenadas distinguido (U, ϕ) com a propriedade de que toda a folha L intersecta U no máximo numa placa. Mostre que $\mathcal{F}$ é simples sse existe uma estrutura diferenciável em $M/\mathcal{F}$, em geral não-Hausdorff, para a qual a aplicação $\pi : M \to M/\mathcal{F}$ é uma submersão.

PARTE II. **Teoria de Lie**

Depois de, na primeira série de lições, termos introduzido alguns dos conceitos elementares sobre variedades, vamos agora iniciar o estudo da geometria diferencial local. Os conceitos e ideias principais a reter nesta segunda série de lições são:

- Na Lição 7: A noção fundamental de *campo vectorial* e os conceitos base a ela associada: *curva integral* e *fluxo* de um campo.
- Na Lição 8: *Parênteses de Lie* de campos vectoriais. *Derivada de Lie*, que nos permite diferenciar objectos ao longo de um campo vectorial.
- Na Lição 9: *Distribuições*, objectos que generalizam a noção de campo vectorial. *Distribuições involutivas*, que são descrições infinitesimais de folheações.
- Na Lição 10: *Grupos de Lie*, uma classe muito importante de variedades, e os seus análogos infinitesimais, as *álgebras de Lie*.
- Na Lição 11: Como *integrar* álgebras de Lie em grupos de Lie.
- Na Lição 12: Os *grupos de transformações* que são realizações concretas de grupos de Lie.

Lição 7. Campos Vectoriais e Fluxo

Definição 7.1. *Um* ***campo vectorial*** *numa variedade M é uma secção do fibrado tangente $\pi : TM \to M$, i.e., é uma aplicação $X : M \to TM$ tal que $\pi \circ X = I$. O campo vectorial X diz-se de classe C^∞ se a aplicação $X : M \to TM$ é de classe C^∞. Designamos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vectoriais C^∞ numa variedade M.*

Se X é um campo vectorial em M, designamos por X_p, em vez de $X(p)$, o valor do campo vectorial no ponto $p \in M$. Para cada $p \in M$, X_p é uma derivação e, portanto, dada uma função $f \in C^\infty(M)$ podemos definir uma nova função $X(f) : M \to \mathbb{R}$ por:

$$X(f)(p) \equiv X_p(f).$$

Recordando a noção de diferencial de uma função, observe que esta definição é equivalente a:

$$X(f) = \mathrm{d}f(X).$$

Deve ser claro da definição de vector tangente, que a aplicação $f \mapsto X(f)$ satisfaz:

(i) $X(f + \lambda g) = X(f) + \lambda X(g)$;
(ii) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$;

Seja $(U, x^1, \dots, x^d)$ um sistema de coordenadas da variedade M. Então temos campos vectoriais $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(U)$ definidos por:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(p) \equiv \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \qquad (i = 1, \dots, d).$$

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial em M, a sua restrição ao aberto U, designada por $X|_U$, pode ser escrita na forma:

$$X|_U = \sum_{i=1}^d X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

onde os $X^i : U \to \mathbb{R}$ são certas funções, a que chamamos **componentes do campo vectorial** X em relação às coordenadas $(x^1, \dots, x^d)$.

Lema 7.2. *Seja X um campo vectorial numa variedade M. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) O campo vectorial X é de classe C^∞;
(ii) Para todo o sistema de coordenadas $(U, x^1, \dots, x^d)$, as componentes X^i de X em relação a estas coordenadas são funções de classe C^∞;
(iii) Para qualquer função $f \in C^\infty(M)$, a função $X(f)$ é de classe C^∞.

Demonstração. Vejamos as implicações (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

Para verificar que (i) $\Rightarrow$ (ii), observe que se X é de classe C^∞ e U é um aberto, então a restrição $X|_U$ é de classe C^∞. Assim, se $(U, x^1, \dots, x^d)$ é um sistema de coordenadas, temos que $\mathrm{d}x^i(X|_U)$ é de classe C^∞. Mas:

$$\mathrm{d}x^i(X|_U) = \mathrm{d}x^i(\sum_{j=1}^d X^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = X^i.$$

Para verificar que (ii) $\Rightarrow$ (iii), observe que $f \in C^\infty(M)$ se e só se $f|_U \in C^\infty(U)$, para todo o domínio de coordenadas U. Mas:

$$X(f)|_U = \sum_{i=1}^d X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \in C^\infty(U).$$

Para verificar que (iii) $\Rightarrow$ (i), basta verificar que $X|_U$ é C^∞, para todo o domínio de coordenadas U. Recordemos que, se $(U, x^1, \ldots, x^d)$ é um sistema de coordenadas de M, então

$$(\pi^{-1}(U), (x^1 \circ \pi, \ldots, x^d \circ \pi, \mathrm{d}x^1, \ldots, \mathrm{d}x^d))$$

é um sistema de coordenadas de TM. Como:

$$\begin{aligned} x^i \circ \pi \circ X|_U &= x^i \in C^\infty(U), \\ \mathrm{d}x^i \circ X|_U &= X(x^i) \in C^\infty(U), \end{aligned}$$

concluímos que $X|_U$ é C^∞. □

Assim, um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ determina uma derivação linear em $C^\infty(M)$. Reciprocamente,

Lema 7.3. *Toda a derivação linear $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ determina um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, através da fórmula:*

$$X_p(f) = D(f)(p).$$

Demonstração. A única coisa a mostrar é que $X_p(f)$ depende apenas do germe $[f] \in \mathcal{G}_p$, i.e., que se $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ são funções que coincidem nalguma vizinhança de p, então $D(f)(p) = D(g)(p)$. Isto segue-se do facto de que uma derivação D é local, i.e., que se $f \in C^\infty(M)$ é uma função que se anula num aberto $U \subset M$, então $D(f)$ também se anula em U. Para ver isto, seja $p \in U$, e escolha-se uma função $g \in C^\infty(M)$ tal que $g(p) > 0$ e $\operatorname{supp} g \subset U$. Como $gf \equiv 0$, temos:

$$0 = D(gf) = D(g)f + gD(f).$$

Calculando ambos os lados em p, obtemos $D(f)(p) = 0$. Logo, $D(f)|_U = 0$, como pretendido. □

Daqui em diante, utilizaremos a mesma letra para representar um campo vectorial e a derivação de $C^\infty(M)$ que lhe está associada.

Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Em geral, dado um campo vectorial X em M, não é possível transportar X para um campo vectorial Y em N (com recurso a Φ), e vice-versa. De qualquer forma, a seguinte definição é muito útil.

Definição 7.4. *Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ diz-se **Φ-relacionado** com um campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$ se, para todo o $p \in M$, temos*

$$Y_{\Phi(p)} = \mathrm{d}\Phi(X_p).$$

Em certos casos, como, por exemplo, quando Φ é um difeomorfismo, podemos determinar Y a partir de X e de Φ. Neste caso, e só neste caso, escrevemos $Y = \Phi_* X$. Note que, como derivações, temos que

$$\Phi_* X(f) = X(f \circ \Phi), \quad \forall f \in C^\infty(N).$$

Vamos chamar **caminho** numa variedade M a uma aplicação contínua $\gamma :]a, b[\to M$. Um **caminho suave** é um caminho em que a aplicação γ é de classe C^∞. Também consideramos caminhos $\gamma : I \to M$ definidos em intervalos que podem não ser abertos. Neste caso, dizemos que γ é suave se possui uma extensão a uma caminho suave definido num intervalo aberto $J \supset I$. Se $\gamma : I \to M$ é um caminho suave, a sua **derivada** é:

$$\dot{\gamma}(t) \equiv \mathrm{d}\gamma \cdot \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \in T_{\gamma(t)} M,$$

e está definida para todo o $t \in I$. Observe que a derivada $t \mapsto \dot{\gamma}(t)$ é um caminho suave em TM.

Definição 7.5. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial. Um caminho suave $\gamma : I \to M$ diz-se uma **curva integral** de X se*

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}, \quad \forall t \in I. \tag{7.1}$$

Em coordenada locais $(U, (x^1, \dots, x^d))$, o caminho $\gamma(t)$ fica determinado pelas suas componentes $\gamma^i(t) = x^i(\gamma(t))$. Por exemplo, a sua derivada é dada por:

$$\dot{\gamma} = \mathrm{d}\gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Por seu lado, as curvas integrais dum campo vectorial X, com componentes X^i em relação às coordenadas $(x^1, \dots, x^d)$, são as soluções do sistema de e.d.o.'s:

$$\frac{d\gamma^i}{dt} = X^i(\gamma^1(t), \dots, \gamma^d(t)), \quad (i = 1, \dots, d). \tag{7.2}$$

Este sistema é a forma local das equações (7.1). Resultados standard sobre existência, unicidade e intervalo máximo de definição de soluções, de um sistema de e.d.o.'s, fornece a seguinte proposição.

Proposição 7.6. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial. Para cada $p \in M$, existem números $a_p, b_p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ e uma curva suave $\gamma_p :]a_p, b_p[\to M$, tais que:*

(i) $0 \in]a_p, b_p[$ *e* $\gamma_p(0) = p$*;*
(ii) γ_p *é uma curva integral de* X*;*
(iii) Se $\eta :]c, d[\to M$ *é uma curva integral de* X *que satisfaz (i) e (ii), então* $]c, d[\subset]a_p, b_p[$ *e* $\gamma_p|_{]c,d[} = \eta$.

A γ_p chamamos a **curva integral maximal** de X por p. A proposição mostra que, por cada ponto, passa uma única curva integral maximal. Assim, para cada $t \in \mathbb{R}$, vamos definir

$$D_t = \{p \in M : t \in]a_p, b_p[\},$$

e o **fluxo** do campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é a aplicação $\phi_X^t : D_t \to M$ dada por

$$\phi_X^t(p) \equiv \gamma_p(t).$$

A proposição seguinte fornece as propriedades básicas do fluxo, e a sua verificação é deixada como exercício:

Proposição 7.7. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial com fluxo ϕ_X^t. Então:*

(i) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e $\varepsilon > 0$, tal que a aplicação $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to M$ dada por:

$$(t, q) \mapsto \phi_X^t(q),$$

está bem definida e é de classe C^∞;

(ii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, D_t é aberto e $\bigcup_{t>0} D_t = M$;

(iii) Para cada $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X^t : D_t \to D_{-t}$ é um difeomorfismo e:

$$(\phi_X^t)^{-1} = \phi_X^{-t};$$

(iv) Para cada $s, t \in \mathbb{R}$, o domínio de $\phi_X^t \circ \phi_X^s$ está contido em D_{t+s} e:

$$\phi_X^{t+s} = \phi_X^t \circ \phi_X^s.$$

Um campo vectorial diz-se **completo** se $D_t = M$, para todo o $t \in \mathbb{R}$, i.e., se a curva integral maximal por qualquer $p \in M$ está definida para $t \in]-\infty, +\infty[$. Neste caso, o fluxo de X pode ser visto como uma aplicação:

$$\mathbb{R} \times M \to M, \quad (t, p) \mapsto \phi_X^t(p).$$

As propriedades acima, traduzem o facto de que esta aplicação é uma acção do grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ em M. Dito de outra forma, a aplicação

$$\mathbb{R} \to \mathrm{Dif}(M), \quad t \mapsto \phi_X^t,$$

é um homomorfismo do grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ no grupo $(\mathrm{Dif}(M), \circ)$ dos difeomorfismos de M. Dizemos, pois, que ϕ_X^t é um *grupo a 1-parâmetro de transformações* de M. No caso não completo, falamos ainda de um grupo *local* a 1-parâmetro de transformações de M.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial e $f \in C^\infty(M)$, já sabemos que $X(f) \in C^\infty(M)$. As expressões em coordenadas locais, mostram que X é um operador diferencial de 1ª ordem. Iterando esta construção, podemos considerar "potências" X^k, que mais não são que operadores diferenciais de ordem k:

$$X^{k+1}(f) \equiv X(X^k(f)).$$

Proposição 7.8 (Fórmula de Taylor)**.** *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial e $f \in C^\infty(M)$. Para cada $p \in M$ e inteiro positivo k, é válida a expansão:*

$$f \circ \phi_X^t = f + tX(f) + \frac{t^2}{2!}X^2(f) + \cdots + \frac{t^k}{k!}X^k(f) + 0(t^{k+1}),$$

onde $t \mapsto 0(t^{k+1})$ é uma função C^∞ numa vizinhança da origem, cujos termos de ordem $\leq k$ são nulos.

Demonstração. Pela fórmula de Taylor usual aplicada à função $t \mapsto f(\phi_X^t(p))$, basta verificar que

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(\phi_X^t(p))\right|_{t=0} = X^k(f)(p).$$

Para isso, vamos mostrar, por indução, que:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(\phi_X^t(p)) = X^k(f)(\phi_X^t(p)).$$

Para verificar esta igualdade se $k = 1$, basta observar que:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\phi_X^t(p)) &= \mathrm{d}_p f \cdot X_{\phi_X^t(p)} \\ &= X_{\phi_X^t(p)}(f) \\ &= X(f)(\phi_X^t(p)).\end{aligned}$$

Agora, supondo a fórmula válida para $k-1$, calculamos:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} f(\phi_X^t(p)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}t^{k-1}} f(\phi_X^t(p))\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X^{k-1}(f)(\phi_X^t(p)) \\ &= X(X^{k-1}(f))(\phi_X^t(p)) = X^k(f)(\phi_X^t(p)).\end{aligned}$$

□

Uma outra notação em voga para o fluxo de um campo vectorial, justificada por estes comentários, e bastante sugestiva, é a notação exponencial:

$$\exp(tX) \equiv \phi_X^t.$$

Nesta notação, as propriedades acima escrevem-se:

$$\exp(tX)^{-1} = \exp(-tX), \quad \exp((t+s)X) = \exp(tX) \circ \exp(sX),$$

enquanto que a expansão de Taylor pode ser escrita na forma sugestiva:

$$f(\exp(tX)) = f + tX(f) + \frac{t^2}{2!}X^2(f) + \cdots + \frac{t^k}{k!}X^k(f) + 0(t^{k+1}).$$

Não utilizaremos esta notação nestas notas.

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial, um ponto $p \in M$ diz-se **ponto singular** ou **ponto de equilíbrio** de X, se $X_p = 0$. É claro que a curva integral por um ponto singular $p \in M$ é o caminho constante, i.e., $\phi_X^t(p) = p$, para todo o $t \in \mathbb{R}$.

Para pontos não-singulares, temos a seguinte forma canónica:

Teorema 7.9. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial e $p \in M$ um ponto não-singular: $X_p \neq 0$. Existem coordenadas locais $(U, (x^1, \ldots, x^d))$, centradas em p, tais que:*

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Demonstração. Primeiro escolhemos coordenadas locais $(V, (y^1, \ldots, y^d)) = (V, \psi)$, centradas em p, tais que:

$$X|_p = \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_p .$$

A aplicação $\sigma : \mathbb{R}^d \to M$ dada por

$$\sigma(t_1, \ldots, t_d) = \phi_X^{t_1}(\psi^{-1}(0, t_2, \ldots, t_d)),$$

fica bem definida e é C^∞ numa vizinhança da origem. O seu diferencial na origem satisfaz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_0\sigma \cdot \left.\frac{\partial}{\partial t_1}\right|_0 &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_1}\phi_X^{t_1}(\psi^{-1}(0, 0, \ldots, 0))\right|_{t_1=0} = X_p = \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_p ,\\
\mathrm{d}_0\sigma \cdot \left.\frac{\partial}{\partial t_i}\right|_0 &= \left.\frac{\partial}{\partial t_i}\psi^{-1}(0, t_2, \ldots, t_d))\right|_0 = \left.\frac{\partial}{\partial y^i}\right|_p .
\end{aligned}$$

Concluímos que σ é um difeomorfismo local numa vizinhança da origem. Assim, existe um aberto U contendo p, tal que $\phi = \sigma^{-1} : U \to \mathbb{R}^d$ é um sistema de coordenadas. Escrevendo $(U, \phi) = (U, (x^1, \ldots, x^d))$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_{\sigma(t_1,\ldots,t_d)} &= \mathrm{d}\sigma \cdot \left.\frac{\partial}{\partial t_1}\right|_{(t_1,\ldots,t_d)}\\
&= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_X^{t}(\psi^{-1}(0, t_2, \ldots, t_d))\right|_{t=t_1}\\
&= X(\phi_X^{t_1}(\psi^{-1}(0, t_2, \ldots, t_d))) = X_{\sigma(t_1,\ldots,t_d)}.
\end{aligned}$$

□

Exercícios.

1. Seja M uma variedade conexa. Mostre que, dados $p, q \in M$ distintos, existe um caminho $\gamma : [0, 1] \to M$ de classe C^∞, tal que
   (i) $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$;
   (ii) $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}(t) \neq 0$, para todo o $t \in [0, 1]$;
   (iii) γ é simples (i.e., γ é injectiva).
   Aproveite este facto para mostrar que o grupo dos difeomorfismos de M actua transitivamente, isto é, dados $p, q \in M$ existe um difeomorfismo $\Phi : M \to M$ tal que $\Phi(p) = q$.

2. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial.
   (a) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, qual é a relação entre as curvas integrais de X e de λX?
   (b) Se $\Phi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ é Φ-relacionado com X, qual é a relação entre as curvas integrais de X e de Y?

3. Demonstre a propriedades do fluxo, dadas pela Proposição 7.7.

4. Determine o fluxo do campo vectorial $X = y\partial/\partial x - x\partial/\partial y$ em $\mathbb{R}^2$.

5. Indique um campo vectorial X em $\mathbb{R}$ que não seja completo.

6. Mostre que, se M é uma variedade compacta, então todo o campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é completo. Dê um exemplo de uma variedade com dois campos vectoriais X_1 e X_2 completos, tais que $X_1 + X_2$ não é completo.

7. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial que não se anula. Mostre que as curvas integrais de X formam uma folheação $\mathcal{F}$ de M, de dimensão 1. Reciprocamente, mostre que, localmente, as folheações de dimensão 1 são todas desta forma. Se $\Phi : N \to N$ é um difeomorfismo, e $\mathcal{F}$ é a folheação obtida por suspensão deste difeomorfismo, verifique que, *globalmente*, as folhas de $\mathcal{F}$ são as curvas integrais de um campo vectorial X.

8. Uma estrutura Riemanniana numa variedade M é uma escolha de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle_p$ em cada espaço tangente T_pM, que varia suavemente (para todos os campos vectoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a função $p \mapsto \langle X(p), Y(p)\rangle_p$ é C^∞). Mostre que existe uma estrutura Riemanniana em qualquer variedade M.

Lição 8. Parênteses e Derivada de Lie

Definição 8.1. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais. O* ***parênteses de Lie*** *de X e Y é o campo vectorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ definido por:*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)), \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

Note que, pela fórmula, $[X, Y]$ é um operador diferencial de ordem ≤ 2. No entanto, um pequeno cálculo mostra que $[X, Y]$ é uma derivação linear de $C^\infty(M)$:

$$[X, Y](fg) = [X, Y](f)g + f[X, Y](g), \quad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Assim, os termos de 2^{a} ordem cancelam-se e obtemos, de facto, um campo vectorial $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

O cálculo do parênteses de Lie em coordenadas locais é muito simples, se pensarmos nos campos vectoriais como operadores diferenciais de 1^{a} ordem. Ilustramos este cálculo com o seguinte exemplo.

Exemplo 8.2.
Seja $M = \mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z), e tomemos os campos vectoriais:

$$\begin{aligned} X &= z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}, \\ Y &= x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \\ Z &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned}$$

Então, por exemplo,

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} = Z. \end{aligned}$$

Deixamos como exercício o cálculo dos outros dois parênteses de Lie:

$$[Y, Z] = X, \quad [Z, X] = Y.$$

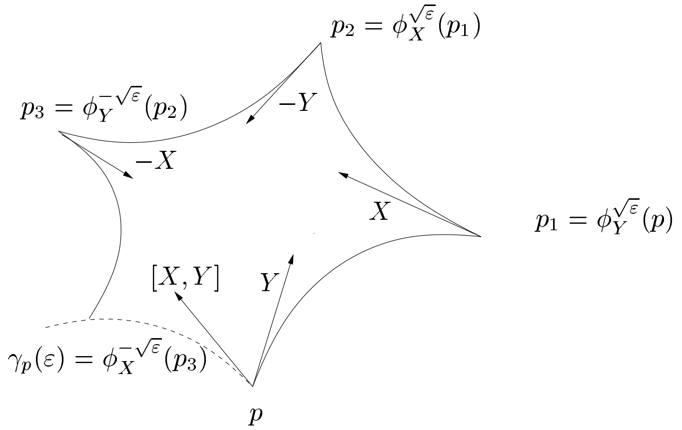
A proposição seguinte mostra que o parênteses de Lie mede a falta de comutatividade dos fluxos de X e Y.

Proposição 8.3. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais. Para cada $p \in M$, o comutador*

$$\gamma_p(\varepsilon) \equiv \phi_X^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_Y^{-\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_X^{\sqrt{\varepsilon}} \circ \phi_Y^{\sqrt{\varepsilon}}(p)$$

está bem definido para $\varepsilon \geq 0$, suficientemente pequeno. Verifica-se, ainda, a igualdade:

$$[X, Y]_p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\gamma_p(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0^+}.$$



Demonstração. Fixemos coordenadas locais $(U, x^1, \ldots, x^d)$, centradas em p, de forma que:

$$X = \sum_{i=1}^{d} X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_{i=1}^{d} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

O parênteses de Lie de Y e X é dado por:

$$[X, Y](x^i) = X(Y^i) - X(Y^i).$$

Vamos designar por p_1, p_2 e p_3 os pontos intermédios:

$$\begin{aligned} p_1 &= \phi_Y^{\sqrt{\varepsilon}}(p), \\ p_2 &= \phi_X^{\sqrt{\varepsilon}}(p_1), \\ p_3 &= \phi_Y^{-\sqrt{\varepsilon}}(p_2), \\ \gamma_p(\varepsilon) &= \phi_X^{-\sqrt{\varepsilon}}(p_3). \end{aligned}$$

A fórmula de Taylor (cf. Proposição 7.8), aplicada sucessivamente à função coordenada x^i, fornece:

$$\begin{aligned}
x^i(p_1) &= x^i(p) + \sqrt{\varepsilon}Y^i(p) + \frac{1}{2}\varepsilon Y^2(x^i)(p) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \\
x^i(p_2) &= x^i(p) + \sqrt{\varepsilon}(Y^i(p) + X^i(p)) + \\
&\quad + \varepsilon\left(\frac{1}{2}Y^2(x^i)(p) + X(Y^i)(p) + \frac{1}{2}X^2(x^i)(p)\right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \\
x^i(p_3) &= x^i(p) + \sqrt{\varepsilon}X^i(p) + \\
&\quad + \varepsilon\left(X(Y^i)(p) - Y(X^i)(p) + \frac{1}{2}X^2(x^i)(p)\right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}) \\
x^i(\gamma_p(\varepsilon)) &= x^i(p) + \varepsilon\left(X(Y^i)(p) - Y(X^i)(p)\right) + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}})
\end{aligned}$$

Logo:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{x^i(\gamma_p(\varepsilon)) - x^i(p)}{\varepsilon} = X(Y^i)(p) - Y(X^i)(p) = [X,Y]_p(x^i).$$

$\square$

A nossa próxima proposição fornece as propriedades mais importantes do parênteses de Lie, e a sua demonstração é deixada como exercício.

Proposição 8.4. *O parênteses de Lie satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) Anti-simetria: $[X,Y] = -[Y,X]$*;*
(ii) Bilinearidade: $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$*;*
(iii) Identidade de Jacobi: $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$*;*
(iv) Identidade de Leibniz: $[X, fY] = X(f)Y + f[X,Y]$, $\forall f \in C^\infty(M)$*.*

Uma outra propriedade importante é a de que o parênteses de Lie é preservado pelas aplicações diferenciáveis. O enunciado preciso é o seguinte, e a sua verificação é deixada como exercício.

Proposição 8.5. *Seja* $\Phi : M \to N$ *uma aplicação diferenciável. Se* X *e* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *são* Φ*-relacionados com, respectivamente,* Z *e* $W \in \mathfrak{X}(N)$*, então* $[X,Y]$ *é* Φ*-relacionado com* $[Z,W]$*.*

A interpretação geométrica fornecida pela Proposição 8.3, mostra que o parênteses de Lie está intimamente relacionado com o fluxo dos campos vectoriais. Existe, ainda, uma forma mais precisa desta relação. Para a compreender, necessitamos da seguinte definição:

Definição 8.6. *Seja* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *um campo vectorial.*

(i) A ***derivada de Lie da função*** $f \in C^\infty(M)$ *ao longo de* X *é a função* $\mathcal{L}_X f$ *dada por:*

$$(\mathcal{L}_X f)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(\phi_X^t(p)) - f(p)\right).$$

(ii) A ***derivada de Lie do campo vectorial*** $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *ao longo de* X *é o campo vectorial* $\mathcal{L}_X Y$ *dado por:*

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\mathrm{d}\phi_X^{-t} \cdot Y_{\phi_X^t(p)} - Y_p\right).$$

Para obter uma forma mais simétrica para estas definições, podemos observar que um difeomorfismo $\Phi : M \to M$ actua nas funções em $C^\infty(M)$ por:

$$(\Phi^* f)(p) = f(\Phi(p)),$$

e actua nos campos vectoriais $Y \in \mathfrak{X}(M)$ por:

$$(\Phi^* Y)_p = \mathrm{d}\Phi^{-1} \cdot Y_{\Phi(p)}.$$

Note que $\Phi^* Y = (\Phi^{-1})_* Y$ e, portanto, estas operações de "pull-back" estão relacionadas pela identidade:

$$\Phi^* Y(f) = Y((\Phi^{-1})^* f).$$

A derivada de Lie de um objecto P (uma função ou um campo vectorial) é, então, dada por:

$$\mathcal{L}_X P = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left((\phi_X^t)^* P - P \right). \tag{8.1}$$

Mais tarde iremos extender esta definição a outros objectos.

Teorema 8.7. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial.*

(i) Para toda a função $f \in C^\infty(M)$: $\mathcal{L}_X f = X(f)$.

(ii) Para todo o campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(M)$: $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Demonstração. Para mostrar (i), basta observar que:

$$\mathcal{L}_X f = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f \circ \phi_X^t \right|_{t=0} = \mathrm{d}f \cdot X = X(f).$$

Para mostrar (ii), observamos primeiro que

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X Y)(f)(p) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\mathrm{d}\phi_X^{-t} \cdot Y_{\phi_X^t(p)} - Y_p \right)(f) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Y_{\phi_X^t(p)}(f \circ \phi_X^{-t}) - Y_p(f) \right).\end{aligned}$$

Por outro lado, a fórmula de Taylor fornece:

$$f \circ \phi_X^{-t} = f - tX(f) + O(t^2),$$

logo:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X Y)(f)(p) &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Y_{\phi_X^t(p)}(f) - tY_{\phi_X^t(p)}(X(f)) - Y_p(f) \right) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(Y_{\phi_X^t(p)}(f) - Y_p(f) \right) - Y_p(X(f)) \\ &= X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) = [X, Y](f)(p).\end{aligned}$$

□

Exercícios.

1. Verifique as propriedades do parênteses de Lie, dadas pela Proposição 8.4.

2. Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Mostre que se X e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ são Φ-relacionados com, respectivamente, Z e $W \in \mathfrak{X}(N)$, então $[X, Y]$ é Φ-relacionado com $[Z, W]$.

3. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais com fluxos ϕ_X^t e ϕ_Y^s. Mostre que:

(a) X é invariante sob o difeomorfismo $\Phi : M \to M$ sse $\Phi \circ \phi_X^t = \phi_X^t \circ \Phi$ para todo o t.
(b) $\phi_X^t \circ \phi_Y^s = \phi_Y^s \circ \phi_X^t$ para todo o s e t sse $[X, Y] = 0$.

4. Sejam $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais numa variedade M, tais que:
(a) $\{X_1|_p, \dots, X_k|_p\}$ são linearmente independentes, para todo o $p \in M$;
(b) $[X_i, X_j] = 0$ para quaisquer $i, j = 1, \dots, k$.
Mostre que existe uma única folheação k-dimensional $\mathcal{F}$ de M tal que, para todo o $p \in M$, se tem
$$T_pL = \langle\, X_1|_p\,, \dots, \,X_k|_p\rangle,$$
onde $L \in \mathcal{F}$ é a folha que contém p.

Lição 9. Distribuições e Teorema de Frobenius

Um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, que não se anule, determina um subespaço $\langle X_p\rangle \subset T_pM$, em cada $p \in M$. Estes subespaços variam suavemente com p. A definição seguinte generaliza esta situação.

Definição 9.1. *Seja M uma variedade de dimensão d e $1 \leq k \leq d$ um inteiro. Uma **distribuição** k-dimensional D em M, é uma aplicação*
$$M \ni p \mapsto D_p \subset T_pM,$$
que a cada $p \in M$ associa um subespaço $D_p \subset T_pM$ de dimensão k. Dizemos que a distribuição D é de classe C^∞ se, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e campos vectoriais $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, tais que:
$$D_q = \langle X_1(q), \dots, X_k(q)\rangle, \quad \forall q \in U.$$

Se D é uma distribuição em M e $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial, dizemos que X é um campo vectorial em D ou que X é tangente a D, se
$$X_p \in D_p, \text{ para todo o } p \in M.$$
Vamos designar por $\mathfrak{X}(D)$ o conjunto dos campos vectoriais tangentes a uma distribuição D. Observe que $\mathfrak{X}(D)$ é um módulo sobre o anel $C^\infty(M)$.

Exemplos 9.2.

1. *Se X é um campo vectorial que não se anula, então $D : p \mapsto \langle X_p\rangle$ é uma distribuição e X é um campo vectorial em D.*
2. *Em $M = \mathbb{R}^3$, temos a distribuição 2-dimensional $D = \langle X_1, X_2\rangle$ gerada pelos campos vectoriais:*
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + z^2\frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial z}.$$
3. *Note-se que nem toda a distribuição 2-dimensional é gerada por 2 campos vectoriais, como no exemplo anterior: em $M = \mathbb{R}^3 - \{0\}$, temos a distribuição 2-dimensional $D = \langle X, Y, Z\rangle$, gerada pelos campos vectoriais X, Y e Z do Exemplo 8.2. Deixamos como exercício mostrar que esta distribuição não é gerada por dois campos vectoriais.*

No caso dos campos vectoriais, vimos que a noção de curva integral desempenha um papel crucial. Para as distribuições, a noção análoga é a seguinte:

Definição 9.3. *Seja D uma distribuição na variedade M. Uma subvariedade conexa (N, Φ) de M diz-se uma **variedade integral** de D se*

$$\mathrm{d}_p\Phi(T_pN) = D_{\Phi(p)}, \forall p \in N.$$

Observe que se D é uma distribuição k-dimensional, as suas variedades integrais (caso existam) têm dimensão k.

Exemplos 9.4.

1. *Consideremos a distribuição do Exemplo 9.2.2. O plano $z = 0$ é uma variedade integral desta distribuição, pois é conexo e*
$$D_{(x,y,0)} = \langle \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(x,y,0)}, \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(x,y,0)} \rangle.$$
2. *Voltemos à distribuição D do Exemplo 8.2. As esferas*
$$S_c = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - 0 : x^2 + y^2 + z^2 = c\},$$
são variedades integrais de D. De facto, estas são conexas, e temos que:
$$T_{(x,y,z)}S_c = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \cdot \vec{v} = 0\},$$
logo:
$$\langle X, Y, Z\rangle \subset T_{(x,y,z)}S_c.$$
Por outro lado, a matriz cujas colunas são as componentes de X, Y e Z:
$$\begin{pmatrix} -y & x & 0 \\ -z & 0 & x \\ 0 & -z & y \end{pmatrix}$$
tem rank 2 em todos os pontos. Logo $T_pS_c = D_p$, para todo o $p \in S_c$. Portanto, S_c é uma variedade integral, para cada c.

No segundo exemplo, por cada $p \in M$ passa uma variedade integral (o que é que acontece no primeiro exemplo?). Note, ainda, que a colecção das variedades integrais forma uma folheação de $\mathbb{R}^3 - 0$. Mais geralmente, se $\mathcal{F}$ é uma folheação k-dimensional de uma variedade M, designemos por $T_p\mathcal{F} \equiv T_pL$ o espaço tangente à folha L que contém p. A aplicação $D : p \mapsto T_p\mathcal{F}$ é uma distribuição k-dimensional em M. Um campo vectorial pertence a D sse é tangente à folheação, i.e., sse toda a curva integral de X pertence a uma folha de $\mathcal{F}$.

Dada uma distribuição D, nem sempre é verdade que exista uma folheação $\mathcal{F}$ tal que $D = T\mathcal{F}$. Um condição necessária para que tal aconteça é dada pela seguinte proposição:

Proposição 9.5. *Seja D uma distribuição C^∞ em M, e suponha-se que por cada ponto de M passa uma variedade integral de D. Então, para todo o par de campos vectoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$, temos que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(D)$.*

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$ campos vectoriais em D e $p_0 \in M$. Por hipótese, existe uma variedade integral (N, Φ) e $q_0 \in N$, tal que $\Phi(q_0) = p_0$. Como $\mathrm{d}_q\Phi : T_qN \to T_{\Phi(q)}M$ é injectiva, com imagem $D_{\Phi(q)}$, existem campos vectoriais $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(N)$ que são Φ-relacionados com X e Y, respectivamente. Mas, então, $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ é Φ-relacionado com $[X, Y]$ e, portanto,

$$[X, Y]_{p_0} = \mathrm{d}_{q_0}\Phi([\tilde{X}, \tilde{Y}]_{q_0}) \in \mathrm{d}_{q_0}\Phi(T_{q_0}N) = D_{p_0}.$$

Como p_0 era um ponto qualquer de M, concluímos que $[X, Y] \in \mathfrak{X}(D)$. $\square$

Estas observações motivam as seguintes definições:

Definição 9.6. *Seja D uma distribuição C^∞ em M.*

*(i) D diz-se **involutiva** se, sempre que $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$, então $[X, Y] \in \mathfrak{X}(D)$.*
*(ii) D diz-se **integrável** se existe uma folheação $\mathcal{F}$ tal que $D = T\mathcal{F}$.*

O resultado fundamental sobre integrabilidade de distribuições diz que a única obstrução à integrabilidade de uma distribuição é, precisamente, a de não ser involutiva.

Teorema 9.7 (Frobenius)**.** *Uma distribuição D de classe C^∞ é integrável sse é involutiva. Neste caso, a folheação tangente a D é única.*

Demonstração. A Proposição 9.5 fornece uma das implicações. Para verificar a outra implicação, suponha-se que D é uma distribuição involutiva. Vamos mostrar que, para cada $p \in M$, existem campos vectoriais $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$, definidos numa vizinhança U de p, tais que:

(a) $D|_U = \langle X_1, \dots, X_k \rangle$;
(b) $[X_i, X_j] = 0$, para quaisquer $i, j = 1, \dots, k$.

Desta forma, pelo Exercício 4 da Lição 8, obtemos uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de M, tal que, para cada $i \in I$, existe uma única folheação $\mathcal{F}_i$ em U_i que satisfaz $T\mathcal{F}_i = D|_{U_i}$. Pela unicidade, sempre que $U_i \cap U_j \neq 0$, temos $\mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} = \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$. Assim, existe uma única folheação $\mathcal{F}$ de M tal que $\mathcal{F}|_{U_i} = \mathcal{F}_i$.

Fixemos, então, $p \in M$. Por hipótese, existem campos vectoriais $Y_1, \dots, Y_k$ definidos numa vizinhança V de p, tais que $D|_V = \langle Y_1, \dots, Y_k \rangle$. Podemos, também, assumir que V é um domínio de um sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^d)$ de M, de forma que

$$Y_i = \sum_{l=1}^{d} a_{il} \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad (i = 1, \dots, k),$$

onde $a_{il} \in C^\infty(V)$. A matriz $A(q) = [a_{il}(q)]_{i,l=1}^{k,d}$, tem rank k em p. Podemos assumir, eventualmente após reordenar as variáveis x^l, que o menor $k \times k$, que corresponde às primeiras k linhas e colunas de A, tem determinante não-nulo numa vizinhança U de p. Seja B a matriz $k \times k$ que inverte este menor, e definam-se os campos vectoriais $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$ por:

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_{j,l=1}^{k,d} b_{ij} a_{jl} \frac{\partial}{\partial x^l} \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{l=k+1}^{d} c_{il} \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad (i = 1, \dots, k), \end{aligned}$$

onde $c_{il} \in C^\infty(U)$. Por um lado, vemos que

$$D|_U = \langle Y_1, \ldots, Y_k \rangle = \langle X_1, \ldots, X_k \rangle,$$

logo (a) é satisfeita. Por outro lado, um cálculo simples mostra que

$$[X_i, X_j] = \sum_{l=k+1}^{d} d_l^{ij} \frac{\partial}{\partial x^l}, \quad (i, j = 1, \ldots, k),$$

para certas funções $d_l^{ij} \in C^\infty(U)$. Como D é involutiva, este comutador é uma combinação $C^\infty(M)$-linear dos $X_1, \ldots, X_k$. Logo, as funções d_l^{ij} têm de ser identicamente nulas, e (b) também é satisfeita. □

Exercícios.

1. Dê um exemplo de uma distribuição D de dimensão 1 que não é globalmente gerada por um único campo vectorial.

2. Mostre que a distribuição 2-dimensional D do Exemplo 8.2, não é globalmente gerada por apenas dois campos vectoriais.

3. Mostre que o plano $z = 0$ é a única subvariedade integral da distribuição do Exemplo 9.2.2.

4. Verifique que a distribuição 2-dimensional em $\mathbb{R}^3$ definida pelos campos vectoriais
$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = e^{-x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z},$$
não possui qualquer variedade integral.

5. Considere a distribuição D em $\mathbb{R}^3$ gerada pelos campos vectoriais:
$$\frac{\partial}{\partial x} + \cos x \cos y \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} - \sin x \sin y \frac{\partial}{\partial z}.$$
Verifique que D é involutiva e determine a folheação $\mathcal{F}$ que a integra.

6. Na 3-esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ considere a distribuição 1-dimensional definida por
$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial w}.$$
Determine a folheação $\mathcal{F}$ que a integra.

Lição 10. Grupos de Lie e Álgebras de Lie

A nossa próxima definição é uma axiomatização das propriedades do parênteses de Lie de campos vectoriais (cf. Proposição 8.4).

Definição 10.1. *Uma **álgebra de Lie** é um espaço vectorial $\mathfrak{g}$ com uma operação $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, designada **parênteses de Lie**, que satisfaz:*

(i) Anti-simetria: $[X, Y] = -[Y, X]$;
(ii) Bilinearidade: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;
(iii) Identidade de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

É possível definir álgebras de Lie complexas (i.e, com $\mathfrak{g}$ um espaço vectorial complexo). Note, também, que o espaço vectorial na definição pode ter dimensão infinita, embora estejamos interessados, sobretudo, em álgebras de Lie de dimensão finita.

Exemplos 10.2.

1. *$\mathbb{R}^d$ com o parênteses de Lie zero $[\ ,\ ] \equiv 0$ é uma álgebra de Lie, dita a **álgebra de Lie abeliana** de dimensão d.*
2. *Para qualquer variedade, os campos vectoriais $\mathfrak{X}(M)$ formam uma álgebra de Lie (de dimensão infinita, se $\dim M \geq 1$).*
3. *Se V é um espaço vectorial, as aplicações lineares $T : V \to V$ formam uma álgebra de Lie, designada por $\mathfrak{gl}(V)$, com parênteses de Lie o comutador de transformações lineares:*
$$[T, S] = T \circ S - S \circ T.$$
Se $V = \mathbb{R}^n$, esta álgebra de Lie é designada por $\mathfrak{gl}(n)$. Fixando uma base para $\mathbb{R}^n$, podemos identificar $\mathfrak{gl}(n)$ com a álgebra de Lie das matrizes $n \times n$, com o comutador de matrizes.
4. *Em $\mathbb{R}^3$, podemos definir uma estrutura de álgebra de Lie, em que o parênteses de Lie é dado pelo produto externo:*
$$[\vec{v}, \vec{w}] = \vec{v} \times \vec{w}.$$
5. *Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são álgebras de Lie, o seu produto cartesiano $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ é uma álgebra de Lie, com parênteses definido pela fórmula:*
$$[(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] = ([X_1, X_2]_{\mathfrak{g}}, [Y_1, Y_2]_{\mathfrak{h}}).$$

Acontece, como veremos mais adiante, que as álgebras de Lie de dimensão finita estão intimamente associadas à seguinte classe de grupos:

Definição 10.3. *Um **grupo de Lie** é um grupo G com uma estrutura diferenciável, tal que as operações*
$$\mu : G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh \quad (\textit{multiplicação}),$$
$$\iota : G \to G,\ g \mapsto g^{-1} \quad (\textit{inversão}),$$
são aplicações diferenciáveis.

É possível (e útil) definir outras classes de grupos: grupos topológicos, grupos analíticos, grupos algébricos, etc. Não discutiremos outras classes nestas notas. Deixamos como exercício verificar que, na definição de grupo de Lie, basta assumir que a multiplicação é diferenciável.

Exemplos 10.4.

1. *$\mathbb{R}^d$ é um grupo de Lie para a adição de vectores.*
2. *Os reais não-nulos $\mathbb{R}^*$ e os complexos não-nulos $\mathbb{C}^*$ formam um grupo de Lie para a operação de multiplicação. É claro que $\mathbb{C}^*$ também é um grupo de Lie complexo, mas os grupos de Lie (i.e., variedades) que consideraremos serão sempre reais.*
3. *A circunferência $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*$ é um grupo de Lie.*

4. Se V é um espaço vectorial (de dimensão finita), o grupo das transformações lineares $T : V \to V$ invertíveis formam um grupo de Lie, designado por $GL(V)$, e chamado o ***grupo geral linear****. Se $V = \mathbb{R}^n$, este grupo pode ser identificado com o grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis, que se designa por $GL(n)$.*

5. Se G é um grupo de Lie, a componente conexa da identidade é um grupo de Lie. Por exemplo, os reais positivos $\mathbb{R}_+$, que formam a componente conexa da identidade de $\mathbb{R}^*$, são um grupo de Lie.

6. Se G e H são grupos de Lie, o produto cartesiano $G \times H$ é um grupo de Lie. Por exemplo, o toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ é um grupo de Lie.

Num grupo de Lie G, um campo vectorial X diz-se **invariante à esquerda** se:

$$(L_g)_*X = X, \quad \forall g \in G,$$

onde $L_g : G \to G$ é a **translação à esquerda** $h \mapsto gh$. De forma análoga, definem-se campos vectoriais invariantes à direita.

Proposição 10.5. *Seja G um grupo de Lie.*

(i) Todo o campo vectorial invariante à esquerda é de classe C^∞.
(ii) Se $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ são campos vectoriais invariantes à esquerda, então $[X, Y]$ também é invariante à esquerda.
(iii) O conjunto dos campos vectoriais invariantes à esquerda é um subespaço vectorial de $\mathfrak{X}(G)$, de dimensão igual a $\dim G$.

Demonstração. A demonstração de (i) é deixada como exercício. Para verificar (ii), basta observar que, se X e Y são campos vectoriais invariantes à esquerda, então:

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y], \quad \forall g \in G,$$

donde $[X, Y]$ é invariante à esquerda.

Seja $\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G)$ o conjunto dos campos vectoriais invariantes à esquerda. Da definição, é claro que $\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G) \subset \mathfrak{X}(G)$ é um subespaço linear. Por outro lado, a aplicação de restrição

$$\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G) \to T_eG, \; X \mapsto X_e,$$

é um isomorfismo linear. De facto, se $\mathbf{v} \in T_eG$, então definimos um campo vectorial X em G por:

$$X_g = \mathrm{d}L_g \cdot \mathbf{v}.$$

Este campo vectorial é invariante à esquerda e $X_e = \mathbf{v}$. Logo, a aplicação de restrição $\mathfrak{X}_{\text{inv}}(G) \to T_eG$ é sobrejectiva. Por outro lado, se $X_e = 0$ então $X_g = dL_g \cdot X_e = 0$ para todo o $g \in G$, e portanto a aplicação de restrição é injectiva. Assim,

$$\dim \mathfrak{X}_{\text{inv}}(G) = \dim T_eG = \dim G.$$

□

Segue-se da proposição que, se G é um grupo de Lie, os campos vectoriais em G invariantes à esquerda formam uma álgebra de Lie, que vamos designar por $\mathfrak{g}$. A demonstração mostra que podemos identificar $\mathfrak{g}$ com T_eG.

EXEMPLOS 10.6.

1. *Seja $G = (\mathbb{R}^d, +)$. Um campo vectorial em $\mathbb{R}^d$ é invariante à esquerda sse é constante: $X = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, com $a_i \in \mathbb{R}$. O parênteses de Lie de campos vectoriais constantes é zero, logo a álgebra de Lie de G é álgebra de Lie abeliana de dimensão d.*
2. *A álgebra de Lie do produto cartesiano $G \times H$ de dois grupos de Lie, é o produto cartesiano $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ das suas álgebras de Lie. Por exemplo, a álgebra de Lie de $\mathbb{S}^1$ tem dimensão 1, logo é abeliana. Assim, a álgebra de Lie do toro $\mathbb{T}^d$ também é a álgebra de Lie abeliana de dimensão d.*
3. *O espaço tangente na identidade do grupo geral linear $G = GL(n)$ pode ser identificado com $\mathfrak{gl}(n)$. Deixamos como exercício verificar que, o isomorfismo linear $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n)$, leva o parênteses de Lie de campos invariantes à esquerda no comutador de matrizes. Assim, podemos identificar a álgebra de Lie do grupo $GL(n)$ com $\mathfrak{gl}(n)$.*

Observação 10.7. Um questão natural é a de saber se a álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$, formada pelos campos vectoriais numa variedade M, está também associada a algum grupo de Lie. Como esta álgebra tem dimensão infinita (se $\dim M > 0$), este grupo de Lie deverá ter dimensão infinita. O grupo em questão é, de facto, o grupo dos difeomorfismos $\mathrm{Dif}(M)$.

No entanto, o estudo dos grupos de Lie de difeomorfismos é um assunto extremamente difícil, do qual pouco sabemos. Este estudo está, pois, muito para além do âmbito destas notas. Faremos no futuro referências, de forma heurística, a $\mathrm{Dif}(M)$ como um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$. Quaisquer resultados obtidos por este tipo de argumentos serão sempre justificados à *posteriori*.

Já vimos que a cada grupo de Lie está associada uma álgebra de Lie. Vamos agora ver que a um homomorfismo de grupos de Lie está associado um homomorfismo de álgebras de Lie.

Definição 10.8.

*(i) Uma aplicação $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ entre duas álgebras de Lie diz-se um **homomorfismo de álgebras de Lie**, se ϕ é uma aplicação linear e preserva os parênteses de Lie:*

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

*(ii) Uma aplicação $\Phi : G \to H$ entre dois grupos de Lie diz-se um **homomorfismo de grupos de Lie**, se Φ é uma aplicação diferenciável e é um homomorfismo de grupos:*

$$\Phi(gh^{-1}) = \Phi(g)\Phi(h)^{-1}, \quad \forall g, h \in G.$$

Seja $\Phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. A Φ associamos uma aplicação linear $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$: se $X \in \mathfrak{g}$, então $\Phi_*(X) \in \mathfrak{h}$ é o campo vectorial invariante à esquerda, que na identidade toma o valor $\mathrm{d}_e\Phi \cdot X_e$.

Proposição 10.9. *Seja $\Phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie. Então:*

(i) Para todo o $X \in \mathfrak{g}$, $\Phi_* X$ é Φ-relacionado com X;

(ii) $\Phi_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demonstração. A parte (ii) segue-se de (i), pois o parênteses de Lie é preservado para campos Φ-relacionados. Para mostrar (i), notamos que, como Φ é um homomorfismo, $\Phi \circ L_g = L_{\Phi(g)} \circ \Phi$. Logo:

$$\begin{aligned}
\Phi_*(X)_{\Phi(g)} &= \mathrm{d}_e L_{\Phi(g)} \cdot \mathrm{d}_e \Phi \cdot X_e \\
&= \mathrm{d}_e(L_{\Phi(g)} \circ \Phi) \cdot X_e \\
&= \mathrm{d}_e(\Phi \circ L_g) \cdot X_e \\
&= \mathrm{d}_g \Phi \cdot \mathrm{d}_e L_g \cdot X_e = \mathrm{d}_g \Phi \cdot X_g.
\end{aligned}$$

□

Exemplos 10.10.

1. *Seja $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Para cada $a \in \mathbb{R}$ temos o homomorfismo de grupos de Lie $\Phi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ dado por:*

$$\Phi_a(t) = (e^{it}, e^{iat}).$$

Se a é racional, a imagem de Φ_a é uma curva fechada, enquanto que se a é irracional, a imagem é uma curva densa no toro. A aplicação induzida entre as respectivas álgebra de Lie $\phi_a = (\Phi_a)_* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é dada por:

$$\phi_a(X) = (X, aX).$$

2. *Fixemos uma matriz $A \in GL(n)$. Temos um automorfismo de grupos de Lie $\Phi_A : GL(n) \to GL(n)$ dado por conjugação:*

$$\Phi_A(B) = ABA^{-1}.$$

Como esta aplicação é linear, a aplicação induzida $(\Phi_A)_* : \mathfrak{gl}(n) \to \mathfrak{gl}(n)$ também é dada por:

$$(\Phi_A)_*(X) = AXA^{-1}.$$

3. *Mais geralmente, num grupo de Lie G qualquer, podemos considerar conjugação por um elemento $g \in G$: $i_g : G \to G$, $h \mapsto ghg^{-1}$. Esta aplicação é um automorfismo de Lie. A aplicação induzida, é um automorfismo da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G, que se designa por $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$:*

$$\mathrm{Ad}(g)(X) = (i_g)_* X.$$

Prosseguindo o estudo da correspondência entre grupos de Lie e álgebras de Lie, vamos agora ver que a cada subgrupo de Lie está associada uma subálgebra de Lie.

Definição 10.11. *Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ diz-se uma* ***subálgebra de Lie*** *se, para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$, temos $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.*

Exemplos 10.12.

1. *Qualquer subespaço da álgebra de Lie abeliana $\mathbb{R}^d$ é uma subálgebra de Lie.*
2. *A álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n)$ possui, por exemplo, a subálgebra de Lie formada pelas matrizes de traço zero:*

$$\mathfrak{sl}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) : \mathrm{tr}\, X = 0\},$$

bem como a subálgebra de Lie formada pelas matrizes anti-simétricas

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n) : X + X^T = 0\}.$$

3. As matrizes $n\times n$ complexas, designadas por $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, podem ser vistas como uma álgebra de Lie real. Esta álgebra de Lie possui, por exemplo, a subálgebra de Lie das matrizes anti-hermiteanas

$$\mathfrak{u}(n)=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : X+\bar{X}^T=0\},$$

e a subálgebra de Lie das matrizes anti-hermiteanas de traço zero:

$$\mathfrak{su}(n)=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) : X+\bar{X}^T=0, \operatorname{tr} X=0\}.$$

4. Se $\phi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então o seu núcleo é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ e a sua imagem é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{h}$.

A noção de subgrupo de Lie é um pouco mais subtil.

Definição 10.13. *Seja G um grupo de Lie. Uma subvariedade (H,Φ) de G diz-se um* ***subgrupo de Lie*** *se:*

(i) H é um grupo de Lie;
(ii) $\Phi: H\to G$ é um homomorfismo de grupos de Lie.

Como vimos na Lição 3, podemos sempre substituir a subvariedade (H,Φ) pelo subconjunto $\Phi(G)\subset G$, e a imersão Φ pela inclusão i. Como $\Phi(G)$ é um subgrupo de G, na definição de subgrupo de Lie, podemos assumir que $H\subset G$ é um subgrupo e que Φ é a inclusão. Por outro lado, como a aplicação induzida $\Phi_*:\mathfrak{h}\to\mathfrak{g}$ é injectiva, podemos assumir que a álgebra de Lie dum subgrupo de Lie $H\subset G$ é uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$.

Exemplos 10.14.

1. Pelo Exemplo 10.10.1, para cada $a\in\mathbb{R}$ temos um subgrupo de Lie $\Phi_a(\mathbb{R})$ de $\mathbb{T}^2$. Se a é racional, este subgrupo é mergulhado, enquanto que se a é irracional, este subgrupo é apenas imerso.

2. O grupo geral linear $GL(n)$ possui, por exemplo, os seguintes subgrupos de Lie mergulhados:

(i) O ***grupo especial linear*** *formado pelas matrizes de determinante 1:*

$$SL(n)=\{A\in GL(n) : \det A=1\}.$$

A este subgrupo corresponde a subálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n)$.

(ii) O ***grupo ortogonal*** *formado pelas matrizes ortogonais:*

$$O(n)=\{A\in GL(n) : AA^T=I\}.$$

A este subgrupo corresponde a subálgebra de Lie $\mathfrak{o}(n)$.

(iii) O ***grupo ortogonal especial*** *formado pelas matrizes ortogonais com determinante positivo:*

$$SO(n)=\{A\in O(n) : \det A=1\}.$$

A este subgrupo corresponde a mesma subálgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)=\mathfrak{o}(n)$.

3. Da mesma forma, o grupo linear (real) $GL(n,\mathbb{C})$ possui, por exemplo, os seguintes subgrupos de Lie mergulhados:

(i) O ***grupo unitário*** *formado pelas matrizes unitárias:*

$$U(n)=\{A\in GL(n,\mathbb{C}) : A\bar{A}^T=I\}.$$

A este subgrupo corresponde a subálgebra de Lie $\mathfrak{u}(n)$.

*(ii) O **grupo unitário especial** formado pelas matrizes unitárias de determinante 1:*

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det A = 1\}.$$

A este subgrupo corresponde a subálgebra de Lie $\mathfrak{su}(n)$.

Exercícios.

1. Mostre que, na definição de grupo de Lie, basta assumir que:
(a) a aplicação

$$G \times G \to G : \ (g, h) \mapsto gh^{-1}$$

é diferenciável, ou que
(b) a aplicação

$$G \times G \to G : \ (g, h) \mapsto gh$$

é diferenciável (Sugestão: Use o Teorema da Função Implícita.)

2. Para um grupo de Lie G verifique que todo o campo vectorial invariante à esquerda é de classe C^∞ e é completo.

3. Verifique que o espaço tangente na identidade do grupo geral linear $G = GL(n)$ pode ser identificado com $\mathfrak{gl}(n)$. Mostre, ainda, que o isomorfismo linear $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n)$, leva o parênteses de Lie de campos invariantes à esquerda no comutador de matrizes.

4. Mostre que o fibrado tangente TG de um grupo de Lie G é trivial, i.e., existem campos vectoriais $X_1, \dots, X_d \in \mathfrak{X}(G)$ que em cada $g \in G$ formam uma base de T_gG. Conclua que uma esfera de dimensão par $\mathbb{S}^{2n}$ não admite uma estrutura de grupo de Lie.

5. Considere $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{H}$ como o conjunto dos quaterniões unitários. Verifique que $\mathbb{S}^3$, com o produto de quaterniões, é um grupo de Lie e determine a sua álgebra de Lie. Mostre, ainda, que $\mathbb{S}^3$ e $SU(2)$ são grupos de Lie isomorfos.

6. Seja $A \subset G$ um subgrupo de um grupo de Lie G. Mostre que se existe um estrutura diferenciável tal que (A, i) é uma subvariedade de G, então essa estrutura diferenciável é única e, para essa estrutura, A é um grupo de Lie e (A, i) é um subgrupo de Lie.

7. Seja (H, Φ) um subgrupo de Lie de G. Mostre que Φ é um mergulho sse $\Phi(H)$ é fechado.

Lição 11. Integração de Álgebras de Lie e Exponencial

Vimos na Lição anterior que:

- A cada grupo de Lie está associada uma álgebra de Lie.
- A cada homomorfismo entre grupos de Lie está associado um homomorfismo entre as suas álgebras de Lie.
- A cada subgrupo de Lie está associado uma subálgebra de Lie.

É natural estudar se os recíprocos destes resultados são válidos, o que faremos nesta Lição. Note-se desde já que, por exemplo, os grupos de Lie $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{T}^n$ têm álgebras de Lie isomorfas, e que estes grupos são bastante diferentes do ponto de vista topológico. Isto mostra que existem questões topológicas que devem ser levadas em conta no estudo destes problemas de integração.

Começamos então com um resultado de natureza topológica, que mostra que um grupo de Lie conexo é determinado pelo que acontece numa vizinhança da identidade:

Proposição 11.1. *Seja G um grupo de Lie conexo e U uma vizinhança da identidade $e \in G$. Então,*

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n,$$

onde $U^n = \{g_1 \cdots g_n : g_i \in U, i = 1, \ldots, n\}$.

Demonstração. Se $U^{-1} = \{g^{-1} : g \in U\}$ e $V = U \cap U^{-1}$, então V é uma vizinhança da origem, que satisfaz $V = V^{-1}$. Seja:

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n.$$

Para completar a demonstração, basta mostrar que $H = G$.

Observe-se, por um lado, que:

(i) H é um subgrupo: Se $g, h \in H$, então $g = g_1 \ldots g_n$ e $h = h_1 \ldots h_m$, com $g_i, h_j \in V$. Logo,

$$gh^{-1} = g_1 \ldots g_n h_m^{-1} \ldots h_1^{-1} \in V^{n+m} \subset H.$$

(ii) H é aberto: Se $g \in H$ então $gV \subset gH = H$ é um aberto que contém g.

Por outro lado, para cada $g \in G$, gH é um conjunto aberto, e como

$$H^c = \bigcup_{g \notin H} gH,$$

vemos que H também é fechado.

Sendo G conexo e $H \neq \varnothing$ aberto e fechado, concluímos que $H = G$. □

Podemos agora mostrar que:

Teorema 11.2. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dada uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, existe um único subgrupo de Lie conexo $H \subset G$, com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$.*

Demonstração. A subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ define uma distribuição em G:

$$D : g \mapsto D_g \equiv \{X_g : X \in \mathfrak{h}\}.$$

Esta distribuição é C^∞ e involutiva. De facto, se $X_1, \ldots, X_k$ é uma base para $\mathfrak{h}$, então estes campos geram D, logo D é C^∞. Por outro lado, se $Y, Z \in \mathfrak{X}(D)$, podemos escrever

$$Y = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i, \quad Z = \sum_{j=1}^{k} b_j X_j.$$

Como:

$$[Y, Z] = \sum_{i,j=1}^{k} a_i a_j [X_i, X_j] + a_i X_i(b_j) X_j - b_j X_j(a_i) X_i \in \mathfrak{X}(D),$$

esta distribuição é involutiva.

Seja (H, Φ) a folha desta distribuição que contém a identidade $e \in G$. Se $g \in \Phi(H)$, então $(H, L_{g^{-1}} \circ \Phi)$ também é uma variedade integral de D que contém e. Logo, $L_{g^{-1}} \circ \Phi(H) \subset \Phi(H)$. Concluímos que, se $g, h \in \Phi(H)$, então $g^{-1}h \in \Phi(H)$, e portanto $\Phi(H)$ é um subgrupo de G. Como $\Phi : H \to \Phi(H)$ é uma bijecção, concluímos que H possui uma estrutura de grupo, tal que $\Phi : H \to G$ é um homomorfismo de grupos. Para verificar que (H, Φ) é um subgrupo de Lie, resta pois verificar que a aplicação $\hat{\nu} : H \times H \to H$, $(g, h) \mapsto g^{-1}h$, é C^∞. Para isso, observe que a aplicação $\nu : H \times H \to G$, $(g, h) \mapsto \Phi(g)^{-1}\Phi(h)$ é C^∞, pois é a composição de aplicações C^∞. Como temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} H \times H \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "\hat{\nu}"'] & G \\ & H \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

e as folhas são subvariedades iniciais, concluímos que $\hat{\nu} : H \times H \to H$ é C^∞.

A demonstração da unicidade é deixada como exercício. $\square$

Vejamos agora a questão de, dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, encontrar um grupo de Lie G que integra $\mathfrak{g}$. Para isso, vamos utilizar o facto de que qualquer álgebra de Lie de dimensão finita é isomorfa a uma álgebra de matrizes. Este é um resultado fundamental cuja demonstração está para além do âmbito destas notas, pois exige um estudo mais detalhado da estrutura das álgebras de Lie. Limitamos-nos, pois, a enunciar este resultado na seguinte forma:

Teorema 11.3 (Ado)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Para algum inteiro n, existe um homomorfismo injectivo $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n)$.*

Observação 11.4. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, um espaço vectorial V, e um homomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, chama-se a (V, ρ) um **representação da álgebra de Lie** ou, ainda, um **$\mathfrak{g}$-módulo**. Uma representação (V, ρ) diz-se **fiel**, se ρ é injectiva. Assim, nesta linguagem, o Teorema de Ado afirma que toda a álgebra de Lie de dimensão finita possui uma representação fiel.

Já sabemos que $\mathfrak{gl}(n)$ é a álgebra de Lie de $GL(n)$. Obtemos, como corolário do Teorema de Ado e da integrabilidade de subálgebras de Lie (cf. Teorema 11.2), o resultado seguinte:

Teorema 11.5. *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, existe um grupo de Lie G com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.*

Deve-se observar que, ao contrário do que o Teorema de Ado possa sugerir, existem grupos de Lie que *não* são isomorfos a grupos de matrizes. Veremos um exemplo mais adiante. Isto deve-se a que, como já sabemos, possam existir vários grupos de Lie que integram uma mesma álgebra de Lie.

Para esclarecer esta situação, recordemos que, se $\pi : N \to M$ é revestimento de uma variedade diferenciável M, então N possui uma estrutura diferenciável para a qual a aplicação de revestimento é um difeomorfismo local. Recordemos, ainda, que, se M é conexa, um **revestimento universal** de M é um revestimento 1-conexo (i.e., conexo e simplesmente conexo) de M. Este revestimento é único, a menos de isomorfismo. Para grupos de Lie é válida a

Proposição 11.6. *Seja G um grupo de Lie. O seu revestimento universal $\widetilde{G}$ é um grupo de Lie, e a aplicação de revestimento $\pi : \widetilde{G} \to G$ é um homomorfismo de grupos de Lie. As álgebras de Lie de G e $\widetilde{G}$ são isomorfas.*

Demonstração. Podemos identificar o revestimento universal $\widetilde{G}$ com as classes de homotopia de caminhos $\gamma : [0,1] \to G$, tais que $\gamma(0) = e$. A aplicação de revestimento é dada por $\pi([\gamma]) = \gamma(1)$. Definimos uma estrutura de grupo em $\tilde{G}$ da seguinte forma:

(a) Multiplicação $\mu : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$: o produto $[\gamma][\eta]$ é a classe de homotopia do caminho $t \mapsto \gamma(t)\eta(t)$.
(b) Identidade $\tilde{e} \in \widetilde{G}$: é classe de homotopia do caminho constante $\gamma(t) = e$.
(c) Inversão $i : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$: o inverso de $[\gamma]$ é a classe de homotopia do caminho $t \mapsto \gamma(t)^{-1}$.

Para verificar que $\widetilde{G}$ é um grupo de Lie, basta observar que a aplicação $\tilde{\nu} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$, $(g,h) \to g^{-1}h$, é diferenciável, pois temos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G} \times \widetilde{G} \arrow[r, "\tilde{\nu}"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "\pi"] \\
G \times G \arrow[r, "\nu"'] & G
\end{tikzcd}$$

em que as setas verticais são difeomorfismos locais, e ν é diferenciável.

Para esta estrutura de grupo, a aplicação de revestimento $\pi : \widetilde{G} \to G$ é, claramente, um homomorfismo de grupos. Como π é um difeomorfismo local, π induz um isomorfismo entre as álgebras de Lie de $\widetilde{G}$ e de G. $\square$

Podemos portanto concluir que:

Corolário 11.7. *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, existe um grupo de Lie G, 1-conexo, com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 11.8.

O grupo especial unitário com $n = 2$, tem dimensão 3, e pode ser escrito na forma:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}.$$

Recordemos que um modelo para os quaterniões $\mathbb{H}$ é dado pelo subespaço das matrizes complexas 2×2, com base

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

satisfazendo as relações:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ijk = -1.$$

Definindo a norma de um quaternião $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, por $|q|^2 = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$, vemos que o grupo $SU(2)$ pode ser identificado com o grupo dos quaterniões de norma 1. Assim, $SU(2)$ é um grupo de Lie isomorfo à esfera $\mathbb{S}^3$ e, por isso, é 1-conexo.

Como vimos acima, a álgebra de Lie de $SU(2)$ é formada pelas matrizes anti-hermiteanas, de traço zero:

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} i\alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & -i\alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Este espaço tem dimensão 3. Identificamos a matriz definida por α e β com o elemento $(\alpha, \operatorname{Re}\beta, \operatorname{Im}\beta)$ de $\mathbb{R}^3$. Consideremos a aplicação que a cada $g \in SU(2)$ associa a transformação linear $\operatorname{Ad} g : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$ (cf. Exemplo 10.10.3). Deixamos como exercício verificar que, sob a identificação $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathbb{R}^3$, temos:

(a) A aplicação $\operatorname{Ad} g$ determina um elemento de $SO(3)$.

(b) $\operatorname{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ é um homomorfismo de grupos, sobrejectivo, com núcleo $\{\pm I\}$.

Assim, a aplicação $\operatorname{Ad} : SU(2) \to SO(3)$ é uma aplicação de revestimento. Como $SU(2)$ é 1-conexo, concluímos que $SU(2) \simeq \mathbb{S}^3$ é o revestimento universal de $SO(3)$, e que aplicação de revestimento identifica os pontos antipodais. Isto mostra que $SO(3)$ pode ser identificado com o plano projectivo $\mathbb{P}^2$ e, ainda, que $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$.

Vejamos agora a integração de homomorfismos entre grupos de Lie. Antes de mais, observamos que a aplicação identidade $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um homomorfismo entre as álgebras de Lie de $\mathbb{S}^1$ e de $\mathbb{R}$. Por outro lado, não existe nenhum homomorfismo, não-trivial, de grupos de Lie $\Phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ (a sua imagem seria um subgrupo de $\mathbb{R}$, compacto, não-trivial). Assim, em geral, um homomorfismo entre as álgebras de Lie de dois grupos de Lie, não provém de um homomorfismo dos grupos de Lie. Mais uma vez as obstruções são de natureza topológica, e o seguinte resultado fornece uma resposta a este problema.

Teorema 11.9. *Sejam G e H grupos de Lie, com álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$. Se G é 1-conexo, então para todo o homomorfismo $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$, existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G \to H$ tal que $\Phi_* = \phi$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{k} = \{(X, \phi(X)) : X \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ o gráfico de ϕ. Como ϕ é um homomorfismo de álgebras de Lie, $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$. Existe pois um subgrupo de Lie conexo $K \subset G \times H$ que a integra. Consideremos as projecções no primeiro e segundo factores:

$$\begin{tikzcd} & K \subset G \times H \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ G & & H \end{tikzcd}$$

A restrição da primeira projecção a K, $\pi_1|_K : K \to G$, fornece um homomorfismo de grupos de Lie, que satisfaz:

$$(\pi_1)_*(X, \phi(X)) = X.$$

Portanto, $(\pi_1|_K)_* : \mathfrak{k} \to \mathfrak{g}$ é um isomorfismo. Segue-se (exercício) que $\pi_1|_K : K \to G$ é um revestimento. Como G é 1-conexo, concluímos que $\pi_1|_K$ é um isomorfismo de grupos de Lie. A composição

$$\Phi = \pi_2 \circ (\pi_1|_K)^{-1} : G \to H$$

é um homomorfismo de grupos de Lie, e temos que:

$$\begin{aligned}(\Phi)_*(X) &= (\pi_2)_* \circ (\pi_1|_K)_*^{-1}(X)\\ &= (\pi_2)_*(X, \phi(X)) = \phi(X).\end{aligned}$$

A unicidade é deixada como exercício. □

É fácil usar este teorema para concluir que:

Corolário 11.10. *Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita, existe um único (a menos de isomorfismo) grupo de Lie G, 1-conexo, com álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{g}$.*

Exemplo 11.11.
Consideremos o grupo especial linear

$$SL(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Já sabemos que a sua álgebra de Lie é $\mathfrak{sl}(2)$, o conjunto das matrizes 2×2 com traço nulo. Para determinar a estrutura topológica de $SL(2)$ é conveniente utilizar a mudança de variáveis $(a, b, c, d) \mapsto (p, q, r, s)$, definida por

$$a = p + q, \quad d = p - q, b = r + s, c = r - s,$$

de forma que:

$$ad - bc = 1 \quad \Longleftrightarrow p^2 + s^2 = q^2 + r^2 + 1.$$

Para cada $(q, r) \in \mathbb{R}^2$, o par (p, s) pertence à circunferência de raio $\sqrt{q^2 + r^2 + 1}$, donde concluímos que $SL(2)$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Em particular,

$$\pi_1(SL(2)) = \pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}.$$

Seja $\widetilde{SL(2)}$ o grupo revestimento universal de $SL(2)$. Vamos ver que $\widetilde{SL(2)}$ não é isomorfo a um grupo de matrizes. Para isso, precisamos do seguinte facto, cuja demonstração deixamos como exercício:

Lema 11.12. *Seja $\phi : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(n)$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : SL(2) \to GL(n)$ tal que $\Phi_* = \phi$.*

Suponha-se, por absurdo, que existia um homomorfismo injectivo de grupos de Lie $\widetilde{\Phi} : \widetilde{SL(2)} \to GL(V)$. Este homomorfismo induz um homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(n)$. Pelo lema, existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : SL(2) \to GL(n)$ tal que $\Phi_* = \phi$, e obtemos um diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{SL(2)} \arrow[r, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & GL(V) \\ SL(2) \arrow[ur, "\Phi"'] & G \end{tikzcd}$$

Neste diagrama, a aplicação π não é injectiva, enquanto que $\widetilde{\Phi}$ é injectiva, uma contradição.

Como aplicação da integração de homomorfismos, vamos construir a aplicação exponencial para grupos/álgebras de Lie, que generaliza a exponencial de matrizes. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Dado um campo vectorial $X \in \mathfrak{g}$, a aplicação $\mathbb{R} \to \mathfrak{g}$, $t \mapsto tX$, é um homomorfismo de álgebras de Lie. Pelo teorema, existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi_X : \mathbb{R} \to G$ que o integra. Observe que:

$$\begin{aligned}
\Phi_X(0) &= e \\
\Phi_X(t+s) &= \Phi_X(t)\Phi_X(s) = L_{\Phi_X(t)}\Phi_X(s), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_X(t) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi_X(t+s)\right|_{s=0} \\
&= \mathrm{d}_e L_{\Phi_X(t)} \cdot \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Phi_X(s)\right|_{s=0} \\
&= \mathrm{d}_e L_{\Phi_X(t)} \cdot X_e = X_{\Phi_X(t)}.
\end{aligned}$$

Isto é, $t \mapsto \Phi_X(t)$ é a curva integral de X que passa pela identidade $e \in G$. Recordando que ϕ_X^t designa o fluxo do campo vectorial X, temos:

Definição 11.13. *A **aplicação exponencial*** $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *é a aplicação*

$$\exp(X) = \Phi_X(1) = \phi_X^1(e).$$

A proposição seguinte fornece as propriedades básicas da aplicação exponencial. A sua demonstração é deixada como exercício.

Proposição 11.14. *A aplicação exponencial* $\exp : \mathfrak{g} \to G$ *satisfaz:*

(i) $\exp((t+s)X) = \exp(sX)\exp(tX)$;
(ii) $\exp(-tX) = [\exp(tX)]^{-1}$;
(iii) $\exp$ *é* C^∞ *e* $\mathrm{d}_0 \exp = I$;
(iv) Se $\Phi : G \to H$ *é um homomorfismo de grupos de Lie, temos um diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\Phi"] & H \\
\mathfrak{g} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "\Phi_*"'] & \mathfrak{h} \arrow[u, "\exp"']
\end{tikzcd}$$

Observe que a propriedade (iii) mostra que a exponencial é um difeomorfismo de uma vizinhança de $0 \in \mathfrak{g}$ para uma vizinhança de $e \in G$. Em geral, a exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$ não é sobrejectiva, não é injectiva, e não é um difeomorfismo local. Existem, no entanto, exemplos de grupos de Lie em que alguma(s) destas propriedades se verifica(m) (ver exercícios).

Exemplo 11.15.
Recordemos que se $G = GL(n)$ a sua álgebra de Lie pode ser identificada com $\mathfrak{gl}(n)$. Se $A \in \mathfrak{gl}(n)$, o campo vectorial invariante à esquerda que corresponde à matriz $A = (a_{ij})$, é o campo vectorial:

$$X_A = \sum_{ijk} x_{ik} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}.$$

Assim, as curvas integrais deste campo, são as soluções do sistema linear:

$$\dot{x}_{ij} = \sum_k x_{ik} a_{kj},$$

que são dadas, como sabemos, por:

$$(x_{ij})(t) = (x_{ij})(0) \cdot e^{tA},$$

onde a exponencial da matriz A é:

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Assim, concluímos que a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{gl}(n) \to GL(n)$*, coincide com a exponencial usual de matrizes.*

Da Proposição 11.14 (iv), concluímos que se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(n)$ é uma subálgebra de Lie, a que corresponde o subgrupo de Lie conexo $H \subset GL(n)$, então a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{h} \to H$ *também é dada pela exponencial de matrizes. Por exemplo, se $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(n)$ e $H = SL(n)$ a exponencial de uma matriz de traço zero é uma matriz de determinante 1, o que se segue, também, da fórmula bem conhecida:*

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}.$$

A exponencial é muito útil no estudo de grupos e álgebras de Lie, pois fornece uma relação directa entre a álgebra de Lie (o objecto infinitesimal) e o grupo de Lie (o objecto global). Temos, por exemplo, o seguinte resultado cuja demonstração deixamos como exercício:

Proposição 11.16. *Seja $H \subset G$ um subgrupo dum grupo de Lie e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ um subespaço da álgebra de Lie de G. Seja, ainda, $U \subset \mathfrak{g}$ uma vizinhança de* 0 *difeomorfa a uma vizinhança V da identidade em G, pela aplicação exponencial. Se*

$$\exp(\mathfrak{h} \cap U) = H \cap V,$$

então H, com a topologia relativa, é um subgrupo de Lie de G cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$.

Podemos utilizar esta proposição para demonstrar o seguinte resultado importante:

Teorema 11.17. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então H, com a topologia relativa, é um subgrupo de Lie.*

Exercícios.

1. Mostre que se $\Phi : G \to H$ é um homomorfismo de grupos de Lie, com G e H conexos, tal que $(\Phi)_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é um isomorfismo, então Φ é um revestimento.

2. Complete a demonstração do Teorema 11.2 (i.e., a unicidade).

3. Seja G um grupo de Lie e $\pi : H \to G$ um seu revestimento. Mostre que H é um grupo de Lie.

4. Seja $SL(2, \mathbb{C})$ o grupo das matrizes complexas 2×2 de determinante 1. Mostre que $SL(2, \mathbb{C})$ é 1-conexo.
(Sugestão: Mostre que $SL(2, \mathbb{C})$ se retrai em $SU(2) = \mathbb{S}^3$.)

5. Mostre que todo o homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(n)$ integra-se num único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : SL(2) \to GL(n)$.

(Sugestão: Considere a complexificação $\phi^c : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ de ϕ e utilize o exercício anterior.)

6. Verifique que a matriz
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
não pertence à imagem de $\exp : \mathfrak{gl}(2) \to GL(2)$.

7. Seja G um grupo de Lie compacto e conexo. Mostre que $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é sobrejectiva.
(Sugestão: Use o facto, a ser demonstrado mais adiante, que um grupo de Lie compacto possui uma métrica bi-invariante, i.e., invariante por translações à esquerda e à direita.)

8. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$ a representação adjunta e $\mathrm{ad} \equiv \mathrm{Ad}_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ o homomorfismo induzido. Mostre que:
   (a) $\mathrm{ad}(X)(Y) = [X, Y]$;
   (b) $\exp(X)\exp(Y)\exp(-X) = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{ad}(X))^n Y\right)$;
   (c) Se G é conexo então G é abeliano *sse* $\mathfrak{g}$ é abeliana;

9. Seja $\Phi : G \to H$ um homomorfismo de grupos de Lie, com G conexo. Mostre que se o núcleo de Φ é discreto então está contido no centro de G. Conclua que o grupo fundamental de um grupo de Lie é um grupo abeliano.

10. Sejam G e H grupos de Lie. Mostre que:
   (a) Todo o homomorfismo $\Phi : \mathbb{R} \to G$ contínuo é C^∞;
   (b) Todo o homomorfismo $\Phi : G \to H$ contínuo é C^∞;
   (c) Se G e H são isomorfos como grupos topológicos, então G e H são isomorfos como grupos de Lie.

11. Demonstre a Proposição 11.16.

Lição 12. Grupos de Transformações

Seja G um grupo e M um conjunto. Recordemos que uma **acção** de G em M é um homomorfismo $\widehat{\Psi}$ de G para o grupo das bijecções de M. Também podemos ver uma acção como uma aplicação $\Psi : G \times M \to M$, que escrevemos $(g, p) \mapsto g \cdot p$, definindo:
$$g \cdot p \equiv \widehat{\Psi}(g)(p).$$
Como $\widehat{\Psi}$ é um homomorfismo de grupos, obtemos:

(a) $e \cdot p = p$, para todo o $p \in M$;
(b) $g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p$, para todo o $g, h \in G$ e $p \in M$.

Reciprocamente, toda a aplicação $\Psi : G \times M \to M$ que satisfaz (a) e (b), determina um homomorfismo $\widehat{\Psi}$. Daqui em diante, designamos uma acção por $\Psi : G \times M \to M$, e para cada $g \in G$, designamos por Ψ_g a bijecção:
$$\Psi_g : M \to M, \quad p \mapsto g \cdot p$$

Suponhamos, agora, que G é um grupo de Lie e M é uma variedade. Uma **acção diferenciável** é uma acção em que a aplicação $\Psi : G \times M \to M$ é diferenciável. Neste caso, cada $\Psi_g : M \to M$ é um difeomorfismo de M. Por isso, também dizemos que G é um **grupo de transformações** de M.

Seja $G \times M \to M$ uma acção diferenciável. O **subgrupo de isotropia** de um ponto $p \in M$, é o subgrupo de G dado por

$$G_p \equiv \{g \in G : g \cdot p = p\}.$$

Todo o subgrupo de isotropia $G_p \subset G$ é um subgrupo de Lie mergulhado, pois é fechado em G. Uma **acção livre** é uma acção em que todos os subgrupos de isotropia são triviais. Por outras palavras, para uma acção livre, todo o $g \in G - \{e\}$ actua sem pontos fixos:

$$g \cdot p = p, \text{ para algum } p \in M \quad \Longrightarrow \quad g = e.$$

Dada uma acção $\Psi : G \times M \to M$ definimos uma relação de equivalência $\sim$ em M por:

$$p \sim q \iff \exists g \in G : \ q = g \cdot p.$$

A classes de equivalência desta relação chamam-se **órbitas** da acção, e o conjunto das classes de equivalência designa-se por $G\backslash M$. Se dois pontos p e q pertence à mesma órbita, então os respectivos grupos de isotropia G_p e G_q são conjugados. Para cada $p \in M$, a aplicação

$$\Psi_p : G \to M, \quad g \mapsto g \cdot p,$$

induz uma bijecção de G/G_p com a órbita de p. Uma **acção transitiva** $\Psi : G \times M \to M$ é uma acção com uma só órbita. Isto é equivalente a dizer que, para quaisquer $p, q \in M$, existe $g \in G$ tal que $q = g \cdot p$. Neste caso, dizemos também que M é um **espaço homogéneo**.

Exemplo 12.1.
Consideremos a acção do grupo ortogonal especial $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$ dada por multiplicação de matrizes:

$$SO(3) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (A, \vec{v}) \mapsto A\vec{v}.$$

Geometricamente, a cada matriz $A \in SO(3)$, corresponde uma rotação de $\mathbb{R}^3$. As órbitas são as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ e a origem, de forma que o espaço quociente pode ser identificado com a semi-recta $\{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$. Para um ponto $p = (0, 0, z)$, com $z > 0$, o subgrupo de isotropia G_p é formado pelas matrizes da forma

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in SO(3),$$

e pode ser identificado com $SO(2)$. Como uma órbita com $r > 0$ passa pelo ponto $(0, 0, r)$, os subgrupos de isotropia de pontos fora da origem são todos isomorfos a $SO(2)$. A origem é um ponto fixo, logo $G_0 = SO(3)$.

Note que a acção deste exemplo é por transformações lineares de um espaço vectorial. Uma acção de um grupo de Lie G num espaço vectorial V por transformações lineares corresponde a uma **representação** de G, i.e., a um homomorfismo de grupo de Lie $\widehat{\Psi} : G \to GL(V)$.

Exemplo 12.2.
Para um grupo de Lie G qualquer, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, temos a acção

$$G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad (g, X) \mapsto \mathrm{Ad}(g)(X).$$

*A esta acção chamamos **acção adjunta** ou, ainda, **representação adjunta**. É claro que também podemos ver a acção adjunta como um homomorfismo de grupos de Lie* $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$.

Por exemplo, se $G = S0(3)$, então a sua álgebra de Lie é $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$, e a acção adjunta é por conjugação:

$$SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \to \mathfrak{so}(3), \quad (A, X) \mapsto AXA^{-1}.$$

Deixamos como exercício calcular as órbitas desta acção e os respectivos subgrupos de isotropia.

Se $\Psi : G \times M \to M$ é uma acção diferenciável, no quociente $G\backslash M$ consideramos a topologia quociente. Esta é a topologia mais fina em $G\backslash M$ para a qual a projecção canónica $\pi : M \to G\backslash M$ é contínua. Gostaríamos de saber sob que condições na acção existe uma estrutura diferenciável em $G\backslash M$, compatível com esta topologia. A seguinte condição, como veremos, desempenha um papel fulcral.

Definição 12.3. *Uma acção diferenciável $\Psi : G \times M \to M$ diz-se uma **acção própria** se a aplicação:*

$$G \times M \to M \times M, \quad (g, p) \mapsto (p, g \cdot p),$$

é uma aplicação própria.

O resultado seguinte fornece uma condição *suficiente* para que exista uma estrutura diferenciável em $G\backslash M$, tal que $\pi : M \to G\backslash M$ seja uma submersão.

Teorema 12.4. *Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção diferenciável de um grupo de Lie G numa variedade M. Se a acção é livre e própria então $G\backslash M$ possui uma estrutura de variedade diferenciável, compatível com a topologia quociente, tal que $\pi : M \to G\backslash M$ é uma submersão. Em particular,*

$$\dim G\backslash M = \dim M - \dim G.$$

Demonstração. Vamos aplicar o Teorema 6.3 à relação de equivalência $\sim$ definida pela acção. Assim, há que verificar que o gráfico

$$R = \{(p, g \cdot p) : p \in M, g \in G\} \subset M \times M,$$

é uma subvariedade própria e a projecção $p_1|_R : R \to M$ é uma submersão.

Consideremos a aplicação:

$$\Phi : G \times M \to M \times M, \quad (g, p) \mapsto (p, g \cdot p),$$

cuja imagem é precisamente R. Como a acção é livre, vemos imediatamente que esta aplicação é injectiva. O seu diferencial num ponto $(g, p) \in G \times M$ é a aplicação $\mathrm{d}_{(g,p)}\Phi : T_gG \times T_pM \to T_pM \times T_{g\cdot p}M$ dada por:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto (\mathbf{w}, \mathrm{d}\Psi_p \cdot \mathbf{v} + \mathrm{d}\Psi_g \cdot \mathbf{w}).$$

Uma vez que Ψ_p é uma imersão (exercício), esta aplicação é injectiva. Concluímos que Φ é uma imersão injectiva com imagem R. Como, por hipótese, Φ é própria, segue-se que R é uma subvariedade própria de $M \times M$.

Para verificar que $p_1|_R : R \to M$ é uma submersão, basta verificar que a composição $p_1 \circ \Phi : G \times M \to M$ é uma submersão. Mas esta composição é a aplicação $(g, p) \mapsto p$, que é obviamente uma submersão. □

Seja G um grupo de Lie, e consideremos a acção de G em si próprio por translações à esquerda:

$$G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto gh.$$

Esta acção é própria e livre. Se $H \subset G$ é um subgrupo fechado, então H é um subgrupo de Lie, e segue-se que a acção de H em G, por translações à esquerda, é própria e livre. O espaço quociente para esta acção são as classes laterais direitas:

$$H \backslash G = \{Hg : g \in G\}.$$

Pelo Teorema 12.4, concluímos que:

Corolário 12.5. *Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então $H \backslash G$ possui uma estrutura de variedade diferenciável, compatível com a topologia quociente, tal que $\pi : G \to H \backslash G$ é uma submersão.*

Observação 12.6. As acções que temos vindo a discutir, são **acções à esquerda**. Existe uma definição natural de **acção à direita**, e os resultados acima permanecem válidos, com modificações óbvias, para estas acções. Por exemplo, para um grupo de Lie G, a acção à direita de um subgrupo fechado $H \subset G$, é livre e própria. Assim, o conjunto das classes laterais esquerdas

$$G/H = \{gH : g \in G\},$$

também possui uma estrutura diferenciável.

Exemplos 12.7.

1. *Seja $G = SO(3)$ e $H = SO(2) = \mathbb{S}^1$ o subgrupo do Exemplo 12.1. Este subgrupo é fechado, logo o quociente é uma variedade diferenciável e a aplicação $\pi : SO(3) \to SO(3)/SO(2)$ é uma submersão. Note que $SO(3)/SO(2)$ pode ser identificado com a esfera $\mathbb{S}^2$, de forma que $\pi : SO(3) \to \mathbb{S}^2$ é uma submersão com fibras difeomorfas a $\mathbb{S}^1$.*
2. *Consideremos a acção adjunta de $G = SU(2)$. O subgrupo de isotropia H de um elemento $X \in \mathfrak{su}(2)$ não-nulo, é um subgrupo fechado e isomorfo a $\mathbb{S}^1$. Assim, obtemos uma submersão $\pi : SU(2) \to SU(2)/\mathbb{S}^1$. Veremos mais tarde que o quociente $SU(2)/\mathbb{S}^1$ pode ser identificado com a esfera $\mathbb{S}^2$. Recordando que $SU(2)$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^3$, obtemos uma submersão $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ com fibras difeomorfas a $\mathbb{S}^1$, a que se chama* ***fibração de Hopf****.*

Consideremos uma acção diferenciável qualquer $\Psi : G \times M \to M$. Fixando $p \in M$, podemos aplicar os resultados acima, com $H = G_p$, para concluir que G/G_p possui uma estrutura diferenciável, e que a aplicação

$$G/G_p \to M, \quad gG_p \mapsto g \cdot p,$$

é uma imersão injectiva. A imagem desta aplicação é a órbita por p, donde:

Corolário 12.8. *As órbitas de uma acção diferenciável $\Psi : G \times M \to M$ são subvariedades (imersas) de M.*

Se $G\times M \to M$ e $G\times N \to N$ são duas acções de G, dizemos que as acções são **equivalentes** se existir uma bijecção $\Phi : M \to N$ que é *equivariante*, i.e., que satisfaz:

$$\Phi(g \cdot p) = g \cdot \Phi(p), \quad \forall g \in G, p \in M.$$

Se $\Psi : G \times M \to M$ é uma acção transitiva (caso em que M se diz uma **variedade homogénea** para G), então é equivalente à acção por translações à esquerda $G \times G/G_p \to G/G_p$, $(g, hG_p) \mapsto (gh)G_p$, para qualquer $p \in M$. A equivalência é dada por:

$$\Phi : G/G_p \to M, \quad gG_p \mapsto g \cdot p.$$

No caso diferenciável, concluímos imediatamente:

Corolário 12.9. *Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção diferenciável, transitiva, de um grupo de Lie G numa variedade M. Para todo o $p \in M$, a aplicação*

$$\Phi : G/G_p \to M, \quad gG_p \mapsto g \cdot p,$$

é um difeomorfismo equivariante.

Resumindo: as variedades homogéneas são as variedades da forma G/H onde G é um grupo de Lie e $H \subset G$ é um subgrupo fechado. Numa variedade homogénea G/H temos uma acção natural de G, induzida da acção por translações à esquerda de G em si próprio. As variedades homogéneas incluem alguns do exemplos mais interessantes de variedades.

Exemplos 12.10.

1. *Consideremos a acção $O(d+1) \times \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$ por multiplicação de matrizes:*

$$(A, \vec{v}) \mapsto A\vec{v}.$$

As órbitas destas acção são as esferas $(x^0)^2 + \cdots + (x^d)^2 = r^2$ e a origem. Consideremos a esfera $\mathbb{S}^d$ de raio 1 e fixemos, por exemplo, o pólo norte $p = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{S}^d$. O seu subgrupo de isotropia consiste em elementos da forma

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \in O(d+1),$$

ou seja, pode ser identificado com $O(d)$. Segue-se que a aplicação

$$O(d+1)/O(d) \to \mathbb{S}^d, \quad A\ O(d) \mapsto A\ (0, \ldots, 0, 1)$$

é um difeomorfismo. Da mesma forma, mostra-se que $\mathbb{S}^d$ também é difeomorfa ao espaço homogéneo $SO(d+1)/SO(d)$ (cf. Exemplo 12.1).

2. *Seja $\mathbb{P}^d$ o espaço projectivo, e $\pi : \mathbb{R}^{d+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^d$, a aplicação*

$$\pi(x^0, \ldots, x^d) = [x^0 : \cdots : x^d].$$

A acção $SO(d+1) \times \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$ por multiplicação de matrizes, induz uma acção diferenciável $SO(d+1)\times\mathbb{P}^d \to \mathbb{P}^d$, que é transitiva (porquê?). O subgrupo *de isotropia de* $[0 : \cdots : 0 : 1]$ *consiste nos elementos da forma*

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & \det B \end{array}\right) \in SO(d+1),$$

ou seja, pode ser identificado com $O(d)$. *Concluímos que* $\mathbb{P}^d$ *é difeomorfo ao espaço homogéneo* $SO(d+1)/O(d)$.

Da mesma forma, podemos ver que o espaço projectivo complexo $\mathbb{CP}^d$ *é difeomorfo ao espaço homogéneo* $SU(d+1)/U(d)$.

3. *Seja* V *um espaço vectorial de dimensão* d*, e designemos por* $G_k(V)$ *o conjuntos dos seus subespaços lineares de dimensão* k. *Fixando uma base* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ *para* V*, o grupo ortogonal actua em* V *por multiplicação de matrizes. Como uma transformação linear não-singular transforma subespaços de dimensão* k *em subespaços de dimensão* k*, vemos que temos uma acção*

$$O(d) \times G_k(V) \to G_k(V).$$

É fácil de ver que, dados dois subespaços k*-dimensionais* $S_1, S_2 \subset V$*, existe um* $A \in O(d)$ *que transforma* S_1 *em* S_2. *Por outras palavras, esta acção é transitiva.*

Seja S_0 *o subespaço gerado pelos primeiros* k *vectores da base. O subgrupo de isotropia deste elemento é:*

$$H = \{\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in O(d) : A \in O(k), B \in O(d-k)\}.$$

Este subgrupo é fechado em G. *Assim, temos uma bijecção*

$$O(d)/O(k) \times O(d-k) \to G_k(V).$$

Requerendo que esta aplicação seja um difeomorfismo, obtemos uma estrutura de variedade homogénea em $G_k(V)$ *de dimensão* $k(d-k)$. *Esta estrutura de variedade é independente da base escolhida, e é designada por* ***variedade Grassmanniana*** *dos* k*-planos de* V.

Vejamos, agora, qual é a descrição infinitesimal de uma acção diferenciável $\Psi : G \times M \to M$. Recordemos que uma acção pode ser vista como um homomorfismo

$$\widehat{\Psi} : G \to \mathrm{Dif}(M).$$

Pensando em $\mathrm{Dif}(M)$ como um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$, então deverá existir um homomorfismo de álgebras de Lie

$$\psi = (\widehat{\Psi})_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M).$$

Vejamos que, de facto, assim é. Se $X \in \mathfrak{g}$ e $p \in M$, a curva

$$t \mapsto \exp(tX) \cdot p,$$

que passa por p em $t = 0$, está definida e é diferenciável num intervalo $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Definimos o campo vectorial $\psi(X)$ em M, por:

$$\psi(X)_p \equiv \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tX) \cdot p\right|_{t=0}.$$

Deixamos a demonstração do seguinte lema como exercício:

Lema 12.11. *Para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\psi(X)$ é um campo vectorial de classe C^∞ e a aplicação $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ é um anti-homomorfismo de álgebras de Lie.*

Observação 12.12. Um *anti-homomorfismo* de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ é uma aplicação linear que satisfaz:

$$\phi([X,Y]) = -[\phi(X), \phi(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

O leitor poderá, pois, estranhar a presença do sinal neste lema. A razão é simples: com as nossas convenções (em que a álgebra de Lie de um grupo de Lie é formada pelos campos vectoriais invariantes à esquerda) a álgebra de Lie do grupo dos difeomorfismos $\mathrm{Dif}(M)$ é formada pelos campos vectoriais $\mathfrak{X}(M)$ com o *simétrico* do parênteses de Lie de campos vectoriais. O leitor deverá convencer-se disso mesmo (por exemplo, determine os subgrupos de Lie a 1-parâmetro no grupo de difeomorfismos). [2]

O lema sugere a seguinte definição:

Definição 12.13. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma* ***acção infinitesimal*** *de $\mathfrak{g}$ numa variedade M é um anti-homomorfismo de álgebras de Lie $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$.*

Já vimos que toda a acção diferenciável $\Psi : G \times M \to M$ induz uma acção infinitesimal $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$. O recíproco não é verdadeiro, como ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo 12.14.
Consideremos a acção de $SO(3)$ em $\mathbb{R}^3$ por rotações, do Exemplo 12.1. A álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ possui a base

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para esta base, os parênteses de Lie satisfazem:

$$[X,Y] = -Z, \quad [Y,Z] = -X, \quad [Z,X] = -Y.$$

Vemos, por exemplo, que

$$\exp(tX) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \psi(X)_{(x,y,z)} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tX) \cdot (x,y,z) \bigg|_{t=0}. \\ &= z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

De forma análoga, calculamos:

$$\psi(Y) = x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}, \quad \psi(Z) = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Os campos $\{\psi(X), \psi(Y), \psi(Z)\}$ dizem-se os ***geradores infinitesimais*** *da acção. O facto de que ψ é um anti-homomorfismo de álgebras de Lie, explica os parênteses de Lie obtidos no Exemplo 8.2.*

[2] Poderíamos ter definido o parênteses de Lie de campos vectoriais com o sinal oposto, mas isto levaria à presença de outros sinais negativos...

Consideremos agora $M = \mathbb{R}^3 - \{p_0\}$, e a restrição de $\psi(X)$ a M, para todo o $X \in \mathfrak{g}$. Se escolhermos $p_0 \neq 0$, obtemos uma acção infinitesimal $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ que não é induzida por uma acção de G em M.

Pode-se, ainda, mostrar o seguinte resultado:

Teorema 12.15. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita e $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ uma acção infinitesimal em que $\psi(X)$ é completo, para todo o $X \in \mathfrak{g}$. Então existe uma acção diferenciável $\Psi : G \to \mathrm{Dif}(M)$ que a integra, onde G é o grupo de Lie 1-conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.*

Por exemplo, se M é uma variedade compacta, então toda a acção infinitesimal $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ se integra numa acção global $\Psi : G \times M \to M$.

Exercícios.

1. Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção diferenciável própria e livre, com projecção canónica $\pi : G \to G\backslash M$. Mostre que, para todo o $p \in G\backslash M$, existe uma vizinhança U de p e um difeomorfismo
$$\sigma : \pi^{-1}(U) \to G \times U, \quad q \mapsto (\chi(q), \pi(q)),$$
tal que:
$$\sigma(g \cdot q) = (g\chi(q), \pi(q)), \quad \forall q \in \pi^{-1}(U), g \in G.$$

2. Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Mostre que:
   (a) Se H é normal em G, então G/H é um grupo de Lie e $\pi : G \to G/H$ é um homomorfismo de grupos de Lie.
   (b) Se G e H são conexos então H é normal em G sse a sua álgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um **ideal**, i.e.,
$$\forall X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}, \quad [X, Y] \in \mathfrak{h}.$$

3. Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Mostre que se G/H e H são conexos então G é conexo. Deduza que os grupos $SO(d)$, $SU(d)$ e $U(d)$ são conexos. Mostre ainda que $O(d)$ e $GL(d)$ têm duas componentes conexas.

4. Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção diferenciável transitiva com M conexa. Mostre que:
   (a) A componente conexa da identidade G^0 também actua transitivamente em M;
   (b) Para todo o $p \in M$, G/G^0 é difeomorfo a $G_p/(G_p \cap G^0)$;
   (c) Se G_p é conexo para algum $p \in M$, então G é conexo.

5. Para os seguintes grupos de Lie, determine as órbitas e os subgrupos de isotropia da acção adjunta:
   (a) $SL(2)$.
   (b) $SO(3)$.
   (c) $SU(2)$.
   (d) $SU(3)$.

6. Seja G um grupo de Lie, M uma variedade e $\Psi : G \times M \to M$ uma acção livre. Mostre que $\Psi_p : G \to M$ é uma imersão injectiva.

7. Mostre que a acção de um grupo de Lie discreto (i.e. de dimensão $d = 0$) numa variedade é livre e própria sse é livre e propriamente descontínua.

8. Seja V um espaço vectorial de dimensão d. Designe por $S_k(V)$ o conjunto dos k-referenciais de V:

$$S_k(V) = \{(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) : \text{ os } \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \text{ são independentes}\}.$$

Mostre que $S_k(V)$ possui uma estrutura de variedade diferenciável homogénea de dimensão dk. A $S_k(V)$ chama-se **variedade de Stiefel** dos k-referenciais de V.
(Sugestão: Fixe uma base para V e considere a acção de $GL(d)$ em V por multiplicação de matrizes.)

9. Demonstre o Lema 12.11.
(Sugestão: Para um grupo de Lie G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, para cada $X \in \mathfrak{g}$ designe por $\overline{X} \in \mathfrak{X}(G)$ o campo vectorial em G *invariante à direita* que vale X_e na identidade. Mostre que:

$$[\overline{X}, \overline{Y}] = -\overline{[X, Y]}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

e exprima a acção infinitesimal $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ em termos de campos invariantes à direita.)

10. Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção diferenciável, e $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ a acção infinitesimal associada. Se G_p é o subgrupo de isotropia de p, mostre que a sua álgebra de Lie é a *subálgebra de isotropia*:

$$\mathfrak{g}_p = \{X \in \mathfrak{g} : \psi(X)_p = 0\}.$$

11. Seja $\Psi : G \times M \to M$ uma acção diferenciável, e suponha que $p_0 \in M$ é um ponto fixo desta acção:

$$g \cdot p_0 = p_0, \forall g \in G.$$

Designe ainda por $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ a acção infinitesimal associada. Mostre que:
(a) A acção Ψ induz uma representação $\Xi : G \to GL(T_{p_0}M)$;
(b) A acção ψ induz uma representação $\xi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(T_{p_0}M)$;
(c) A representação Ξ de G integra a representação ξ de $\mathfrak{g}$.

12. Mostre que se G é um grupo de Lie abeliano, conexo e compacto, então G é isomorfo ao d-toro $\mathbb{T}^d$.

PARTE III. **Formas Diferenciais**

As forma diferenciais são os objectos que se podem integrar sobre uma variedade. Por esta razão, elas desempenham um papel crucial na passagem do *local* para o *global*. Nesta terceira série de lições vamos introduzir as formas diferenciais e vamos ver como como o estudo de propriedades globais de variedades diferenciáveis pode ser efectuado, eficazmente, com recurso às forma diferenciais.

Os conceitos e ideias principais a reter nesta série são:

- Na Lição 13: A noção de *forma diferencial* e, mais geralmente, de campos tensoriais. As operações elementares sobre forma diferenciais: *produto exterior*, *produto interior* e *pull-back*.
- Na Lição 14: O *diferencial* e a *derivada de Lie* de formas diferenciais, que dão origem ao *cálculo de Cartan* sobre formas diferenciais.
- Na Lição 15: O *integral* de formas diferenciais em variedades e a *Teorema de Stokes*.
- Na Lição 16: A *cohomologia de de Rham* e a sua relação com a *cohomologia singular* diferenciável.
- Na Lição 17: As propriedades básicas da cohomologia de de Rham: *invariância por homotopia* e a *sucessão de Mayer-Vietoris*.
- Na Lição 18:a *dualidade de Poincaré* e algumas aplicações de cohomologia: o *grau* de uma aplicação, a *característica de Euler* de uma variedade, e o *índice de um zero* de um campo vectorial.

Se V é um espaço vectorial de dimensão finita d, vamos designar por:

$$\bigotimes V = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} \otimes^k V,$$

a sua **álgebra tensorial**, e por:

$$\bigwedge V = \bigoplus_{k=0}^{d} \wedge^k V$$

a sua **álgebra exterior**. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in V^*$ e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$, a nossa convenção é tal que:

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \mathbf{v}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{v}_k \rangle = k! \det(\alpha_i(\mathbf{v}_j))_{i,j=1}^k.$$

Se $T : V \to W$ é uma transformação linear entre dois espaços vectoriais de dimensão finita, recordemos que a sua transposta $T^* : W^* \to V^*$ é a transformação linear entre os espaços vectoriais duais definida por:

$$T^*\alpha(\mathbf{v}) = \alpha(T\mathbf{v}).$$

Da mesma forma, existe uma aplicação induzida $T^* : \wedge^k W^* \to \wedge^k V^*$ definida por:

$$T^*\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \omega(T\mathbf{v}_1, \ldots, T\mathbf{v}_k).$$

Pode-se definir, igualmente, uma aplicação $T^* : \otimes^k W^* \to \otimes^k V^*$, o que deixamos ao cuidado do leitor.

Depois destes comentários preliminares, seja agora M uma variedade diferenciável. Se $p \in M$ e $(x^1, \ldots, x^d)$ são coordenadas locais em p, então os vectores tangentes

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p \quad (i = 1, \ldots, d),$$

formam uma base de T_pM. Da mesma forma, as formas

$$\mathrm{d}_p x^i \quad (i = 1, \ldots, d),$$

formam uma base de T_p^*M. Estas bases são bases duais. Formando produtos tensoriais ou exteriores dos elementos destas base, obtemos bases para $\otimes^k T_pM$, $\wedge^k T_pM$, $\otimes^k T_p^*M$, $\wedge^k T_p^*M$, etc. Por exemplo, o espaço $\wedge^k T_p^*M$, admite a base

$$\mathrm{d}_p x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}_p x^{i_k} \quad (i_1 < \cdots < i_k).$$

Tal como no caso dos espaços tangente e cotangente, estamos interessados em considerar para cada um dos espaços $\otimes^k T_pM$, $\wedge^k T_pM$, $\otimes^k T_p^*M$, $\wedge^k T_p^*M$, etc., a união em que p varia em M. Por exemplo,

$$\wedge^k T^*M = \bigcup_{p \in M} \wedge^k T_p^*M.$$

Tal como para o fibrado tangente, temos o seguinte resultado cuja demonstração é deixada como exercício.

Proposição 13.1. *Existe uma estrutura de variedade natural em $\wedge^k T^*M$ tal que a projecção canónica em M é uma submersão.*

Da mesma forma é possível considerar os fibrados $\wedge^k TM$, $\otimes^k T^*M$, $\otimes^k TM$, $\otimes^k T^*M \otimes^s T^*M$, etc., cujos detalhes deixamos como exercício.

Definição 13.2. *Seja M uma variedade.*

*(i) Uma **forma diferencial de grau** k é uma secção de $\wedge^k T^*M$.*
*(ii) Um **campo multivectorial de grau** k é uma secção de $\wedge^k TM$.*
*(iii) Um **campo tensorial de grau** (k,s) é uma secção de $\otimes^k TM \otimes^s T^*M$.*

Vamos considerar, apenas, formas e campos diferenciáveis, i.e., que sejam secções C^∞.

Se $(U, x^1, \dots, x^d)$ são coordenadas locais, então uma forma diferencial ω de grau k pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}\omega|_U &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} \omega_{i_1\cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\ &= \sum_{i_1\cdots i_k} \frac{1}{k!} \omega_{i_1\cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k},\end{aligned}$$

onde as componentes $\omega_{i_1\cdots i_k}$ são anti-simétricas nos índices:

$$\omega_{\sigma(i_1)\cdots\sigma(i_k)} = (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} \omega_{i_1\cdots i_k},$$

para toda a permutação $\sigma \in S_k$. É claro que $\omega_{i_1\cdots i_k} \in C^\infty(U)$ sse ω é de classe C^∞. Se $(V, y^1, \dots, y^d)$ é outro sistema de coordenadas locais, então

$$\omega|_V = \sum_{j_1<\cdots<j_k} \overline{\omega}_{j_1\cdots j_k} \mathrm{d}y^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^{j_k},$$

com $\overline{\omega}_{j_1\cdots j_k} \in C^\infty(V)$. As componentes nos dois sistemas de coordenadas estão relacionados em $U \cap V$ pela fórmula:

$$\overline{\omega}_{j_1\cdots j_k} = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \omega_{i_1\cdots i_k} \frac{\partial(x^{i_1}\cdots x^{i_k})}{\partial(y^{j_1}\cdots y^{j_k})}.$$

A expressão do lado direito é a abreviatura para o menor correspondente às linhas $i_1, \dots, i_k$ e às colunas $j_1, \dots, j_k$ da matriz jacobiana da mudança de coordenadas.

De igual forma, temos expressões em coordenadas locais para um campo multivectorial Π, que pode ser escrito na forma:

$$\Pi|_U = \sum_{i_1<\cdots<i_k} \Pi^{i_1\cdots i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_k}},$$

e para um campo tensorial T, que pode ser escrito na forma:

$$T|_U = \sum_{i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_s} T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_k}.$$

Deixamos como exercício determinar as fórmulas de transformação para campos multivectoriais e tensoriais.

Observação 13.3. O leitor poderá estar intrigado com as posições relativas dos índices nos diferentes objectos. A convenção que seguimos é tal, que um índice só aparece numa soma quando na fórmula figura simultaneamente como subescripto e como superscripto. Seguindo esta convenção, muitas vezes omite-se o sinal de somatório, estando subentendido a soma sempre que um índice figura repetido. A esta convenção chama-se **convenção de Einstein**.

Daqui em diante, o nosso estudo incidirá sobre as formas diferenciais. Embora os outros objectos também sejam importantes, as formas diferenciais desempenham um papel mais fundamental. A razão, é que estes são os objectos numa variedade que podem ser integrados, como veremos mais adiante.

Numa variedade M, vamos designar o espaço vectorial das formas diferenciais de grau k por $\Omega^k(M)$. Se fixarmos uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$, o elemento $\omega_p \in \wedge^k T_p^*M$ pode ser visto como uma aplicação multilinear alternada

$$\omega_p : T_pM \times \cdots \times T_pM \to \mathbb{R}.$$

Assim, se $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ são campos vectoriais em M, obtemos uma função $\omega(X_1, \ldots, X_k) \in C^\infty(M)$, dada por:

$$p \mapsto \omega_p(X_1|_p, \ldots, X_k|_p).$$

Desta maneira, toda a forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ pode ser vista como uma aplicação

$$\omega : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M).$$

Esta aplicação é $C^\infty(M)$-multilinear e alternada. Reciprocamente, toda a aplicação $\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, que seja $C^\infty(M)$-multilinear e alternada, define uma forma diferencial.

Vejamos algumas construções básicas envolvendo formas diferenciais.

Produto exterior de formas diferenciais. O produto exterior $\wedge$ nas álgebras exteriores $\wedge T_p^*M$ induz um produto exterior de formas diferenciais

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^s(M) \to \Omega^{k+s}(M), \ (\omega \wedge \eta)_p \equiv \omega_p \wedge \eta_p.$$

Se introduzirmos o conjunto de todas as formas diferenciais:

$$\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^{d} \Omega^k(M).$$

onde $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$, o produto exterior faz de $\Omega(M)$ uma **álgebra de Grassmann** sobre o anel das funções $C^\infty(M)$, i.e., são válidas as seguintes propriedades:

(a) $(f\omega + g\eta) \wedge \theta = f\omega \wedge \theta + g\eta \wedge \theta$.
(b) $\omega \wedge \eta = (-1)^{\deg\omega \deg\eta}\eta \wedge \omega$.
(c) $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$.

É claro que, se $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Omega^1(M)$ e $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, de acordo com a nossa convenção:

$$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k(X_1, \ldots, X_k) = \det\left[\alpha_i(X_j)\right]_{i,j=1}^k.$$

Estas propriedades são tudo quanto precisamos de saber para calcular produtos exteriores, como ilustramos no seguinte exemplo.

Exemplo 13.4.

Em $\mathbb{R}^4$, com coordenadas (x,y,z,w), consideremos as formas de grau 2 dadas por $\omega = (x+w^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + e^z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}w + \cos x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$ e $\eta = x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - e^z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}w$. Temos que:

$$\begin{aligned}\omega\wedge\eta &= -(x+w^2)e^z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}w + xe^z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\ &= -w^2e^z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Pull-back de formas diferenciais. Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades. Para cada $p \in M$, temos a aplicação linear

$$\mathrm{d}_p\Phi : T_pM \to T_{\Phi(p)}N,$$

e a, ainda, a sua transposta:

$$(\mathrm{d}_p\Phi)^* : \wedge^k T^*_{\Phi(p)}N \to \wedge^k T^*_pM.$$

Define-se o **pull-back** de formas diferenciais $\Phi^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ por:

$$\begin{aligned}(\Phi^*\omega)(X_1,\dots,X_k)_p &= ((\mathrm{d}_p\Phi)^*\omega)(X_1|_p,\dots,X_k|_p)\\ &= \omega(\mathrm{d}_p\Phi\cdot X_1|_p,\dots,\mathrm{d}_p\Phi\cdot X_k|_p).\end{aligned}$$

Como esta fórmula define uma aplicação $\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ que é $C^\infty(M)$-multilinear e alternada, $\Phi^*\omega$ é uma forma diferencial de grau k em M.

É fácil de ver que, para uma aplicação diferenciável $\Phi : M \to N$, o pull-back $\Phi^* : \Omega(N) \to \Omega(M)$ é um homomorfismo de álgebras de Grassman (sobre $\mathbb{R}$), i.e., são válidas as propriedades:

(a) $\Phi^*(a\omega + b\eta) = a\Phi^*\omega + b\Phi^*\eta$;
(b) $\Phi^*(\omega\wedge\eta) = \Phi^*\omega\wedge\Phi^*\eta$;
(c) $\Phi^*(f\omega) = (f\circ\Phi)\Phi^*\omega$;

Note que se $f : N \to \mathbb{R}$ é uma função, então o seu diferencial $\mathrm{d}f$ pode ser visto como uma forma diferencial de grau 1. Temos, ainda, que:

(d) $\Phi^*(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(f\circ\Phi)$.

Esta propriedades podem ser utilizadas para calcular pull-backs em coordenadas locais, como ilustramos de seguida.

Exemplo 13.5.
Seja $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação:

$$\Phi(u,v) = (u+v, u-v, v^2, \frac{1}{1+u^2}).$$

Se $\eta = x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - e^z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}w \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$, então o seu pull-back é dado por:

$$\begin{aligned}\Phi^*\eta &= (x\circ\Phi)\mathrm{d}(y\circ\Phi)\wedge\mathrm{d}(z\circ\Phi) - e^{(z\circ\Phi)}\mathrm{d}(z\circ\Phi)\wedge\mathrm{d}(w\circ\Phi)\\ &= (u+v)\mathrm{d}(u-v)\wedge\mathrm{d}(v^2) - e^{v^2}\mathrm{d}(v^2)\wedge\mathrm{d}(\frac{1}{1+u^2})\\ &= (u+v)\mathrm{d}u\wedge 2v\mathrm{d}v - 2ve^{v^2}\mathrm{d}v\wedge\frac{-2u\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}\\ &= \left(2v(u+v) - \frac{4uve^{v^2}}{(1+u^2)^2}\right)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Ou seja, para calcular o pull-back $\Phi^*\eta$, substituímos em η, as funções coordenadas (x,y,z,w) pelas suas expressões em termos das coordenadas (u,v).

Observação 13.6. No caso em que (N, i) é uma subvariedade de M, o pull-back de uma forma $\omega \in \Omega^k(M)$ pela inclusão $i : N \hookrightarrow M$ designa-se por **restrição** de ω a N. Muitas vezes, escrevemos ω em vez de $i^*\omega$, para designar a restrição.

Por exemplo, para a esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, podemos falar na forma diferencial

$$\omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

quando estamos de facto a pensar no seu pull-back pela inclusão $i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

Produto interior. Dado um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$, chama-se **produto interior** de ω por X à forma diferencial $i_X\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ definida por:

$$i_X\omega(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{k-1}).$$

Como $i_X\omega$ é uma aplicação $C^\infty(M)$-multilinear e alternada, define, de facto, uma forma diferencial de grau $k - 1$ em M.

As seguintes propriedade do produto interior, de fácil verificação, são bastante úteis no seu cálculo:

(a) $i_X(f\omega + g\theta) = fi_X\omega + gi_X\theta$.
(b) $i_X(\omega \wedge \theta) = (i_X\omega) \wedge \theta + (-1)^{\deg \omega}\omega \wedge (i_X\theta)$.
(c) $i_{(fX+gY)}\omega = fi_X\omega + gi_Y\omega$.
(d) $i_X(\mathrm{d}f) = X(f)$;

Vejamos um exemplo simples.

Exemplo 13.7.
Seja $\omega = e^x\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + e^z\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, *e* $X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. *Então:*

$$\begin{aligned}
i_{\frac{\partial}{\partial x}}(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) &= (i_{\frac{\partial}{\partial x}}\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}x \wedge (i_{\frac{\partial}{\partial y}}\mathrm{d}y) = \mathrm{d}y,\\
i_{\frac{\partial}{\partial y}}(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y) &= (i_{\frac{\partial}{\partial y}}\mathrm{d}x) \wedge \mathrm{d}y - \mathrm{d}x \wedge (i_{\frac{\partial}{\partial y}}\mathrm{d}y) = -\mathrm{d}x,\\
i_{\frac{\partial}{\partial x}}(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) &= (i_{\frac{\partial}{\partial x}}\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}z - \mathrm{d}y \wedge (i_{\frac{\partial}{\partial x}}\mathrm{d}z) = 0,\\
i_{\frac{\partial}{\partial y}}(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) &= (i_{\frac{\partial}{\partial y}}\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}z - \mathrm{d}y \wedge (i_{\frac{\partial}{\partial y}}\mathrm{d}z) = \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$i_X\omega = -xe^x\mathrm{d}x - ye^x\mathrm{d}y + xe^z\mathrm{d}z.$$

Observação 13.8. A operação de produto interior extende-se, de forma mais ou menos óbvia, a outros objectos (campos multivectoriais, campos tensoriais, etc.). Para estes objectos, é frequente utilizar-se a designação **contracção**, em vez de produto interior. Por exemplo, pode-se definir a contracção de uma forma diferencial ω de grau k por um campo multivectorial Π de grau $l < k$, obtendo-se uma forma $i_\Pi\omega$ de grau $k - l$. Em coordenadas locais $(U, x^1, \ldots, x^d)$, se

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}, \quad \Pi|_U = \sum_{j_1 < \cdots < j_l} \Pi^{j_1 \cdots j_l} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_l}},$$

então:

$$(i_\Pi\omega)|_U = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} \Pi^{i_1 \cdots i_l} \mathrm{d}x^{i_{l+1}} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}.$$

Como uma aplicação muito simples de formas diferenciais, vejamos como podemos formalizar a noção de *orientação* de uma variedade.

Recordemos que se V é um espaço vectorial de dimensão d, e $\mu \in \wedge^d(V^*)$ é um elemento não-nulo, então para qualquer base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ temos

$$\mu(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d) \neq 0.$$

Assim, μ divide as bases ordenadas de V em duas classes: a base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ tem μ-orientação positiva (respectivamente, negativa) se este número é positivo (respectivamente, negativo). Assim, μ determina uma orientação para V.

Passando ao caso de uma variedade diferenciável M de dimensão d, vamos chamar **forma volume** a uma forma diferencial $\mu \in \Omega^d(M)$, tal que $\mu_p \neq 0$, $\forall p \in M$.

Definição 13.9. *Uma variedade M de dimensão d diz-se* ***orientável*** *se possui uma forma volume.*

Seja M é uma variedade orientável de dimensão d. Se $\mu_1, \mu_2 \in \Omega^d(M)$ são formas volumes, dizemos que μ_1 e μ_2 definem a mesma orientação se, para todo o $p \in M$ e qualquer base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d\}$ de T_pM, verifica-se:

$$\mu_1(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)\mu_2(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d) > 0.$$

Caso contrário, dizemos que μ_1 e μ_2 definem orientações opostas. Observe que, se μ_1 e μ_2 definem a mesma orientação, então uma base é μ_1-positiva sse é μ_2-positiva. A propriedade "definem a mesma orientação" é uma relação de equivalência nas formas volumes de M. Uma **orientação** para M é uma escolha de uma classe de equivalência $[\mu]$. Uma vez escolhida uma orientação, dizemos que que M é uma **variedade orientada**.

A seguinte proposição fornece uma caracterização alternativa das variedades orientáveis. A demonstração é deixada como exercício.

Proposição 13.10. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão d. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) M é orientável, i.e., M possui uma forma volume.

(ii) Existe uma colecção $\{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ de sistemas de coordenadas que cobrem M tal que, para todo o $i, j \in I$:

$$\det[(\phi_i \circ \phi_j^{-1})'(p)] > 0, \qquad \forall p \in U_i \cap U_j.$$

EXEMPLOS 13.11.

1. *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^d$ é orientável. A orientação canónica de $\mathbb{R}^d$ é a orientação definida pela forma volume $\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^d$. Em relação à orientação canónica, a base canónica de $T_p\mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^d$ tem orientação positiva.*

2. *Um grupo de Lie G é sempre orientável. Se $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ é uma base de 1-formas diferenciais invariantes à esquerda, então $\mu = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_d$ é uma forma volume invariante à esquerda.*

3. *A esfera $\mathbb{S}^d$ é um variedade orientável. Uma forma volume é dada por:*

$$\omega = \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^{i-1} x^i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{d+1} \in \Omega^d(\mathbb{S}^d).$$

Deixamos como exercício verificar que esta forma não se anula.

4. O espaço projectivo $\mathbb{P}^2$ não é orientável. De facto, seja $\mu \in \Omega^2(\mathbb{P}^2)$ uma 2-forma diferenciável. Se $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ é a aplicação quociente, então $\pi^*\mu$ é uma 2-forma diferencial em $\mathbb{S}^2$. Segue-se, do exemplo anterior, que

$$\pi^*\mu = f\omega,$$

para alguma função $f \in C^\infty(\mathbb{S}^2)$. Seja $\Phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ a aplicação antipodal: $p \mapsto -p$. Como $\pi \circ \Phi = \pi$, temos que:

$$\Phi^*(\pi^*\mu) = (\pi \circ \Phi)^*\mu = \pi^*\mu.$$

Por outro lado, é fácil de ver que $\Phi^*\omega = -\omega$, logo

$$\begin{aligned} f\omega &= \pi^*\mu \\ &= \Phi^*(\pi^*\mu) \\ &= \Phi^*(f\omega) \\ &= (f \circ \Phi)\Phi^*(\omega) = -(f \circ \Phi)\omega. \end{aligned}$$

Concluímos que $f(-p) = -f(p)$, para todo o $p \in \mathbb{S}^2$. Mas, então, $f(p) = 0$, para algum $p \in \mathbb{S}^2$. Assim, $\pi^*\mu$ anula-se. Como π é um difeomorfismo local, concluímos que toda a forma diferencial $\mu \in \Omega^2(\mathbb{P}^2)$ anula-se, logo $\mathbb{P}^2$ não é orientável.

Sejam M e N variedades orientadas com orientações $[\mu_M]$ e $[\mu_N]$, e seja $\Phi : M \to N$ um difeomorfismo. Dizemos que Φ **preserva orientações** ou é **positiva**, se $[\Phi^*\mu_N] = [\mu_M]$. A demonstração da seguinte proposição é deixada como exercício.

Proposição 13.12. *Seja M uma variedade orientada com orientação $[\mu]$. Existe uma cobertura aberta de M por sistemas de coordenadas (U_i, ϕ_i) em que cada $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^d$ é positivo, onde em $\mathbb{R}^d$ consideramos a orientação canónica.*

Exercícios.

1. Construa a estrutura diferencial natural de $\wedge^k T^*M$, para a qual a projecção canónica em M é uma submersão.

2. Determine as fórmulas de transformação de coordenadas para campos multivectoriais e tensoriais.

3. Mostre que uma estrutura Riemanniana numa variedade M (ver Lição 7, Exercício 8) define um campo tensorial simétrico de grau (0,2).
Nota: Em coordenadas locais (U, x^i), um tensor simétrico de grau (0,2) escreve-se na forma
$$g = \sum_{i,j} g_{ij} \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j,$$
onde as componentes satisfazem $g_{ij} = g_{ji}$.

4. Verifique as propriedades básicas do pull-back de formas diferenciais e do produto interior.

5. Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Mostre que, se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ são campos vectoriais Φ-relacionados, então
$$\Phi^*(i_Y\omega) = i_X\Phi^*\omega,$$

para toda a forma diferencial $\omega \in \Omega(N)$.

6. Demonstre a Proposição 13.10.

7. Mostre que, se M e N são variedades orientáveis, então $M \times N$ é orientável. Conclua que o toro $\mathbb{T}^d$ é uma variedade orientável.

8. Mostre que o espaço projectivo $\mathbb{P}^d$ é orientável sse d é ímpar.

9. Verifique que a garrafa de Klein (ver Exemplo 4.5.4) não é uma variedade orientável.

10. Mostre que toda a variedade orientada M possui uma cobertura por sistemas de coordenadas positivos.

11. Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão d. Mostre que:
   (a) O produto interno em cada espaço tangente T_pM induz um produto interno no espaço cotangente T_p^*M.
   (b) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e campos vectoriais $X_1, \dots, X_d \in \mathfrak{X}(U)$ que são ortonormados:
$$\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij} \text{ símbolo de Kronecker.}$$
   A colecção $X_1, \dots, X_d$ diz-se um **campo de referenciais (local) ortonormado**.
   (c) Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e formas diferenciais $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \Omega^1(U)$ que são ortonormadas:
$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij} \text{ símbolo de Kronecker.}$$
   A colecção $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ diz-se um **campo de co-referenciais (local) ortonormado**.

12. Seja M uma variedade Riemanniana orientada de dimensão d. Mostre que existe uma única operação $C^\infty(M)$-linear $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{d-k}(M)$ que pode ser caracterizada da seguinte forma: para todo o campo co-referencial local ortonormado $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ e positivo (i.e., $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_d$ é positiva) são satisfeitas as seguintes propriedades:
   (a) $*1 = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_d$ e $*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_d) = 1$;
   (b) $*(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k) = \alpha_{k+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_d$.
   A $*$ chama-se **operador estrela de Hodge**. Mostre, ainda, que:
$$* * \omega = (-1)^{k(d-k)}\omega, \text{ onde } k = \deg \omega.$$

Lição 14. Diferencial e Cálculo de Cartan

Nesta lição vamos definir duas operações de diferenciação sobre as formas diferenciais: o *diferencial* de formas diferenciais (uma derivada intrínseca) e a *derivada de Lie* de formas diferenciais (uma derivada ao longo de campos vectoriais). Estas operações, em conjunto com as operações algébricas elementares estudadas na lição anterior, definem um cálculo sobre as formas diferenciais que se costuma designar por *Cálculo de Cartan*.

Seja $\omega \in \Omega^k(M)$ uma forma diferencial de grau k numa variedade diferencial M. Definimos o seu **diferencial** $d\omega$ como sendo a forma diferencial de grau $k+1$ dada por:

$$\text{(14.1)}\quad \mathrm{d}\omega(X_0,\dots,X_k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i X_i(\omega(X_0,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_k))+ \\ +\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_k),$$

para todo os campos vectoriais $X_0,\dots,X_k\in\mathfrak{X}(M)$. Como esta fórmula define uma aplicação $C^\infty(M)$-multilinear $\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(M)$, vemos que $\mathrm{d}\omega$ é, de facto, uma forma diferencial.

Note que uma função $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ é uma forma de grau 0. Neste caso, a fórmula fornece:

$$\mathrm{d}f(X)=X(f),$$

donde esta definição é coerente com a nossa definição de diferencial de uma função. O próximo resultado mostra que o diferencial é a única operação sobre as formas que é uma extensão razoável do diferencial de funções.

Teorema 14.1. *O diferencial é a única operação*

$$\mathrm{d}:\Omega^\bullet(M)\to\Omega^{\bullet+1}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) d *é* $\mathbb{R}$*-linear:*

$$\mathrm{d}(a\omega+b\theta)=a\mathrm{d}\omega+b\mathrm{d}\theta.$$

(ii) d *é uma derivação graduada:*

$$\mathrm{d}(\omega\wedge\theta)=(\mathrm{d}\omega)\wedge\theta+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge(\mathrm{d}\theta).$$

(iii) d *é uma extensão do diferencial: se* $f\in C^\infty(M)$*, então*

$$\mathrm{d}f(X)=X(f),\forall X\in\mathfrak{X}(M).$$

(iv) $\mathrm{d}^2=0$.

Demonstração. Deixamos como exercício a verificação de que d, definido por (14.1), satisfaz as propriedades (i) a (iv). Para verificar a unicidade, vamos ver que se $\omega\in\Omega^k(M)$ é uma forma diferencial de grau k, então $\mathrm{d}\omega$ fica determinado pelas propriedades (i) a (iv).

Como d é uma derivação, é local: se $\omega|_U=0$ num aberto U, então $(\mathrm{d}\omega)|_U=0$. De facto, se $p\in U$, seja $f\in C^\infty(M)$ uma função com $f(p)>0$ e $\operatorname{supp} f\subset U$. Como $f\omega\equiv 0$, temos que:

$$0=\mathrm{d}(f\omega)=\mathrm{d}f\wedge\omega+f\mathrm{d}\omega.$$

Calculando ambos os lados em p, obtemos $f(p)(\mathrm{d}\omega)_p=0$. Logo $\mathrm{d}\omega|_U=0$, como pretendido.

Basta, pois, verificar a nossa afirmação para $\omega\in\Omega^k(U)$, onde U é um sistema de coordenadas $(x^1,\dots,x^d)$. Nesse caso, temos que

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\omega_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}.$$

Aplicando, sucessivamente, as propriedades, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} \mathrm{d}(\omega_{i_1\cdots i_k}\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k}) && \text{(por (i))}\\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_k} \mathrm{d}(\omega_{i_1\cdots i_k})\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k} && \text{(por (ii) e (iv))}\\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_i \frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_k} && \text{(por (iii))}.
\end{aligned}$$

Esta última expressão define uma forma diferencial de grau $k+1$ em U. Assim, $\mathrm{d}\omega$ fica determinado pelas propriedades (i) a (iv), tal como afirmámos. □

O cálculo do diferencial de uma forma pode ser efectuado recorrendo às propriedades dadas pelo resultado anterior. Isto é, muitas vezes, mais eficiente do que a aplicação directa da fórmula (14.1), como ilustramos de seguida, através de um exemplo muito simples.

Exemplo 14.2.
Seja $\omega = e^y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + e^z\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$. Então, aplicando sucessivamente as propriedades (i) a (iv), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}(e^y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + e^z\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z)\\
&= (\mathrm{d}e^y)\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}(e^z)\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\
&= e^y\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + e^z\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\
&= -e^y\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Deve-se, ainda, observar que o diferencial é preservado pelo pull-back de aplicações diferenciáveis:

Proposição 14.3. *Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis. Então, para toda a forma $\omega \in \Omega^k(M)$, temos que:*

$$\Phi^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\Phi^*\omega.$$

Como veremos mais adiante, esta propriedade muito simples é extremamente importante. A demonstração é deixada como exercício.

Como uma aplicação simples, mas interessante, da noção de diferencial vejamos como o Teorema de Frobenius pode ser expresso em termos de formas diferenciais. Para isso, seja D uma distribuição de classe C^∞ numa variedade diferenciável M. Dizemos que uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ **aniquila** D se:

$$\omega(X_1,\dots,X_k) = 0 \quad \text{sempre que } X_1,\dots,X_k \in \mathfrak{X}(D).$$

Utilizaremos a notação:

$$I(D) \equiv \{\omega \in \Omega(M) : \omega \text{ aniquila } D\}.$$

Vamos, ainda, dizer que uma colecção de 1-formas diferenciais $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \Omega^1(M)$ é **independente** se elas formam um conjunto linearmente independente em T_p^*M, para cada $p \in M$.

A proposição seguinte mostra que uma distribuição pode ser definida em termos de formas diferenciáveis.

Proposição 14.4. *Seja D uma distribuição k-dimensional de classe C^∞ numa variedade diferenciável M de dimensão d. Então:*

(i) $I(D)$ é um ideal da álgebra Grassmanianna $\Omega(M)$.
(ii) $I(D)$ é localmente gerado por $d-k$ 1-formas independentes.

Reciprocamente, se $I \subset \Omega(M)$ é um ideal que é localmente gerado por $d-k$ formas diferenciais de grau 1, então existe uma única distribuição D, que é k-dimensional e de classe C^∞, tal que $I = I(D)$.

Demonstração. O item (i) segue-se, imediatamente, das definições de $I(D)$ e do produto exterior.

Para mostrar (ii), para cada $p \in M$, consideramos uma vizinhança U de p e campos vectoriais $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(U)$ que geram $D|_U$. Podemos completar esta colecção com campos vectoriais, obtendo campos vectoriais $X_1, \dots, X_d \in \mathfrak{X}(U)$, que formam uma base de T_pM, para todo o $p \in U$. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \Omega^1(U)$ as 1-formas duais, definidas por:

$$\alpha_i(X_j) = \delta_{ij} \text{ (símbolo de Kronecker).}$$

Vejamos que $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_d$ são as 1-formas diferenciais que procurávamos:

- A colecção $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_d$ é independente: Isto segue-se, imediatamente, do facto de que $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ formam uma base de T_p^*M, para todo o $p \in U$.
- A colecção $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_d$ é geradora: Se $\omega \in \Omega^r(M)$, então existem funções $a_{i_1 \cdots i_r} \in C^\infty(U)$ tais que

$$\omega|_U = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le d} a_{i_1 \cdots i_r} \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_r}.$$

  Se $\omega \in I(D)$, calculando ambos os termos em r dos campos $X_1, \dots, X_k$, vemos que $a_{i_1 \cdots i_r} = 0$ sempre que $i_1, \dots, i_r \le k$. Logo,

$$\omega|_U = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le d \\ i_r \ge k+1}} a_{i_1 \cdots i_r} \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_r},$$

  e, portanto, a colecção $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_d$ é geradora.

Finalmente, para demonstrar o recíproco, dado $p \in M$, sejam $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_d$ 1-formas que geram o ideal I numa vizinhança U de p. Definimos D_p como sendo o subespaço de T_pM cujo aniquilador é o subespaço de T_p^*M gerado pelas $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_d$. É fácil ver que D é uma distribuição C^∞ em M, k-dimensional, e tal que $I = I(D)$. A unicidade de D segue-se do facto de que, se $D_1 \neq D_2$, então $I(D_1) \neq I(D_2)$. □

Um **ideal diferencial** é um ideal $I \subset \Omega(M)$ que é fechado para a diferenciação:

$$\omega \in I \implies \mathrm{d}\omega \in I.$$

Temos a seguinte proposição:

Proposição 14.5. *Uma distribuição D de classe C^∞ é involutiva sse $I(D)$ é um ideal diferencial.*

Demonstração. A relação (14.1) mostra que se D é involutiva então $I(D)$ é um ideal diferencial. Por outro lado, seja $I(D)$ um ideal diferencial. Se $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$, então a mesma relação mostra que

$$\omega([X,Y]) = -\mathrm{d}\omega(X,Y) + X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) = 0,$$

para toda a 1-forma $\omega \in I(D)$. Segue-se que $[X,Y] \in \mathfrak{X}(D)$, logo D é involutiva. □

Como corolário, obtemos a seguinte versão do Teorema de Frobenius:

Teorema 14.6 (Frobenius)**.** *Uma distribuição D é integrável sse $I(D)$ é um ideal diferencial.*

Exemplo 14.7.
Seja $\omega \in \Omega^1(M)$ uma 1-forma diferencial que não se anula. Então ω define uma distribuição C^∞ de codimensão 1. Pelo teorema, esta distribuição é integrável sse

$$\mathrm{d}\omega = \eta \wedge \omega$$

para alguma 1-forma $\eta \in \Omega^1(M)$, ou, equivalentemente, sse

$$\omega \wedge \mathrm{d}\omega = 0.$$

A operação $\mathrm{d} : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^{\bullet+1}(M)$ também é conhecida como *diferenciação exterior*, pois aumenta o grau das formas diferenciais. Vejamos, agora, um outro tipo de diferenciação de formas diferenciais que preserva o grau:

Definição 14.8. *Chama-se* ***derivada de Lie*** *de $\omega \in \Omega^k(M)$ ao longo do campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ à forma diferencial $\mathcal{L}_X\omega \in \Omega^k(M)$ definida por:*

$$\mathcal{L}_X\omega = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((\phi_X^t)^*\omega - \omega\right).$$

Algumas propriedades básicas da derivada de Lie de formas diferenciais são dadas pela seguinte proposição, cuja demonstração é deixada como exercício:

Proposição 14.9. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo vectorial. A derivada de Lie $\mathcal{L}_X : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ satisfaz:*

(i) $\mathcal{L}_X(a\omega + b\eta) = a\mathcal{L}_X\omega + b\mathcal{L}_X\eta$.
(ii) $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\eta$.
(iii) $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$, *se* $f \in \Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$.
(iv) $\mathcal{L}_X\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\mathcal{L}_X\omega$.

Veremos, ainda, outras propriedades nos exercícios no final desta lição.

Tal como no caso do diferencial, o cálculo da derivada de Lie de uma forma pode ser efectuado recorrendo às suas propriedades e, muitas vezes, isto é mais eficiente do que a aplicação directa da definição. Ilustramos com um exemplo.

Exemplo 14.10.

Seja $\omega = e^x \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + e^y \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, *e* $X = x\frac{\partial}{\partial y} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$. *Então:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X\omega &= \mathcal{L}_X(e^x \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + e^y \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z) \\
&= e^x \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}X(y) + X(e^y)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + e^y \mathrm{d}X(y) \wedge \mathrm{d}z \\
&= e^x \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x + xe^y \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + e^y \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \\
&= xe^y \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + e^y \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Existe uma outra forma para calcular a derivada de Lie. De facto, existe uma fórmula que relaciona a derivada de Lie, o diferencial e o produto interior. Esta fórmula desempenha, muitas vezes de forma inesperada, um papel crucial. Por isso, merece um destaque especial.

Teorema 14.11 (Fórmula mágica de Cartan)**.** *Seja* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *um campo vectorial e* $\omega \in \Omega(M)$ *uma forma diferencial. Então:*

$$\mathcal{L}_X\omega = i_X\mathrm{d}\omega + \mathrm{d}i_X\omega. \tag{14.2}$$

Demonstração. Pela Proposição 14.9 (iii), sabemos que $\mathcal{L}_X : \Omega(M) \to \Omega(M)$ é uma derivação. Por outro lado, pelas propriedades de d e i_X, vemos que $i_X\mathrm{d} + \mathrm{d}i_X : \Omega(M) \to \Omega(M)$ também é uma derivação. Assim, basta verificar que estas duas derivações tomam o mesmo valor na forma diferencial $\omega = f\mathrm{d}g$, onde $f, g \in C^\infty(M)$.

Por um lado, utilizando as propriedades dadas pela Proposição 14.9, calculamos:

$$\mathcal{L}_X(f\mathrm{d}g) = X(f)\mathrm{d}g + f\mathrm{d}(X(g)).$$

Por outro lado, as propriedades de d e i_X fornecem:

$$\begin{aligned}
i_X\mathrm{d}(f\mathrm{d}g) + \mathrm{d}i_X(f\mathrm{d}g) &= i_X(\mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}g) + \mathrm{d}(fi_X\mathrm{d}g) \\
&= X(f)\mathrm{d}g - X(g)\mathrm{d}f + \mathrm{d}(fX(g)) \\
&= X(f)\mathrm{d}g + f\mathrm{d}(X(g)).
\end{aligned}$$

□

Exercícios.

1. Verifique que d, definido pela fórmula (14.1), satisfaz as propriedades (i) a (iv) do Teorema 14.1.

2. Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis. Mostre que, para toda a forma $\omega \in \Omega^k(M)$, verifica-se

$$\Phi^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\Phi^*\omega.$$

3. Seja $I \subset \Omega(M)$ um ideal que é gerado por k formas diferenciais de grau 1 independentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:
   (a) I é um ideal diferencial;
   (b) $\mathrm{d}\alpha_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \alpha_j$, para algumas 1-formas $\omega_{ij} \in \Omega(M)$;
   (c) Se $\omega = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k$, então $\mathrm{d}\omega = \alpha \wedge \omega$, para alguma 1-forma $\alpha \in \Omega(M)$.

4. Verifique as propriedades da derivada de Lie dadas pela Proposição 14.9

5. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais e $\omega \in \Omega(M)$ uma forma diferencial. Mostre que:
$$\mathcal{L}_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y\omega) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X\omega).$$

6. Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Mostre que, se $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ são campos vectoriais Φ-relacionados, então
$$\Phi^*(\mathcal{L}_Y\omega) = \mathcal{L}_X(\Phi^*\omega),$$
para toda a forma diferencial $\omega \in \Omega(N)$.

7. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^k(M)$. Mostre a seguinte relação entre as derivadas de Lie:
$$\mathcal{L}_X(\omega(X_1,\dots,X_k)) = \mathcal{L}_X\omega(X_1,\dots,X_k) + \sum_{i=1}^{k}\omega(X_1,\dots,\mathcal{L}_X X_i,\dots,X_k). \tag{14.3}$$

8. Seja M uma variedade Riemanniana orientada. Se $\mathbf{v} \in T_pM$ designe por $\mathbf{v}^\sharp \in T_p^*M$ o elemento definido por $\mathbf{v}^\sharp(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$. A aplicação $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}^\sharp$ é um isomorfismo e designamos a sua inversa, também, por $\alpha \mapsto \alpha^\sharp$. O **gradiente** de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é o campo vectorial $\operatorname{grad} f \in \mathfrak{X}(M)$ definido por:
$$\operatorname{grad} f \equiv (\mathrm{d}f)^\sharp.$$
A **divergência** de um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ é a função $\operatorname{div} X : M \to \mathbb{R}$ dada por
$$\operatorname{div} X \equiv *\mathrm{d} * X^\sharp.$$
O **laplaciano** de $f : M \to \mathbb{R}$ é a função $\Delta f : M \to \mathbb{R}$ definida por:
$$\Delta = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f).$$
Para $M = \mathbb{R}^3$ com a estrutura Riemanniana usual, calcule o gradiente, a divergência e o laplaciano em coordenadas cilíndricas e esféricas.

9. Para uma variedade M designe por $\mathfrak{X}^k(M)$ o espaço vectorial dos campos multivectoriais de grau k. Mostre que existe uma única operação $\mathbb{R}$-bilinear $[\ ,\ ] : \mathfrak{X}^k(M) \times \mathfrak{X}^s(M) \to \mathfrak{X}^{k+s}(M)$ que para $k = s = 1$ coincide com o parênteses de Lie, e satisfaz:
(a) $[P, Q] = (-1)^{pq}[Q, P]$;
(b) $[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{q(p+1)}Q \wedge [P, R]$;
Verifique, ainda, que esta operação satisfaz a identidade de Jacobi:
$$(-1)^{p(r-1)}[P,[Q,R]] + (-1)^{q(p-1)}[Q,[R,P]] + (-1)^{r(q-1)}[R,[P,Q]] = 0.$$
Em todas estas identidades, $p = \deg P$, $q = \deg Q$ e $r = \deg R$.
Nota: Esta operação é conhecida pelo nome de *parênteses de Schouten* e é o análogo, para campos multivectoriais, do diferencial de formas diferenciais. É um exemplo de um super-parênteses de Lie.

Lição 15. Integração em Variedades

Vamos agora definir o integral de uma d-forma sobre uma d-variedade orientada.

Comecemos por considerar o caso $M = \mathbb{R}^d$, em que fixamos a orientação canónica. Se $U \subset \mathbb{R}^d$ é um aberto, então toda a forma diferencial $\omega \in \Omega^d(U)$ é da forma:
$$\omega = f\ \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^d,$$

para alguma função $f \in C^\infty(U)$. Dizemos que ω é integrável em U e definimos o seu integral por:

$$\int_U \omega = \int_A f(x^1, \ldots, x^d) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^d,$$

desde que o integral do lado direito exista.

A fórmula de mudança de variável para o integral em $\mathbb{R}^d$ fornece o seguinte lema:

Lema 15.1. *Seja $\Phi : U \to \mathbb{R}^d$ um difeomorfismo definido num aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^d$. Se ω é uma forma diferencial integrável em $\Phi(U)$, então $\Phi^*\omega$ é integrável em U e*

$$\int_{\Phi(U)} \omega = \pm \int_U \Phi^*\omega,$$

onde o $\pm$ é o sinal do determinante da matriz jacobiana $\Phi'(p)$.

Assim, desde que consideremos difeomorfismos que preservem a orientação, o integral é invariante por difeomorfismos. Por esta razão, vamos considerar o integral de formas diferenciais apenas sobre variedades *orientadas*. Deve-se, no entanto, observar que é possível definir o integral sobre variedades não orientadas mas, para isso, é preciso considerar **formas diferenciais ímpares**, que generalizam as formas diferenciais pares que temos vindo a considerar.

Uma outra simplificação, a fim de evitar questões de convergência, consiste em considerar, apenas, formas diferenciais $\omega \in \Omega^k(M)$ cujo suporte

$$\sup \omega = \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}},$$

é compacto. Vamos designar por $\Omega^k_c(M)$ as formas diferenciais de grau k com suporte compacto.

Seja agora M uma variedade orientada de dimensão d e seja $\omega \in \Omega^d_c(M)$ uma forma diferencial com suporte compacto. Definimos o seu integral sobre M da seguinte forma:

- Se $\sup \omega \subset U$, onde (U, ϕ) é um sistema de coordenadas positivo, então definimos:

$$\int_M \omega = \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^*\omega.$$

- Em geral, consideramos uma cobertura por sistemas de coordenadas (U_α, ϕ_α) positivos, e uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a esta cobertura, e definimos:

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega.$$

Note que esta soma é finita, pois $\operatorname{supp} \omega$ é compacto. Note, ainda, que esta receita fornece formas distintas de calcular o integral de uma forma com suporte num domínio de coordenadas. No entanto, é simples verificar que o resultado é o mesmo. Pode-se, também, mostrar que a definição é independente da partição da unidade e da cobertura utilizadas. Deixamos a verificação destes detalhes ao cuidado do leitor.

É fácil verificar, a partir da definição, que o integral satisfaz as seguintes propriedades básicas:

(a) *Linearidade:* Se $\omega, \eta \in \Omega_c^d(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então:

$$\int_M (a\omega + b\eta) = a\int_M \omega + b\int_M \eta.$$

(b) *Aditividade:* Se $M = M_1 \cup M_2$, e $\omega \in \Omega_c^d(M)$, então:

$$\int_M \omega = \int_{M_1} \omega + \int_{M_2} \omega,$$

desde que $M_1 \cap M_2$ possua medida nula.

Temos ainda:

Teorema 15.2 (Fórmula de Mudança de Variável). *Sejam M e N variedades orientadas de dimensão d e $\Phi : M \to N$ um difeomorfismo que preserva orientações. Então, para toda a forma diferencial $\omega \in \Omega_c^d(N)$,*

$$\int_N \omega = \int_M \Phi^*\omega.$$

Demonstração. Como Φ é um difeomorfismo e preserva orientações, podemos encontrar uma cobertura de M por sistemas de coordenadas (U_α, ϕ_α) positivos, tal que os $\Phi(U_\alpha)$ são domínios de sistemas coordenadas positivos $\psi_\alpha : \Phi(U_\alpha) \to \mathbb{R}^d$ de N. Se $\{\rho_\alpha\}$ é uma partição da unidade $\{\rho_\alpha\}$ subordinada a esta cobertura, então $\{\rho_\alpha \circ \Phi\}$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$. Pelo Lema 15.1, temos que

$$\int_{\Phi(U_\alpha)} \rho_\alpha\omega = \int_{U_\alpha} \Phi^*(\rho_\alpha\omega) = \int_{U_\alpha} (\rho_\alpha \circ \Phi)\Phi^*\omega.$$

Logo, vemos que:

$$\begin{aligned}
\int_N \omega &= \sum_\alpha \int_N \rho_\alpha\omega \\
&= \sum_\alpha \int_{\Phi(U_\alpha)} \rho_\alpha\omega \\
&= \sum_\alpha \int_{U_\alpha} (\rho_\alpha \circ \Phi)\Phi^*\omega \\
&= \sum_\alpha \int_M (\rho_\alpha \circ \Phi)\Phi^*\omega = \int_M \Phi^*\omega.
\end{aligned}$$

□

O cálculo do integral de formas diferenciais a partir da definição não é prático, pois envolve partições da unidade. O seguinte resultado é útil para simplificar os cálculos e evitar a utilização de partições da unidade:

Proposição 15.3. *Seja M uma variedade orientada de dimensão d e $C \subset M$ um conjunto fechado de medida nula. Para toda a forma diferencial $\omega \in \Omega_c^d(N)$, temos que:*

$$\int_M \omega = \int_{M-C} \omega.$$

Demonstração. Mais uma vez, a demonstração consiste em utilizar uma partição da unidade para reduzir ao caso em que M é um aberto de $\mathbb{R}^d$. Para um aberto $U \subset \mathbb{R}^d$, o resultado reduz-se à igualdade:

$$\int_U f \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^d = \int_{U-C} f \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^d,$$

onde $f : U \to \mathbb{R}$ é uma função integrável. Este resultado verifica-se pois C tem medida nula. O leitor deverá verificar os detalhes. $\square$

EXEMPLO 15.4.

Seja $i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ a esfera de dimensão 2. Consideremos a forma diferencial $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ definida por:

$$\omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

A forma $\mu = i^*\omega \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ não se anula e define uma orientação para $\mathbb{S}^2$. Pela proposição, temos que:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mu = \int_{\mathbb{S}^2 - p} \mu,$$

para qualquer $p \in \mathbb{S}^2$. Tomemos, por exemplo, $p = N$ o pólo norte. A projecção estereográfica em relação a N define uma carta global $\pi_N : \mathbb{S}^2 - N \to \mathbb{R}^2$, cuja inversa é a parametrização:

$$\pi_N^{-1}(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2+1}(2u, 2v, u^2+v^2-1).$$

Temos que:

$$(\pi_N^{-1})^* i^*\omega = (i \circ \pi_N^{-1})^*\omega = -\frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

Isto mostra que π_N é um sistema de coordenadas negativo. Concluímos que:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mu = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2}\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v.$$

Este último integral pode ser calculado mudando para coordenadas polares, obtendo-se:

$$\int_{\mathbb{S}^2} \mu = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{4r}{(r^2+1)^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 4\pi$$

O nosso próximo objectivo é generalizar o Teorema de Stokes a formas diferenciais. Para isso, precisamos de formalizar a noção de *variedade com bordo*.

Seja $H^d = \{(x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^d : x^d \geq 0\}$ o semi-plano superior. Vamos relaxar a definição de estrutura diferenciável permitindo que as nossas cartas $\phi : U \to \mathbb{R}^d$ sejam homeomorfismos de um aberto $U \subset M$ num aberto $\phi(U) \subset H^d$. Uma **variedade com bordo** é um espaço topológico com uma estrutura diferenciável, neste sentido mais geral. Esta definição inclui as variedades que temos vindo a considerar, pois podemos assumir que, nesse caso, as cartas tomam valores no interior de H^d, e este é difeomorfo a $\mathbb{R}^d$.

Um ponto $p \in M$ de uma variedade com bordo diz-se um **ponto do bordo** se para algum sistema de coordenadas $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^d)$ temos que $x^d(p) = 0$. Note que esta condição é independente do sistema de coordenadas. Ao conjunto dos pontos do bordo chama-se **bordo** de M e designa-se por ∂M. Se $\partial M = \varnothing$, dizemos que M é um **variedade sem bordo** e estas correspondem, precisamente, às variedades que considerámos anteriormente.

Proposição 15.5. *Seja M uma variedade com bordo de dimensão d. Então ∂M e $M - \partial M$ são variedades sem bordo de dimensão $d-1$ e d, respectivamente.*

A demonstração é um exercício simples.

Todos os objectos que introduzimos para variedades sem bordo podem, igualmente, ser definidos para variedades com bordo. Podemos, por exemplo, falar de fibrado tangente e cotangente, campos vectoriais, formas diferenciais, etc. De ora em diante, vamos utilizar estes conceitos sem mais observações.

Seja M uma variedade com bordo e $p \in \partial M$ um ponto do bordo: $p \in \partial M$. Por um lado, temos o espaço tangente T_pM, que tem dimensão d, e por outro, temos o espaço tangente $T_p\partial M$ que tem dimensão $d-1$. É claro que $T_p\partial M$ é um subespaço linear de T_pM. Em coordenadas locais $(U, x^1, \ldots, x^d)$, um vector $\mathbf{v} \in T_pM$ escreve-se na forma

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{d} v^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p .$$

Os vectores tangentes que pertencem a $T_p\partial M$ são, exactamente, os vectores com a última coordenada nula: $v^d = 0$. Um vector tangente diz-se EXTERIOR a ∂M se $v^d < 0$. Esta condição é independente do sistema de coordenadas.

Seja M uma variedade com bordo orientada. A orientação $[\mu_M]$ de M induz uma orientação $[\mu_{\partial M}]$ de ∂M da seguinte forma: se $p \in \partial M$, uma orientação positiva de $T_p\partial M$ é, por definição, $[i_{\mathbf{v}}\mu_p]$ onde $\mathbf{v} \in T_pM$ é um vector exterior a ∂M. É fácil de ver que esta definição é independente da escolha de vector exterior. Daqui em diante, se M é uma variedade com bordo orientada, vamos considerar em ∂M a orientação induzida desta forma.

Teorema 15.6 (Stokes)**.** *Seja M uma variedade com bordo, orientada, de dimensão d. Se $\omega \in \Omega_c^{d-1}(M)$ é uma forma com suporte compacto, então:*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Demonstração. Consideramos, primeiro, dois casos especiais.

Caso $M = \mathbb{R}^d$: Pela linearidade do integral, podemos assumir que $\omega = f\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{d-1}$. Temos que:

$$\mathrm{d}\omega = (-1)^{d-1}\frac{\partial f}{\partial x^d}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^d.$$

Pelo Teorema de Fubini, obtemos:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = (-1)^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x^d}\mathrm{d}x^d\right)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^{d-1} = 0.$$

pois f é uma função com suporte compacto. Como $\partial\mathbb{R}^d = \varnothing$, o Teorema de Stokes é válido para $\mathbb{R}^d$.

Caso $M = H^d$: Neste caso, podemos escrever:

$$\omega = \sum_{i=1}^{d} f_i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^d,$$

logo:

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^d,$$

Para $i \neq d$, por um cálculo análogo ao caso anterior, obtemos:

$$\int_{H^d} \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^d = 0.$$

Para $i = d$, calculamos:

$$\begin{aligned}
(-1)^{d-1} \int_{H^d} \frac{\partial f_d}{\partial x^d} \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^d = \\
&= (-1)^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_d}{\partial x^d} \mathrm{d}x^d \right) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{d-1} \\
&= (-1)^d \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_d(x^1, \ldots, x^{d-1}, 0) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{d-1}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos:

$$\int_{H^d} \mathrm{d}\omega = (-1)^d \int_{\mathbb{R}^{d-1}} f_d(x^1, \ldots, x^{d-1}, 0) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{d-1}.$$

Por outro lado, $\partial H^d = \{(x^1, \ldots, x^d) : x^d = 0\}$, logo

$$\int_{\partial H^d} \omega = \int_{\partial H^d} f_d(x^1, \ldots, x^{d-1}, 0) \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{d-1}.$$

Em H^d tomamos a orientação canónica $[\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^d]$. A orientação induzida em $\partial H^d = \mathbb{R}^{d-1}$ é dada por $[(-1)^d \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{d-1}]$ (exercício), e concluímos que:

$$\int_{\partial H^d} \omega = (-1)^d \int_{\partial \mathbb{R}^{d-1}} f_d(x^1, \ldots, x^{d-1}, 0) \mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^{d-1}.$$

Assim, o teorema também é válido neste caso.

Vejamos, agora, o caso geral de uma variedade de dimensão d. Fixemos uma cobertura de M por sistemas de coordenadas (U_α, ϕ_α) positivos, e seja $\{\rho_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a esta cobertura. As formas $\rho_\alpha \omega$ tem suporte contido em U_α, e este suporte é compacto pois é um subconjunto fechado dum conjunto compacto:

$$\operatorname{supp} \rho_\alpha \omega \subset \operatorname{supp} \rho_\alpha \cap \operatorname{supp} \omega.$$

Como cada U_α é difeomorfo a $\mathbb{R}^d$ ou a H^d, já sabemos que:

$$\int_{U_\alpha} \mathrm{d}(\rho_\alpha \omega) = \int_{\partial U_\alpha} \rho_\alpha \omega.$$

Pela linearidade e aditividade do integral, concluímos que:

$$\begin{aligned}
\int_M \mathrm{d}\omega &= \sum_\alpha \int_M \mathrm{d}(\rho_\alpha \omega) \\
&= \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \mathrm{d}(\rho_\alpha \omega) \\
&= \sum_\alpha \int_{\partial U_\alpha} \rho_\alpha \omega \\
&= \int_{\partial M} \sum_\alpha \rho_\alpha \omega = \int_{\partial M} \omega.
\end{aligned}$$

□

Corolário 15.7. *Seja M uma variedade (sem bordo) orientada de dimensão d. Para toda a forma $\omega \in \Omega_c^{d-1}(M)$, temos que:*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = 0.$$

Corolário 15.8. *Seja M uma variedade compacta, orientada, de dimensão d. Para toda a forma $\omega \in \Omega^{d-1}(M)$, temos que:*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = 0.$$

Exercícios.

1. Mostre que o integral de formas diferenciais satisfaz as seguintes propriedades básicas:
   (a) *Linearidade:* Se $\omega, \eta \in \Omega_c^d(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então:
   $$\int_M (a\omega + b\eta) = a\int_M \omega + b\int_M \eta.$$
   (b) *Aditividade:* Se $M = M_1 \cup M_2$, e $\omega \in \Omega_c^d(M)$, então:
   $$\int_M \omega = \int_{M_1} \omega + \int_{M_2} \omega,$$
   desde que $M_1 \cap M_2$ possua medida nula.

2. Mostre que, se em H^d tomarmos a orientação $[\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^d]$, então a orientação induzida em $\partial H^d = \mathbb{R}^{d-1}$ é dada por $[(-1)^d \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{d-1}]$

3. Considere o 2-toro $\mathbb{T}^2$ como a subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^4$:
   $$\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1, z^2 + y^2 = 1\}.$$
   Seja ainda ω o pull-back da forma $(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y) \wedge (w\mathrm{d}z - z\mathrm{d}w) \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ para $\mathbb{T}^2$. Para uma orientação à sua escolha, calcule $\int_{T^2} \omega$.

4. Seja M uma variedade Riemanniana orientada, com bordo. Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função com suporte compacto define-se o integral de f sobre M por:
   $$\int_M f \equiv \int_M *f.$$

Se X é um campo vectorial, demonstre o **Teorema da Divergência**:

$$\int_M \operatorname{div} X = \int_{\partial M} X \cdot n,$$

onde $n : \partial M \to T_{\partial M}M$ é a normal exterior unitária ao longo de ∂M.

5. Seja M uma variedade Riemanniana orientada, com bordo. Para uma função $f : M \to \mathbb{R}$ designe por $\frac{\partial f}{\partial n}$ a função $n(f) : \partial M \to \mathbb{R}$, onde n é a normal exterior unitária ao longo de ∂M. Verifique as seguintes duas identidades de Green:

$$\int_{\partial M} f\frac{\partial g}{\partial n} = \int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\rangle - \int_M f\Delta g,$$
$$\int_{\partial M} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) = \int_M (g\Delta f - f\Delta g),$$

onde $f, g \in C^\infty(M)$.

6. Seja G um grupo de Lie de dimensão d.
   (a) Mostre que se $\omega, \omega' \in \Omega^d(G)$ são formas diferenciais invariantes à esquerda e $[\omega] = [\omega']$, então existe um real $a > 0$ tal que:

$$\int_G f\omega = a\int_G f\omega', \ \forall f \in C_c^\infty(G).$$

Fixe uma orientação μ para G e uma forma diferencial $\omega \in \Omega^d(G)$ invariante à esquerda tal que $\mu = [\omega]$. Defina o integral de uma função $f \in C_c^\infty(G)$ por:

$$\int_G f \equiv \int_G f\omega.$$

   (b) Mostre que o integral é invariante por translações à esquerda, i.e., para todo o $g \in G$, é válida a identidade

$$\int_G f \circ L_g = \int_G f.$$

   (c) Dê um exemplo de um grupo de Lie em que o integral não é invariante à direita.

Para cada $g \in G$, a forma diferencial $R_g^*\omega$ é invariante à esquerda, logo

$$R_g^*\omega = \tilde{\lambda}(g)\omega,$$

para uma função $\tilde{\lambda} : G \to \mathbb{R}$. Assim, define-se a **função modular** $\lambda : G \to \mathbb{R}_+$ por: $\lambda(g) = |\tilde{\lambda}(g)|$.
   (d) Mostre que o integral é invariante à direita sse G é **unimodular**, i.e., $\lambda \equiv 1$.
   (e) Mostre que um grupo de Lie compacto é unimodular.

7. Seja G um grupo de Lie compacto e $\Phi : G \to GL(V)$ um representação de G. Mostre que existe um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ em V em relação ao qual esta representação é por transformações ortogonais:

$$\langle \Phi(g)\cdot \mathbf{v}, \Phi(g)\cdot \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle, \quad \forall g \in G.$$

(Sugestão: Utilize o facto de que um grupo de Lie compacto é unimodular.)

8. Seja G um grupo de Lie compacto. Mostre que G possui uma estrutura Riemanniana bi-invariante, i.e., invariante por translações à esquerda e à direita.

(Sugestão: Uma estrutura Riemanniana em G, invariante à esquerda, é invariante à direita sse o produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ induzido em $\mathfrak{g} \simeq T_eG$ satisfaz:

$$\langle \mathrm{Ad}(g)\cdot X, \mathrm{Ad}(g)\cdot Y\rangle = \langle X, Y\rangle, \quad \forall g \in G, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Lição 16. Cohomologia de de Rham

O facto de que o diferencial exterior satisfaz $\mathrm{d}^2 = 0$ tem consequências muito profundas, como iremos ver nesta e nas próximas lições.

Definição 16.1. *Seja $\omega \in \Omega^k(M)$ uma forma diferencial.*

*(i) Diz-se que ω é uma **forma fechada** se $\mathrm{d}\omega = 0$.*

*(ii) Diz-se que ω é uma **forma exacta** se $\omega = \mathrm{d}\eta$, para alguma forma $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$.*

Designamos por $Z^k(M)$, respectivamente $B^k(M)$, os espaços vectoriais das formas diferenciais de grau k fechadas, respectivamente exactas.

Por outras palavras, as formas fechadas formam o núcleo de d , enquanto que as formas exactas formam a imagem de d. Ao par $(\Omega(M), \mathrm{d})$ chamamos o *complexo de de Rham*[3], que representamos na forma

$$\cdots \longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^k(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots$$

O facto de que $\mathrm{d}^2 = 0$ significa que toda a forma exacta é fechada:

$$B^k(M) \subset Z^k(M).$$

Podemos pensar no complexo $(\Omega(M), \mathrm{d})$ como um conjunto de equações diferenciais associadas à variedade M. Encontrar as formas fechadas significa resolver a equação diferencial:

$$\mathrm{d}\omega = 0.$$

Por outro lado, as formas exactas podem ser vistas como as soluções triviais desta equação. O espaço das soluções interessantes módulo as soluções triviais é, precisamente, a cohomologia de de Rham:

Definição 16.2. *Chama-se **cohomologia de de Rham de M de ordem** k ao espaço vectorial*

$$H^k(M) \equiv Z^k(M)/B^k(M).$$

Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. O pull-back fornece uma aplicação linear $\Phi^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$ que comuta com os diferenciais:

$$\Phi^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(\Phi^*\omega).$$

Segue-se que Φ^* transforma formas fechadas (respectivamente, exactas) em formas fechadas (respectivamente, exactas). Assim, obtemos uma aplicação linear ao nível das respectivas cohomologias:

$$\Phi^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M),\ [\omega] \mapsto [\Phi^*\omega].$$

[3]Não se trata de nenhum erro tipográfico! Estes complexo tem o nome do matemático Francês George de Rham, daí a repetição da partícula "de".

Observe que se $\Phi : M \to N$ e $\Psi : N \to Q$ são aplicações diferenciáveis, então a aplicação $(\Psi \circ \Phi)^* : H^\bullet(Q) \to H^\bullet(M)$ é dada por

$$(\Psi \circ \Phi)^* = \Phi^* \circ \Psi^*.$$

Por outro lado, a identidade $M \to M$ induz a identidade $H^\bullet(M) \to H^\bullet(M)$. Em particular, se $\Phi : M \to N$ é um difeomorfismo então a aplicação induzida $\Phi^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)$ é um isomorfismo. Concluímos que a cohomologia de de Rham é um *invariante* de variedades diferenciáveis.

Observação 16.3 (*Crash Course* em álgebra homológica-parte I)**.** O complexo de de Rham é um exemplo de um *complexo diferencial.* Em geral, chama-se **complexo diferencial** a um par (C, d) onde:

(a) C é um espaço vectorial $\mathbb{Z}$-graduado, i.e., $C = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} C^k$ é a soma directa de espaços vectoriais[4];

(b) $\mathrm{d} : C \to C$ é uma transformação linear de grau 1, i.e., $\mathrm{d}(C^k) \subset C^{k+1}$, tal que $\mathrm{d}^2 = 0$.

Representamos um complexo pelo diagrama:

$$\cdots \longrightarrow C^{k-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} C^k \xrightarrow{\mathrm{d}} C^{k+1} \longrightarrow \cdots$$

A d chama-se o **diferencial** do complexo. Introduzimos o subespaço dos **cociclos**:

$$Z^k(C) \equiv \{z \in C^k : \mathrm{d}z = 0\},$$

e o subespaço dos **cobordos**

$$B^k(C) \equiv \{\mathrm{d}z : z \in C^{k-1}\}.$$

Como $\mathrm{d}^2 = 0$, é claro que $B^k(C) \subset Z^k(C)$. A **cohomologia** de (C, d) é a soma directa $H(C) = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} H(C)^k$ dos espaços vectoriais de cohomologia de ordem k definidos por:

$$H^k(C) = \frac{Z^k(C)}{B^k(C)}.$$

Dados dois complexos (A, d_A) e (B, d_B), um homomorfismo de complexos $f : A \to B$ é uma aplicação que:

(a) é linear e preserva a graduação, i.e., $f(A^k) \subset B^k$;

(b) comuta com os diferenciais, i.e., $f\mathrm{d}_A = \mathrm{d}_B f$.

Representamos um homomorfismo de complexos pelo diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{k-1} \arrow[r, "\mathrm{d}_A"] \arrow[d, "f"'] & A^k \arrow[r, "\mathrm{d}_A"] \arrow[d, "f"'] & A^{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{k-1} \arrow[r, "\mathrm{d}_B"'] & B^k \arrow[r, "\mathrm{d}_B"'] & B^{k+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Um homomorfismo de complexos $f : A \to B$ transforma cociclos em cociclos e cobordos em cobordos. Logo, induz um homomorfismo entre os espaços de cohomologia, que designamos pela mesma letra: $f : H^\bullet(A) \to H^\bullet(B)$.

[4]Mais geralmente, podem-se considerar complexos formados por módulos sobre anéis (por exemplo, grupos abelianos). As considerações que se seguem são ainda válidas para a categoria dos módulos sobre anéis, com as modificações óbvias.

Os complexos diferenciais e os homomorfismos de complexos formam um categoria. O estudo destas estruturas algébricas é um dos temas centrais de uma área importante da álgebra conhecida por *álgebra homológica*.

Podemos resumir as observações acima, dizendo que a correspondência que a uma variedade diferenciável M associa o seu complexo de de Rham $\Omega^\bullet(M)$, e a uma aplicação diferenciável $\Phi : M \to N$ associa o pull-back $\Phi^* : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$, é um functor *contravariante*, que leva a categoria das variedades diferenciáveis na categoria dos complexos diferenciais.

Um outro complexo que podemos associar a uma variedade diferenciável M é o complexo $\Omega_c(M)$ das formas diferenciais com suporte compacto. Assim, temos o subespaço vectorial das formas fechadas com suporte compacto:

$$Z^k_c(M) \equiv \{\omega \in \Omega^k_c(M) : \mathrm{d}\omega = 0\},$$

e o subespaço vectorial das formas exactas com suporte compacto:

$$B^k_c(M) \equiv \{\mathrm{d}\eta : \eta \in \Omega^{k-1}_c(M)\}.$$

A **cohomologia de de Rham com suporte compacto** de ordem k é o subespaço vectorial

$$H^k_c(M) = Z^k_c(M)/B^k_c(M).$$

É claro que, se M é compacta, então $H^\bullet_c(M) = H^\bullet(M)$.

Note que se $\Phi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, em geral, o pull-back $\Phi^*\omega$ de uma forma diferencial $\omega \in \Omega_c(N)$ com suporte compacto, é uma forma com suporte *não-compacto*. Por outro lado, se $\Phi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável e *própria* então o pull-back induz uma aplicação $\Phi^* : \Omega^\bullet_c(N) \to \Omega^\bullet_c(M)$. Segue-se que a cohomologia de de Rham com suporte compacto também é um invariante de variedades diferenciáveis.

As cohomologias de de Rham de grau 0 têm os seguintes significados:

Teorema 16.4. *Seja M uma variedade diferenciável com finitas componentes conexas. Então:*

$$H^0(M) = \mathbb{R}^l,$$

onde l é o número de componentes conexas de M, e

$$H^0_c(M) = \mathbb{R}^{l'},$$

onde l' é o número de componentes conexas compactas de M.

Demonstração. Temos que $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ e se $f \in C^\infty(M)$ satisfaz $\mathrm{d}f = 0$, então f é localmente constante. Assim, vemos que:

$$Z^0(M) = \mathbb{R}^l,$$

onde l é o número de componentes conexas de M. Como

$$B^0(M) = \{0\},$$

temos, também, $H^0(M) = \mathbb{R}^l$.

Por outro lado, tomando formas com suporte compacto, se $f \in C^\infty_c(M)$ satisfaz $\mathrm{d}f = 0$, então f é constante nas componentes compactas de M e é zero nas componentes não-compactas. Como, $B^0_c(M) = \{0\}$, concluímos que

$$H^0(M) = \mathbb{R}^{l'},$$

onde l' é o número de componentes conexas compactas de M. $\square$

Em geral, o cálculo da cohomologia $H^k(M)$ ou $H_c^k(M)$, para $k \geq 1$, directamente a partir da definição, é muito difícil. Podemos, apenas, dizer que

$$H^k(M) = H_c^k(M) = 0, \text{ se } k > \dim M,$$

pois neste caso $\Omega^k(M) = 0$.

Veremos nas próximas lições algumas técnicas para o cálculo da cohomologia de de Rham. Por agora, limitamo-nos a um exemplo simples onde o cálculo directo é, ainda, possível.

Exemplo 16.5.
Seja $M = \mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. *Como* $\mathbb{S}^1$ *é compacto, temos que* $H^\bullet(\mathbb{S}^1) = H_c^\bullet(\mathbb{S}^1)$. *Como* $\mathbb{S}^1$ *é conexo, temos que:*

$$H^0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}.$$

Para calcular $H^1(\mathbb{S}^1)$, *tomemos a 1-forma* $-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$. *Esta forma restringe-se a uma 1-forma em* $\mathbb{S}^1$ *que designaremos por* ω. *Como* $\dim \mathbb{S}^1 = 1$, ω *é fechada. Por outro lado,* $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ *define uma parametrização de* $\sigma :]0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}$, *logo:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} \omega &= \int_{]0,2\pi[} \sigma^*\omega \\ &= \int_{]0,2\pi[} (-\sin t)\mathrm{d}\cos t + \cos t \mathrm{d}\sin t \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi. \end{aligned}$$

Pelo corolário do Teorema de Stokes, vemos que ω *não é exacta, logo representa uma classe de cohomologia* $[\omega] \in H^1(\mathbb{S}^1)$ *não-trivial.*

A forma ω *tem um significado geométrico: como* $\sigma^*\omega = \mathrm{d}t$, *temos que* $\omega = \mathrm{d}\theta$ *em* $\mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\}$, *onde* $\theta : \mathbb{S}^1 - \{(1, 0)\} \to \mathbb{R}$ *é a coordenada ângulo (o inverso da parametrização* σ*). Assim, por vezes, designa-se a forma* ω *por* $\mathrm{d}\theta$, *apesar desta forma não ser exacta.*

Vejamos que a classe $[\omega]$ *gera* $H^1(\mathbb{S}^1)$. *Dada uma forma* $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ *temos* $\alpha = f\omega$, *para alguma função* $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$. *Seja*

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

e defina-se a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *por:*

$$g(\theta) = \int_0^\theta (f(t) - c)\mathrm{d}t.$$

Como

$$I(\theta) = g(\theta + 2\pi) - g(\theta) = \int_\theta^{\theta+2\pi} (f(t) - c)\mathrm{d}t$$

satisfaz

$$I(0) = \int_0^{2\pi} (f(t) - c)\mathrm{d}t = 0$$

e

$$I'(\theta) = f(\theta + 2\pi) - c - f(\theta) + c = 0,$$

concluimos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica de período 2π, e define portanto uma função $g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$, de classe C^∞. Em $\mathbb{S}^1 - \{(1,0)\}$, temos que

$$\mathrm{d}g = f(\theta)\mathrm{d}\theta - c\mathrm{d}\theta = \alpha - c\omega.$$

Segue-se que $\mathrm{d}g = \alpha - c\omega$ em $\mathbb{S}^1$ e, portanto, $[\alpha] = c[\omega]$. Isto mostra que $[\omega]$ gera $H^1(\mathbb{S}^1)$ e concluímos que:

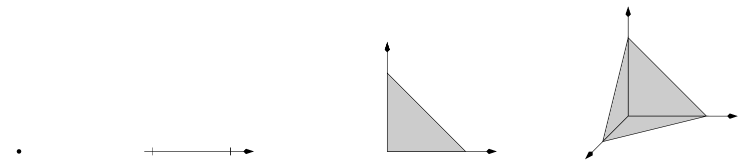
$$H^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}.$$

Vimos acima que a cohomologia de de Rham é um invariante de variedades diferencial. Na realidade, esta cohomologia é um invariante topológico. Isto é uma consequência do famoso Teorema de de Rham, que relaciona a cohomologia singular e a cohomologia de de Rham.

Para definir a cohomologia singular procedemos do seguinte modo. Designamos por $\Delta^k \subset \mathbb{R}^k$ o **k-símplice standard**:

$$\Delta^k = \{(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^{k} t_i \leq 1, t_i \geq 0\}.$$

Note que, $\Delta^0 = \{0\}$ é um conjunto singular.



Δ^0 Δ^1 Δ^2 Δ^3

Definição 16.6. *Seja M uma variedade. Chama-se **k-símplice singular** a uma aplicação $\sigma : \Delta^k \to M$ de classe C^∞. Chama-se **k-cadeia singular** a uma combinação linear formal*

$$c = \sum_{i=1}^{p} a_i \sigma_i,$$

onde os $a_i \in \mathbb{R}$ e os σ_i são k-símplices singulares.

O termo "singular" é justificado pela ausência de qualquer hipótese de regularidade nos diferenciais das aplicações: uma k-cadeia em M, em geral, não parametriza uma subvariedade de M, e a sua imagem pode estar contida numa subvariedade de dimensão menor do que k.

Vamos designar por $S_k(M; \mathbb{R})$ o conjunto das k-cadeias singulares. Este conjunto é um espaço vectorial com as operações óbvias. Mais formalmente, $S_k(M; \mathbb{R})$ é o módulo livre gerado pelo conjunto dos k-símplices singulares.

Note que o k-símplice standard também pode ser visto como o símplice singular id: $\Delta^k \to \mathbb{R}^k$. Definimos a sua **face** i, onde $0 \leq i \leq k$, como sendo o $(k-1)$-símplice $k^i : \Delta^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ definida por:

$$k^i(t_1, \ldots, t_{k-1}) = \begin{cases} (t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_{k-1}), & \text{se } i = 1, \ldots, k, \\ \\ (1 - \sum_{j=0}^{k-1} t_j, t_1, \ldots, t_{k-1}), & \text{se } i = 0. \end{cases}$$

Mais geralmente, para um símplice $\sigma : \Delta^k \to M$ definimos a **face i do símplice** como sendo o $(k-1)$-símplice $\sigma^i : \Delta^{k-1} \to M$ dado por $\sigma^i = \sigma \circ k^i$.

Definição 16.7. *Seja $\sigma : \Delta^k \to M$ um k-símplice singular numa variedade M. O **bordo** de σ é a $(k-1)$-cadeia*

$$\partial\sigma = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sigma^i.$$

Para uma cadeia singular $c = \sum_{j=1}^{p} a_j \sigma_j$, o seu bordo é a cadeia

$$\partial c = \sum_{j=1}^{p} a_j \partial\sigma_j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{k} (-1)^i a_j \sigma_j^i.$$

O significado geométrico desta definição é o de que consideramos as faces de cada símplice com uma certa escolha de sinais. Ilustramos com o exemplo do símplice standard 2-dimensional.

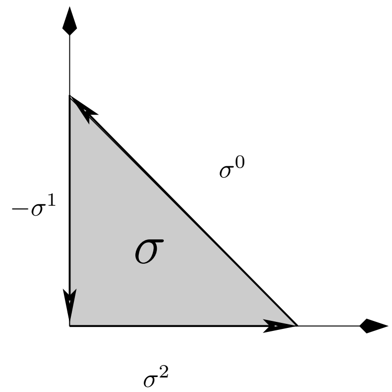
Exemplo 16.8.
O bordo do símplice standard σid: $\Delta^2 \to \mathbb{R}$ é a cadeia:

$$\partial\sigma = \sigma^0 - \sigma^1 + \sigma^2,$$

onde σ^0, σ^1 e σ^2 são os 1-símplices (faces) dados por:

$$\sigma^0(t) = (1-t, t),$$
$$\sigma^1(t) = (0, t),$$
$$\sigma^2(t) = (t, 0).$$

Podemos representar este bordo, esquematicamente, pela figura:



Por sua vez, os símplices σ^0, σ^1 e σ^2 têm bordos:

$$\partial\sigma^0 = (0,1) - (1,0),$$
$$\partial\sigma^1 = (0,1) - (0,0),$$
$$\partial\sigma^2 = (1,0) - (0,0),$$

(aqui, para um 0-símplice, estamos a confundir a aplicação com a sua imagem). Note que:

$$\partial(\partial\sigma) = 0.$$

No exemplo, vimos que $\partial^2\sigma = 0$. Isto é um facto perfeitamente geral, que resulta da escolha cuidadosa dos sinais e parametrizações das faces. A sua demonstração é deixada como exercício:

Lema 16.9. *Para toda a cadeia singular c:*
$$\partial(\partial c) = 0.$$

Desta forma obtemos um complexo $S(M;\mathbb{R}) = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} S_k(M;\mathbb{R})$:

$$\cdots \longleftarrow S_{k-1}(M;\mathbb{R}) \xleftarrow{\partial} S_k(M;\mathbb{R}) \xleftarrow{\partial} S_{k+1}(M;\mathbb{R}) \longleftarrow \cdots$$

a que chamamos **complexo das cadeias singulares** em M.

Observação 16.10 (*Crash Course* em álgebra homológica-parte II)**.** Nos complexos que considerámos a propósito da cohomologia de de Rham, os diferenciais *aumentavam* o grau, enquanto que para as cadeias singulares, o diferencial *diminui* o grau.

Para um complexo $C = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} C_k$ em que o diferencial diminui o grau[5]

$$\cdots \longleftarrow C_{k-1} \xleftarrow{\partial} C_k \xleftarrow{\partial} C_{k+1} \longleftarrow \cdots$$

dizemos que $z \in C_k$ é um **ciclo** se $\partial z = 0$ e dizemos que z é um **bordo** se $z = \partial b$. Neste caso, a **homologia** do complexo C é a soma directa $H(C) = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} H_k(C)$ dos espaços vectoriais definidos por:
$$H_k(C) = \frac{Z_k(C)}{B_k(C)},$$
onde $Z_k(C)$ é o subespaço dos ciclos e $B_k(C)$ é o subespaço dos bordos. Note, ainda, o posicionamento dos índices.

Assim, temos a homologia associada ao complexo $S(M;\mathbb{R})$:
$$H_k(M;\mathbb{R}) = \frac{Z_k(M;\mathbb{R})}{B_k(M;\mathbb{R})},$$
a que se chama **homologia singular** de M com coeficientes reais.

Se $\Phi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável entre duas variedades, dado $\sigma : \Delta^k \to M$, um símplice singular em M, então $\Phi_*(\sigma) \equiv \Phi \circ \sigma : \Delta^k \to N$ é um símplice singular em N. Se extendermos esta operação a cadeias $c = \sum_j a_j\sigma_j$ por linearidade:
$$\Phi_*(c) \equiv \sum_j a_j(\Phi \circ \sigma_j),$$
resulta uma aplicação $\Phi_* : S(M;\mathbb{R}) \to S(N;\mathbb{R})$, que é um homomorfismo de complexos, i.e., Φ_* é uma aplicação linear e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\cdots & S_{k-1}(M;\mathbb{R}) \arrow[l] \arrow[d, "\Phi_*"'] & S_k(M;\mathbb{R}) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "\Phi_*"'] & S_{k+1}(M;\mathbb{R}) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[d, "\Phi_*"'] & \cdots \arrow[l] \\
\cdots & S_{k-1}(N;\mathbb{R}) \arrow[l] & S_k(N;\mathbb{R}) \arrow[l, "\partial"'] & S_{k+1}(N;\mathbb{R}) \arrow[l, "\partial"'] & \cdots \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

[5]É claro que, dado um complexo (C,∂) em que o diferencial diminui o grau, definindo o complexo $(\bar{C},\mathrm{d})$ por $\bar{C}^k \equiv C_{-k}$ e $\mathrm{d} = \partial$, obtemos um complexo em que o diferencial aumenta o grau. Estas convenções são, pois, algo arbitrárias.

Segue-se, como habitualmente, que Φ_* induz uma aplicação em homologia:

$$\Phi_* : H_\bullet(M;\mathbb{R}) \to H_\bullet(N;\mathbb{R}),$$

que é uma transformação linear.

Note que se $\Phi : M \to N$ e $\Psi : N \to Q$ são aplicações diferenciáveis, então:

$$(\Psi \circ \Phi)_* = \Psi_* \circ \Phi_*,$$

e a aplicação identidade $M \to M$ induz a aplicação identidade $S_\bullet(M;\mathbb{R}) \to S_\bullet(M;\mathbb{R})$. Assim, a correspondência que a uma variedade diferenciável M associa o seu complexo singular $S(M;\mathbb{R})$ e a uma aplicação $\Phi : M \to N$ associa a transformação $\Phi_* : S(M;\mathbb{R}) \to S(N;\mathbb{R})$, é um functor *covariante* da categoria das variedades diferenciáveis para a categoria dos complexos diferenciais. Em particular, vemos que a homologia singular é um invariante de variedades diferenciáveis.

Na definição de símplice exigimos que as cadeias fossem diferenciáveis. Assim, é mais correcto chamar a esta homologia a *homologia singular diferenciável*. Observe que as definições acima de símplices, cadeias, e o seus bordos, fazem ainda sentido se exigirmos apenas continuidade. Daqui resulta a verdadeira homologia singular. Para esta, as aplicações contínuas induzem aplicações ao nível da homologia, e vemos que a homologia singular é um invariante topológico. Mostra-se que:

(i) toda a classe de homologia possui um representante que é um ciclo de classe C^∞, e
(ii) se dois ciclos de classe C^∞ diferem de um bordo de classe C^0 então também diferem de um bordo de classe C^∞.

Segue-se que a homologia singular e a homologia singular diferenciável coincidem, e não precisamos de as distinguir. Em particular, a homologia singular, que introduzimos acima, é um invariante topológico.

A razão para considerarmos homologia singular diferenciável, é que gostaríamos de a relacionar com a cohomologia de de Rham. Para isso, vamos integrar formas diferenciais sobre cadeias, como passamos a explicar. Se $\omega = f\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k \in \Omega^k(\mathbb{R}^k)$ é uma k-forma definida numa vizinhança do k-símplice standard, definimos

$$\int_{\Delta^k} \omega \equiv \int_{\Delta^k} f\mathrm{d}x^1 \cdots \mathrm{d}x^k.$$

Para uma forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$ numa variedade M, definimos o seu integral sobre um símplice $\sigma : \Delta^k \to M$ como sendo o número real:

$$\int_\sigma \omega \equiv \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega.$$

Mais geralmente, se $c = \sum_{j=1}^p a_j\sigma_j$ é uma k-cadeia singular em M, definimos o integral de ω sobre c por:

$$\int_c \omega \equiv \sum_{j=1}^p a_j \int_{\sigma_j} \omega.$$

Deixamos para o exercícios a demonstração da seguinte versão do Teorema de Stokes:

Teorema 16.11 (Stokes II)**.** *Seja M uma variedade diferenciável, $\omega \in \Omega^{k-1}(M)$ uma $(k-1)$-forma diferencial, e c uma k-cadeia singular em M. Então:*

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Vamos definir uma forma bilinear $\langle\ ,\ \rangle : Z^k_{dR}(M) \times Z_k(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ da seguinte forma. Se $c \in Z_k(M;\mathbb{R})$ é um ciclo e $\omega \in \Omega^k(M)$ é uma forma fechada, então:

$$\langle \omega, c\rangle \equiv \int_c \omega.$$

Note que, se $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ e $b \in S_{k+1}(M;\mathbb{R})$, então o Teorema de Stokes fornece:

$$\begin{aligned}
\langle \omega + \mathrm{d}\eta, c + \partial b\rangle &= \int_{c+\partial b} (\omega + \mathrm{d}\eta) \\
&= \int_c \omega + \int_{\partial b} \omega + \int_c \mathrm{d}\eta + \int_{\partial b} \mathrm{d}\eta \\
&= \int_c \omega + \int_b \mathrm{d}\omega + \int_{\partial c} \eta + \int_b \mathrm{d}^2\eta = \langle \omega, c\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, existe uma forma bilinear induzida ao nível de homologia/cohomologia.

Teorema 16.12 (de Rham)**.** *A forma bilinear*

$$\langle\ ,\ \rangle : H^k_{dR}(M) \times H_k(M;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad ([\omega],[c]) \mapsto \int_c \omega,$$

é não degenerada.

A demonstração deste resultado exige um grau de sofisticação que está para além do âmbito deste curso.

Para espaços de dimensão finita, o Teorema de de Rham afirma que integração fornece um isomorfismo linear:

$$H^k_{dR}(M) \simeq H_k(M;\mathbb{R})^* \simeq H_k(M;\mathbb{R}).$$

Concluímos que a cohomologia de de Rham é, afinal, um invariante topológico: Duas variedades (difeomorfas ou não) que são homeomorfas, possuem a mesma cohomologia de de Rham![6]

Exercícios.

1. Mostre que o produto exterior $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \to \Omega^{k+l}(M)$ induz um produto $\cup : H^k(M)\times H^l(M) \to H^{k+l}(M)$, que define em $H(M)$ uma estrutura de anel. A este produto chama-se **produto cup**.

2. Adapte o enunciado do Teorema 16.4 para o cao em que M tem infinitas componentes conexas.

3. Considere a variedade $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

[6] O leitor poderá indagar se duas variedades homeomorfas não terão de ser difeomorfas. De facto, isso não é verdade: o primeiro contra-exemplo deve-se a Milnor que mostrou que na esfera de dimensão 7 existem estruturas *exóticas*, i.e., estruturas diferenciáveis não-difeomorfas à estrutura canónica, compatíveis com a topologia usual. Hoje sabe-se que até o espaço euclideano $\mathbb{R}^4$ possui estruturas exóticas!

(a) Mostre que toda a 1-forma $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^2)$ fechada é exacta.
(b) Considere a 2-forma em $\mathbb{R}^3 - 0$ dada por

$$\omega = x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Considere a restrição de ω a $\mathbb{S}^2$ e calcule $\int_{\mathbb{S}^2} \omega$. Conclua que essa restrição é fechada, mas não é exacta.

4. Recorrendo à cohomologia de de Rham, mostre que $\mathbb{T}^2$ e $\mathbb{S}^2$ não são difeomorfas.

5. Seja c uma cadeia singular. Mostre que $\partial(\partial c) = 0$.

6. Demonstre o Teorema de Stokes para cadeias singulares, verificando cada um dos seguintes passos:
(a) Basta mostrar o teorema para cadeias que consistem num único símplice.
(b) Basta mostrar o teorema para o k-símplice standard em $\mathbb{R}^k$.
(c) Basta mostrar o teorema para as $(k-1)$-formas diferenciais em $\mathbb{R}^k$ do tipo:

$$\omega = f\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^k.$$

(d) Mostre que

$$\int_{\Delta^k} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Delta^k} \omega,$$

onde ω é a forma diferencial de (c).

7. No d-toro $\mathbb{T}^d = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ considere as 1-cadeias $c_1, \ldots, c_d : [0,1] \to \mathbb{T}^d$ definidas por:

$$c_j(t) \equiv (1, \ldots, e^{2\pi i t}, \ldots, 1) \quad (j = 1, \ldots, d).$$

Mostre que:
(a) Os c_j's são ciclos: $\partial c_j = 0$;
(b) Os c_j's não são bordos;
(c) As classes $\{[c_1], \ldots, [c_d]\} \subset H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ formam um conjunto linearmente independente.

Lição 17. Invariância por Homotopia e Sucessão de Mayer-Vietoris

Vamos agora aprender algumas técnicas que facilitam o cálculo da cohomologia de de Rham duma variedade diferenciável.

Começamos com o exemplo mais simples de uma variedade: $M = \mathbb{R}^d$. Para calcular a sua cohomologia procedemos por indução na dimensão. Sendo $\mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, vamos considerar a projecção $\pi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ e a inclusão $s : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \arrow[d, shift left, "\pi"] \\ \mathbb{R}^d \arrow[u, shift left, "s"] \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} \pi(x,t) &= x, \\ s(x) &= (x,0). \end{aligned}$$

Os respectivos pull-backs fornecem aplicações

$$\begin{tikzcd} \Omega^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \arrow[d, shift right, "s^*"'] \\ \Omega^\bullet(\mathbb{R}^d) \arrow[u, shift right, "\pi^*"'] \end{tikzcd}$$

e vamos ver que estas induzem isomorfismos dos espaços de cohomologia:

Proposição 17.1. *Os homomorfismos induzidos* $s^* : H^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \to H^\bullet(\mathbb{R}^d)$ *e* $\pi^* : H^\bullet(\mathbb{R}^d) \to H^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ *são inversos um do outro.*

Observação 17.2 (*Crash Course* em álgebra homológica-parte III)**.** A demonstração desta proposição vai recorrer a uma técnica bem conhecida da álgebra homológica: Dados dois complexos (A, d) e (B, d) e dois homomorfismos de complexos $f, g : A \to B$, um **operador de homotopia** é uma aplicação linear $h : A \to B$ de grau -1, tal que

$$f - g = \pm \mathrm{d}h \pm h\mathrm{d}.$$

Dizemos, ainda, que f e g são homotópicos. Descrevemos esta relação pelo diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A^{k-1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[dl] & A^k \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[dl, "h"'] & A^{k+1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "f"'] \arrow[d, shift left, "g"] \arrow[dl, "h"'] & \cdots \arrow[dl] \\ \cdots \arrow[r] & B^{k-1} \arrow[r, "\mathrm{d}"'] & B^k \arrow[r, "\mathrm{d}"'] & B^{k+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Como $\pm \mathrm{d}h \pm h\mathrm{d}$ leva formas fechadas em formas exactas, esta aplicação induz a aplicação nula em cohomologia. Assim, as aplicações induzidas por f e g ao nível de cohomologia $f, g : H^\bullet(A) \to H^\bullet(B)$ coincidem: $f = g$.

Demonstração da Proposição. Observe que $\pi \circ s = $id, logo $s^* \circ \pi^* = $id. Falta, pois, ver que $\pi^* \circ s^* = $id. Pela observação que acabámos de fazer, basta construir um operador de homotopia $h : \Omega^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \to \Omega^{\bullet-1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ tal que:

$$\mathrm{id} - \pi^* \circ s^* = \pm \mathrm{d}h \pm h\mathrm{d}.$$

Para construir h, observe que uma forma diferencial em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ é uma combinação linear de formas diferenciais de dois tipos:

$$f(x,t)(\pi^*\omega),$$
$$f(x,t)\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega,$$

onde ω é uma forma diferencial em $\mathbb{R}^d$. Definimos o operador de homotopia nestas formas por:

$$h : \begin{cases} f(x,t)(\pi^*\omega) \longmapsto 0, \\ f(x,t)\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega \longmapsto \int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s\ \pi^*\omega, \end{cases}$$

e extendemos por linearidade a todas as formas. Verifiquemos, então, que h é um operador de homotopia.

Seja $\theta = f(x,t)(\pi^*\omega) \in \Omega^k(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ uma forma do primeiro tipo. Então:

$$(\mathrm{id} - \pi^* \circ s^*)\theta = \theta - \pi^*(f(x,0)\omega) = (f(x,t) - f(x,0))\pi^*\omega.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}h + h\mathrm{d})\theta &= h\mathrm{d}\theta \\
&= h\left((\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t) \wedge \pi^*\omega - f\pi^*\mathrm{d}\omega \right) \\
&= \pi^*\omega \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t \\
&= (f(x,t) - f(x,0))\pi^*\omega.
\end{aligned}$$

Assim:

$$(\mathrm{id} - \pi^* \circ s^*)\theta = (\mathrm{d}h + \mathrm{d}h)\theta,$$

para forma diferenciais do primeiro tipo.

Seja agora $\theta = f(x,t)\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega$ uma forma diferencial do segundo tipo. Por um lado,

$$(\mathrm{id} - \pi^* \circ s^*)\theta = \theta,$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}h + h\mathrm{d})\theta = \mathrm{d}&\left(\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s\ \pi^*\omega \right) + h\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega - f\mathrm{d}t \wedge \pi^*\mathrm{d}\omega \right) \\
&= f(x,t)\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega + \sum_i \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(x,s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x^i \wedge \pi^*\omega \\
&+ \left(\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\pi^*\omega - \sum_i \left(\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(x,s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}x^i \wedge \pi^*\omega \\
&- \left(\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s \right) \pi^*\mathrm{d}\omega = f(x,t)\mathrm{d}t \wedge \pi^*\omega \\
&= \theta.
\end{aligned}$$

Assim, também neste caso:

$$(\mathrm{id} - \pi^* \circ s^*)\theta = (\mathrm{d}h + \mathrm{d}h)\theta.$$

□

É claro que $H^0(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}$, pois um conjunto singular é conexo. Por outro lado, $H^k(\mathbb{R}^0) = 0$ se $k \neq 0$. Por indução, concluímos que a cohomologia de $\mathbb{R}^d$ é dada por:

Corolário 17.3 (Lema de Poincaré)**.**

$$H^k(\mathbb{R}^d) = H^k(\mathbb{R}^0) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{se } k = 0, \\ 0 & \textit{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Assim, o Lema de Poincaré afirma que em $\mathbb{R}^d$ toda a forma fechada é exacta.

O argumento utilizado acima para mostrar que $H^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \simeq H^\bullet(\mathbb{R}^d)$ extende-se facilmente de $\mathbb{R}^d$ a qualquer variedade M:

Proposição 17.4. *Seja M uma variedade diferenciável, e considere as aplicações $\pi : M \times \mathbb{R} \to M$ e $s : M \to M \times \mathbb{R}$:*

$$\begin{tikzcd} M \times \mathbb{R} \arrow[d, shift left, "\pi"] \\ M \arrow[u, shift left, "s"] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{l} \pi(p,t) = p, \\ s(p) = (p,0). \end{array}$$

Os homomorfismos induzidos $H^\bullet(M \times \mathbb{R}) \underset{\pi^*}{\overset{s^*}{\rightleftarrows}} H^\bullet(M)$ *são isomorfismos.*

A demonstração é deixada como exercício. Na realidade, esta proposição é um caso especial de uma situação muito mais geral: se uma variedade pode ser deformada noutra, então as suas cohomologias são isomorfas. A fim de tornar a noção de deformação precisa, introduzimos a seguinte definição.

Definição 17.5. *Sejam $\Phi, \Psi : M \to N$ aplicações diferenciáveis. Uma* ***homotopia*** *entre Φ e Ψ é uma aplicação diferenciável $H : M \times \mathbb{R} \to N$ tal que:*[7]

$$H(p,t) = \begin{cases} \Phi(p) & \textit{se } t \leq 0, \\ \\ \Psi(p) & \textit{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Temos então:

Teorema 17.6 (Invariância por homotopia)**.** *Se $\Phi, \Psi : M \to N$ são aplicações homotópicas, então $\Phi^* = \Psi^* : H^\bullet(N) \to H^\bullet(M)$.*

Demonstração. Seja $H : M \times \mathbb{R} \to N$ uma homotopia entre Φ e Ψ. Se $s_0, s_1 : M \to M \times \mathbb{R}$ são as secções:

$$s_0(p) = (p,0) \text{ e } s_1(p) = (p,1),$$

então $\Phi = H \circ s_0$ e $\Psi = H \circ s_1$. Assim, ao nível de cohomologia, temos que:

$$\Phi^* = (H \circ s_0)^* = s_0^* \circ H^*,$$
$$\Psi^* = (H \circ s_1)^* = s_1^* \circ H^*.$$

Como s_0^* e s_1^* ambas invertem π^*, coincidem. Concluímos que $\Phi^* = \Psi^*$. $\square$

Dizemos que duas variedades M e N possuem o mesmo **tipo de homotopia** se existem aplicações diferenciáveis $\Phi : M \to N$ e $\Psi : N \to M$ tais que $\Psi \circ \Phi$ e $\Phi \circ \Psi$ são homotópicas a id_M e a id_N, respectivamente. Uma variedade diz-se **contráctil** se possui o mesmo tipo de homotopia que um ponto.

Corolário 17.7. *Se M e N possuem o mesmo tipo de homotopia então $H^\bullet(M) \simeq H^\bullet(N)$. Em particular, se M é uma variedade contráctil então:*

$$H^k(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{se } k = 0, \\ \\ 0 & \textit{se } k \neq 0. \end{cases}$$

[7] Na verdade, duas aplicações são C^∞-homotópicas sse são C^0-homotópicas: mostra-se que qualquer aplicação contínua entre duas variedades é C^0-homotópica a uma aplicação C^∞. Por esta razão, muitas vezes definimos a homotopia apenas no intervalo $[0,1]$.

Exemplos 17.8.

1. *Um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^d$ diz-se um* **conjunto em estrela** *se existir $x_0 \in U$ com a propriedade de que, para todo o $x \in \mathbb{R}^d$, o segmento $tx + (1-t)x_0$ pertence a U. Deixamos como exercício verificar que, nesse caso, U é contráctil. Logo, $H^k(U) = 0$ para $k \geq 1$.*
2. *A variedade $M = \mathbb{R}^d - 0$ tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{S}^{d-1}$: a inclusão $i : \mathbb{S}^{d-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^d - 0$ e a projecção $\pi : \mathbb{R}^d - 0 \to \mathbb{S}^{d-1}$, $x \mapsto x/||x||$, são inversas uma da outra, a menos de homotopia. Assim, $H^\bullet(\mathbb{R}^d - 0) \simeq H^\bullet(\mathbb{S}^{d-1})$.*

Existe uma outra ferramenta básica, que permite calcular a cohomologia da variedade M a partir da decomposição de M em espaços mais simples (dos quais sabemos calcular a cohomologia):

Teorema 17.9 (Sucessão de Mayer-Vietoris)**.** *Seja M uma variedade diferenciável, U e V abertos de M tais que $M = U \cup V$. Existe uma sucessão exacta longa:*

$$\longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \xrightarrow{\mathrm{d}^*} H^{k+1}(M) \longrightarrow$$

Observação 17.10 (*Crash Course* em álgebra homológica-parte IV)**.** Uma sucessão de espaços vectoriais e homomorfismos

$$\cdots \longrightarrow C^{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} C^k \xrightarrow{f_k} C^{k+1} \longrightarrow \cdots$$

diz-se **exacta** se $\operatorname{Im} f_{k-1} = \operatorname{Ker} f_k$. Uma sucessão exacta da forma:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

diz-se uma **sucessão exacta curta**. Isto, significa que:

(a) f é injectivo,
(b) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$, e
(c) g é sobrejectivo.

Uma propriedade básicas das sucessões exactas é a seguinte: Dada uma sucessão exacta de espaços vectoriais que termina nos espaços vectoriais triviais:

$$0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^k \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^d \longrightarrow 0$$

a soma alternada das dimensões é nula:

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i \dim C^i = 0.$$

Deixamos a demonstração (fácil) para os exercícios.

Para o teorema, estamos interessados numa sucessão exacta curta de *complexos*, i.e., numa sucessão de homomorfismos de complexos da forma:

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{g} C^\bullet \longrightarrow 0$$

Esta sucessão pode ser representada por um grande diagrama comutativo em que todas as linhas são exactas:

$$
\begin{tikzcd}
 & {} & {} & {} & \\
0 \arrow[r] & A^{k+1} \arrow[r, "f"] \arrow[u] & B^{k+1} \arrow[r, "g"] \arrow[u] & C^{k+1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{k} \arrow[r, "f"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & B^{k} \arrow[r, "g"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & C^{k} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{k-1} \arrow[r, "f"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & B^{k-1} \arrow[r, "g"] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & C^{k-1} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{d}"] & 0 \\
 & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] & {} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

A demonstração do teorema recorre ao seguinte facto básico de álgebra homológica: Dada uma sucessão exacta curta de complexos existe uma *sucessão exacta longa associada* em cohomologia:

$$
\cdots \longrightarrow H^k(A) \xrightarrow{f} H^k(B) \xrightarrow{g} H^k(C) \xrightarrow{\mathrm{d}^*} H^{k+1}(A) \longrightarrow \cdots
$$

onde $\mathrm{d}^* : H^\bullet(C) \to H^{\bullet+1}(A)$ é o chamado *homomorfismo de conexão*. O facto de que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ decorre, imediatamente, da definição de sucessão exacta curta. Por outro lado, as igualdades $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} \mathrm{d}^*$ e $\operatorname{Im} \mathrm{d}^* = \operatorname{Ker} f$ decorrem da construção de d^*, que passamos a descrever.

Para a construção de d^* é bom ter o grande diagrama comutativo acima presente. Seja $c \in C^k$ um cociclo: $\mathrm{d}c = 0$. Como as linhas são exactas, existe $b \in C^k$ tal que $g(b) = c$. Como o diagrama comuta, obtemos

$$
g(\mathrm{d}b) = \mathrm{d}g(b) = \mathrm{d}c = 0.
$$

Mais uma vez, sendo as linhas exactas, existe um único $a \in A^{k+1}$ tal que $f(a) = \mathrm{d}b$. Note que:

$$
f(\mathrm{d}a) = \mathrm{d}f(a) = \mathrm{d}^2 b = 0,
$$

logo $\mathrm{d}a = 0$, i.e., a é um cociclo. Desta forma, a um cociclo $c \in C^k$ associamos um cociclo $a \in A^{k+1}$.

Esta associação depende de escolha intermédia de $b \in C^k$. Se escolhermos outro $b' \in C^k$ tal que $g(b') = c$, então obtemos um novo $a' \in A^{k+1}$. No entanto, observe que

$$
g(b - b') = g(b') - g(b) = c - c = 0,
$$

logo existe $\bar{a} \in A^k$ tal que $f(\bar{a}) = b - b'$. Assim, obtemos

$$
f(\mathrm{d}\bar{a} - a + a') = \mathrm{d}f(\bar{a}) - f(a) + f(a') = \mathrm{d}(b - b') - \mathrm{d}b + \mathrm{d}b' = 0.
$$

Como f é injectiva, concluímos que $a - a' = \mathrm{d}\bar{a}$. Isto mostra que escolhas diferentes levam a elementos na mesma classe de cohomologia.

Por outro lado, esta associação leva cobordos em cobordos. De facto, se $c \in C^k$ é um cobordo, i.e., $c = \mathrm{d}c'$, então existe $b' \in C^{k-1}$ tal que $g(b') = c'$, e $g(\mathrm{d}b') = \mathrm{d}g(b') = \mathrm{d}c' = c$. Portanto o cociclo a só tem que satisfazer

$f(a) = \mathrm{d}b$ com $b = \mathrm{d}b'$, ou seja, $f(a) = \mathrm{d}^2 b' = 0$, pelo que podemos tomar $a = 0$.

Assim, esta associação determina um homomorfismo $\mathrm{d}^* : H^k(C) \to H^{k+1}(A)$ que transforma $[c]$ em $[a]$. Deixamos como exercício verificar que, para esta definição, temos $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} \mathrm{d}^*$ e $\operatorname{Im} \mathrm{d}^* = \ker f$.

Demonstração do Teorema. Pela observação, basta ver que temos uma sucessão exacta curta:

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V) \longrightarrow \Omega^\bullet(U \cap V) \longrightarrow 0$$

Nesta sucessão, a primeira aplicação é dada por:

$$\omega \mapsto (\omega|_U, \omega|_V),$$

enquanto que a segunda aplicação é dada por:

$$(\theta, \eta) \mapsto \theta|_{U\cap V} - \eta|_{U\cap V}.$$

Como $M = U \cup V$, é claro que a primeira aplicação é injectiva. Por outro lado, se $(\theta, \eta) \in \Omega^\bullet(U) \oplus \Omega^\bullet(V)$ pertence ao núcleo da segunda aplicação, então

$$\theta|_{U\cap V} = \eta|_{U\cap V}.$$

Assim, podemos definir uma forma diferencial em M por:

$$\omega_p = \begin{cases} \theta_p & \text{se } p \in U, \\ \\ \eta_p & \text{se } p \in V. \end{cases}$$

Logo, a imagem da primeira aplicação coincide com o núcleo da segunda aplicação. Finalmente, seja $\xi \in \Omega^\bullet(U \cap V)$. Podemos escolher uma partição da unidade $\{\rho_U, \rho_V\}$ subordinada à cobertura $\{U, V\}$. Então $\rho_V \xi \in \Omega^\bullet(U)$ e $-\rho_U \xi \in \Omega^\bullet(V)$ (note a troca de U e V!). Este par de formas é transformado pela segunda aplicação em:

$$(\rho_V \xi, -\rho_U \xi) \mapsto \rho_V \xi + \rho_U \xi = \xi.$$

Logo a segunda aplicação é sobrejectiva, e concluímos que a sucessão curta é exacta. □

Exemplo 17.11.
Como exemplo vamos calcular a cohomologia das esferas $\mathbb{S}^d$ para $d \geq 2$ (no Exemplo 16.5, calculámos $H^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ directamente, a partir da definição).

Seja $N \in \mathbb{S}^d$ o pólo norte e consideremos o conjunto aberto $U = \mathbb{S}^d - N$. A projecção estereográfica $\pi_N : U \to \mathbb{R}^{d-1}$ é um difeomorfismo, logo U é contráctil. Da mesma forma, se $S \in \mathbb{S}^d$ é o pólo sul, o conjunto aberto $V = \mathbb{S}^d - S$ é contráctil. Por outro lado, $M = U \cap V$ e a intersecção $U \cap V$ é difeomorfa (por qualquer das projecções estereográficas) a $\mathbb{R}^{d-1} - 0$. Como vimos no Exemplo 17.8.2, $\mathbb{R}^{d-1} - 0$ tem o mesmo tipo de homotopia que $\mathbb{S}^{d-1}$.

Assim, temos todos os ingredientes para calcular a sucessão de Mayer-Vietoris para o par (U, V):

- *Se $k \geq 1$, esta sucessão fornece:*

$$\cdots \longrightarrow 0 \oplus 0 \longrightarrow H^k(\mathbb{S}^{d-1}) \xrightarrow{\mathrm{d}^*} H^{k+1}(\mathbb{S}^d) \longrightarrow 0 \oplus 0 \longrightarrow \cdots$$

Assim, $H^{k+1}(\mathbb{S}^d) \simeq H^k(\mathbb{S}^{d-1})$ e, por indução, concluímos que

$$H^k(\mathbb{S}^d) \simeq H^{k-1}(\mathbb{S}^{d-1}) \simeq \cdots \simeq H^1(\mathbb{S}^{d-k+1}).$$

- *Por outro lado, como U, V e $U \cap V$ são conexos, os primeiros termos da sucessão são:*

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{d}^*} H^1(\mathbb{S}^d) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Daqui vemos que (ver Exercício 5 desta secção) $\dim H^1(\mathbb{S}^d) = 0$.

Assim, concluímos que:

$$H^k(\mathbb{S}^d) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } k = 0, d, \\ \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um gerador de $H^d(\mathbb{S}^d)$ é dado pela restrição a $\mathbb{S}^d$ da forma diferencial $\omega \in \Omega^d(\mathbb{R}^{d+1})$ definida por:

$$\omega = \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^{i-1} x^i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{d+1}.$$

De facto, esta forma não é exacta: um cálculo simples mostra que $\int_{\mathbb{S}^d} \omega \neq 0$.

Como vimos na lição anterior, a cohomologia com suporte compacto não é functorial para as aplicações diferenciáveis. No entanto, ela é functorial para as aplicações próprias e para as inclusões. Estes factos fazem com que a cohomologia com suporte compacto satisfaça a propriedades análogas, mas distintas, da cohomologia de de Rham.

Por exemplo, temos agora:

Proposição 17.12. *Seja M uma variedade diferenciável. Então:*

$$H_c^\bullet(M \times \mathbb{R}) \simeq H_c^{\bullet-1}(M).$$

Demonstração. Basta considerar o caso $M = \mathbb{R}^d$. Note que, se $\pi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ é a projecção, então uma forma $\pi^*\omega$ tem suporte não-compacto. Assim, vamos construir antes aplicações de "push-forward"

$$\pi_* : \Omega_c^{\bullet+1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^\bullet(\mathbb{R}^d),$$
$$e_* : \Omega_c^\bullet(\mathbb{R}^d) \to \Omega_c^{\bullet+1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}).$$

que são homomorfismos de complexos e que são inversas homotópicas.

Para construir π_*, observamos que toda a forma com suporte compacto em $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ é uma combinação de formas do tipo

$$f(x,t)(\pi^*\omega),$$
$$f(x,t)(\pi^*\omega) \wedge \mathrm{d}t,$$

onde ω é uma forma diferencial em $\mathbb{R}^d$ com suporte compacto, e f é uma função com suporte compacto. A aplicação π_* é dada por:

$$f(x,t)(\pi^*\omega) \longmapsto 0,$$
$$f(x,t)(\pi^*\omega) \wedge \mathrm{d}t \longmapsto \omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

Por outro lado, para construir e_* escolhemos uma forma $e \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$ com $\int_{\mathbb{R}} e = 1$ e definimos:

$$e_* : \ \omega \to \pi^*\omega \wedge e.$$

É imediato, destas definições, que $\pi_* \circ e_* = \mathrm{id}$, $\mathrm{d}\pi_* = \pi_* \mathrm{d}$ e $e_* \mathrm{d} = \mathrm{d} e_*$. Para completar a demonstração, basta ver que a composição $e_* \circ \pi_*$ é homotópica à aplicação identidade. Deixamos como exercício verificar que a aplicação $h : \Omega_c^\bullet(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}) \to \Omega_c^{\bullet-1}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ dada por:

$$\begin{aligned} f(x,t)(\pi^*\omega) &\longmapsto 0, \\ f(x,t)(\pi^*\omega) \wedge \mathrm{d}t &\longmapsto \left(\int_{-\infty}^{t} f(x,s)\mathrm{d}s - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,s)\mathrm{d}s \int_{-\infty}^{t} e \right) \pi^*\omega, \end{aligned}$$

é um operador de homotopia entre $e_* \circ \pi_*$ e a identidade. □

Assim, a cohomologia com suporte compacto *não é* invariante por homotopia. Por outro lado, o Lema de Poincaré tem de ser modificado da seguinte forma:

Corolário 17.13 (Lema de Poincaré para suporte compacto)**.**

$$H_c^k(\mathbb{R}^d) = \begin{cases} \mathbb{R} & \textit{se } k = d, \\ \\ 0 & \textit{se } k \neq d. \end{cases}$$

Para construir a sucessão de Mayer-Vietoris para suporte compacto, observamos que, se $U, V \subset M$ são abertos com $U \cup V = M$, as inclusões $U, V \hookrightarrow M$, $U \cap V \hookrightarrow U$ e $U \cap V \hookrightarrow V$ fornecem uma sucessão exacta curta

$$0 \longleftarrow \Omega_c^\bullet(M) \longleftarrow \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V) \longleftarrow \Omega_c^\bullet(U \cap V) \longleftarrow 0$$

onde a primeira aplicação é:

$$(\theta, \eta) \mapsto \theta + \eta,$$

enquanto que a segunda aplicação é dada por:

$$\omega \mapsto (-\omega, \omega).$$

Obtemos, então:

Teorema 17.14 (Sucessão de Mayer-Vietoris para suporte compacto)**.** *Seja M uma variedade diferenciável, U e V abertos de M tais que $M = U \cup V$. Existe uma sucessão exacta longa:*

$$\longleftarrow H_c^k(M) \longleftarrow H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \longleftarrow H_c^k(U \cap V) \xleftarrow{\mathrm{d}_*} H_c^{k-1}(M) \longleftarrow$$

Os detalhes da demonstração são deixados como exercício.

Exercícios.

1. Demonstre a Proposição 17.4.

2. Mostre que um conjunto em estrela é contráctil.

3. Seja $i : N \hookrightarrow M$ uma subvariedade. Dizemos que $r : M \to N$ é uma **retracção** se $r \circ i = \mathrm{id}_N$. Dizemos que N é uma **retracção por deformação** de M se existe um retracção $r : M \to N$ tal que $i \circ r$ é homotópica a id_M. Mostre que:
   (a) Se N é uma retracção por deformação de M, então $H^\bullet(N) \simeq H^\bullet(M)$.
   (b) Mostre que $\mathbb{S}^2$ é uma retracção por deformação de $\mathbb{R}^3 - 0$.

(c) Mostre que $\mathbb{T}^2$ é uma retracção por deformação de $\mathbb{R}^3 - (R \cap S)$, onde R é uma recta e S é uma circunferência de centro em R tal que $S \cap R = \varnothing$.

4. Mostre que o homomorfismo de conexão da sucessão exacta longa satisfaz $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} \mathrm{d}^*$ e $\operatorname{Im} \mathrm{d}^* = \ker f$.

5. Dada uma sucessão exacta de espaços vectoriais

$$0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^k \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^d \longrightarrow 0$$

mostre que

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i \dim C^i = 0.$$

6. Calcule a cohomologia de $\mathbb{T}^2$ e de $\mathbb{P}^2$.

7. Complete a construção da sucessão de Mayer-Vietoris para cohomologia com suporte compacto, mostrando que:

$$0 \longleftarrow \Omega_c^\bullet(M) \longleftarrow \Omega_c^\bullet(U) \oplus \Omega_c^\bullet(V) \longleftarrow \Omega_c^\bullet(U \cap V) \longleftarrow 0$$

é um sequência exacta curta de complexos.

8. Calcule a cohomologia com suporte compacto de $\mathbb{R}^d - 0$.

Lição 18. Cálculos em cohomologia

Vimos na lição precedente que a sucessão de Mayer-Vietoris relaciona a cohomologia da união com a cohomologia dos factores. Esta sucessão, fornece uma técnica de cálculo de cohomologia por indução, que é extremamente versátil. Para aplicar esta técnica, necessitamos de cobrir M por abertos cujas intersecções sejam triviais em cohomologia.

Definição 18.1. *Dizemos que uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de uma variedade diferenciável M é uma **boa cobertura** se todas as intersecções finitas $U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p}$ são difeomorfas a $\mathbb{R}^d$. Uma **variedade de tipo finito** é uma variedade diferenciável que possui uma boa cobertura finita.*

Proposição 18.2. *Toda a variedade diferenciável M possui uma boa cobertura. Se M é compacta então possui uma boa cobertura finita.*

Demonstração. Seja g uma métrica Riemanniana para M. Por um resultado bem conhecido de geometria Riemanniana, para cada ponto $p \in M$, podemos escolher uma vizinhança U_p convexa (i.e., para quaisquer $q, q' \in U_p$ existe uma única geodésica em U_p que une q a q'), tal que:

(i) cada U_p é difeomorfa a $\mathbb{R}^d$, e
(ii) a intersecção de duas vizinhanças convexas é convexa.

Segue-se que $\{U_p\}_{p \in M}$ é uma boa cobertura de M. Por outro lado, se M é compacta, então um número finito de vizinhanças convexas cobre M. $\square$

Estamos, então, em condições de aplicar a nossa técnica. Começamos por mostrar que a cohomologia não é muito grande.

Teorema 18.3. *Seja M uma variedade de tipo finito. Os espaços de cohomologia $H^k(M)$ e $H_c^k(M)$ têm dimensão finita.*

Demonstração. Para quaisquer dois abertos U e V, a sucessão de Mayer-Vietoris:

$$\cdots \longrightarrow H^{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\mathrm{d}^*} H^k(U \cup V) \xrightarrow{r} H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow \cdots$$

mostra que:

$$H^k(U \cup V) \simeq \operatorname{Ker} r \oplus \operatorname{Im} r \simeq \operatorname{Im} \mathrm{d}^* \oplus \operatorname{Im} r.$$

Assim, se as cohomologias de U, V, e $U \cap V$ têm dimensão finita, então a cohomologia de $U \cup V$ também tem dimensão finita.

Mostremos, por indução no cardinal da cobertura, que as variedades com uma boa cobertura finita, tem cohomologia de dimensão finita:

- Se M é difeomorfa a $\mathbb{R}^d$ o Lema de Poincaré mostra que M tem cohomologia de dimensão finita.
- Suponhamos que todas as variedades com uma boa cobertura com no máximo p abertos, têm cohomologia de dimensão finita. Seja M uma variedade que admite uma boa cobertura $\{U_1, \dots, U_{p+1}\}$ com $p+1$ elementos. Observe que os abertos:

  U_{p+1},
  $U_1 \cup \cdots \cup U_p$, e
  $(U_1 \cup \cdots \cup U_p) \cap U_{p+1} = (U_1 \cap U_{p+1}) \cup \cdots \cup (U_p \cap U_{p+1})$,

  têm todos cohomologia de dimensão finita, pois todos possuem uma boa cobertura com no máximo p abertos. Assim, a cohomologia de $M = U_1 \cup \cdots \cup U_{p+1}$ também tem dimensão finita.

A demonstração para a cohomologia com suporte compacto é análoga. $\square$

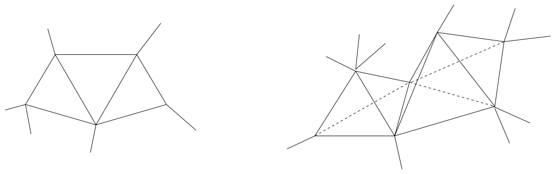
O leitor deverá estar familiarizado com a fórmula de Euler para polígonos regulares. Como uma aplicação simples deste resultado vamos generalizar esta fórmula a variedades compactas que admitem uma triangulação[8]. A noção de *triangulação* de uma variedade M, corresponde uma boa decomposição de M em símplices regulares, como passamos a explicar.

Um símplice $\sigma : \Delta^k \to M$ diz-se *regular* se possui uma extensão a um mergulho $\tilde{\sigma} : U \to M$, onde U é uma vizinhança de Δ^k. Para um símplice $\sigma : \Delta^k \to M$ definimos anteriormente as suas faces de dimensão $k-1$, que são símplices $\sigma^i : \Delta^{k-1} \to M$. Iterando esta construção, obtemos as **faces de dimensão** $k-i$, que são $(k-i)$-símplices $\sigma : \Delta^{k-i} \to M$. Observe que as faces de um símplice regular são símplices regulares.

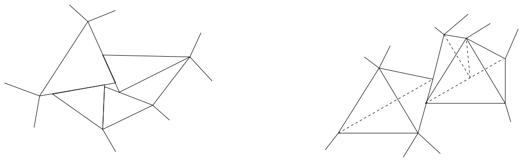
Definição 18.4. *Uma* ***triangulação*** *de uma variedade compacta M de dimensão d, é uma colecção finita $\{\sigma_i\}$ de d-símplices regulares, que cobrem M, e satisfazem a seguinte propriedade: se para dois símplices $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset$, então a intersecção $\sigma_i \cap \sigma_j$ é uma face de ambos os símplices σ_i e σ_j.*

A figura seguinte ilustra a condição de triangulação em dimensão 2 e 3:
Enquanto que nas duas figuras de cima a condição verifica-se, nas figuras de baixo ela não se verifica.

[8]Na realidade, toda a variedade compacta admite uma triangulação, mas este é um resultado difícil que está para além do âmbito destas lições.



$d = 2$ $\qquad\qquad$ $d = 3$



Como vimos acima, uma variedade compacta M tem cohomologia finita. Para uma variedade M com cohomologia finita, chama-se **característica de Euler** ao inteiro $\chi(M)$ definido por:

$$\chi(M) = \dim H^0(M) - \dim H^1(M) + \cdots + (-1)^d \dim H^d(M).$$

Temos então:

Teorema 18.5 (Fórmula de Euler)**.** *Seja M uma variedade compacta de dimensão d. Para toda a triangulação de M:*

$$(-1)^d \chi(M) = r_0 - r_1 + \cdots + (-1)^d r_d,$$

onde r_i designa o número de faces de dimensão i na triangulação.

Demonstração. Fixemos uma triangulação $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{r_d}\}$ de M. Para cada $k = 0, 1, 2 \ldots, d-1$, defina-se os conjuntos abertos:

$$V_k = M - \{\text{faces da triangulação de dimensão } k\}.$$

Vamos mostrar que, para $0 \leq k \leq d-1$, temos:

$$\chi(M) = \chi(V_k) + (-1)^d (r_0 - r_1 + \cdots + (-1)^k r_k). \tag{18.1}$$

Como

$$V_{d-1} = \bigcup_{j=1}^{r_d} \operatorname{int}(\sigma_j),$$

e cada aberto $\operatorname{int}(\sigma_j)$ é contráctil, vemos que $H^k(V_{d-1}) = 0$, se $k > 0$. Assim:

$$\chi(V_{d-1}) = \dim H^0(V_{d-1}) = r_d.$$

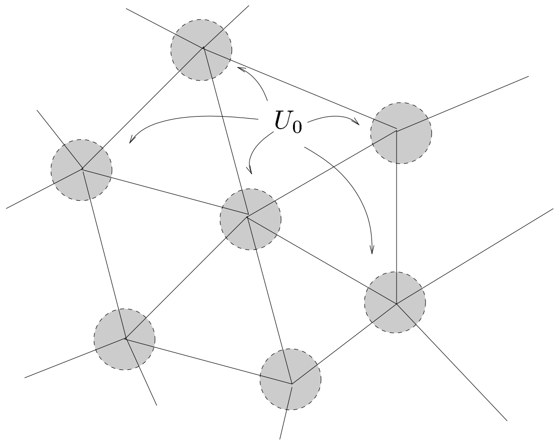
A relação (18.1) (com $k = d-1$) e este resultado, demonstram a fórmula de Euler.

Vamos começar por verificar (18.1) para $k = 0$. Para cada face de dimensão 0 escolhemos vizinhanças abertas $U_{0,1}, \ldots, U_{0,r_0}$, disjuntas e difeomorfas à bola $B_1^d = \{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| < 1\}$, e definimos o aberto:

$$U_0 = \bigcup_{i=1}^{r_0} U_{0,i}.$$

Note que $V_0 \cup U_0 = M$. Como cada $U_{0,i}$ é contráctil, temos que

$$\dim H^k(U_0) = \begin{cases} r_0, & \text{se } k = 0, \\ 0, & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$



Por outro lado, cada intersecção $V_0 \cap U_{0,i}$ possui uma deformação por retracção em $\mathbb{S}^{d-1}$, logo

$$\dim H^k(V_0 \cap U_0) = \begin{cases} r_0, & \text{se } k = 0, d-1, \\ 0, & \text{se } k \neq 0, d-1. \end{cases}$$

Estamos em condições de aplicar a sucessão de Mayer-Vietoris ao par (U_0, V_0). Se $d > 2$, esta sucessão fornece a seguinte informação:

(i) Os termos de mais baixo grau são:

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow H^0(U_0) \oplus H^0(V_0) \longrightarrow H^0(U_0 \cap V_0) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(M) \longrightarrow 0 \oplus H^1(V_0) \longrightarrow 0$$

Daqui resulta que:

$$\dim H^0(M) - \dim H^0(U_0) - \dim H^0(V_0) +$$
$$+ \dim H^0(U_0 \cap V_0) - \dim H^1(M) + \dim H^1(V_0) = 0.$$

Como o número de componentes conexas de M e V_0 é igual, temos que

$$\dim H^0(M) = \dim H^0(V_0).$$

Por outro lado, o número de componentes conexas de U_0 e $V_0 \cap U_0$ também é igual, logo concluímos da relação acima que:

$$\dim H^1(M) = \dim H^1(V_0).$$

(ii) Para $1 < k < d-1$, obtemos:

$$0 \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow 0 \oplus H^k(V_0) \longrightarrow 0$$

Logo:

$$\dim H^k(M) = \dim H^k(V_0).$$

(iii) Os últimos termos não-nulos da sucessão são:

$$0 \longrightarrow H^{d-1}(M) \longrightarrow 0 \oplus H^{d-1}(V_0) \longrightarrow H^{d-1}(U_0 \cap V_0) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^d(M) \longrightarrow 0 \oplus H^d(V_0) \longrightarrow 0$$

Como $\dim H^{d-1}(U_0 \cap V_0) = r_d$, esta sucessão fornece:

$$\dim H^{d-1}(M) - \dim H^{d-1}(V_0) + \dim H^d(V_0) - \dim H^d(M) = -r_d.$$

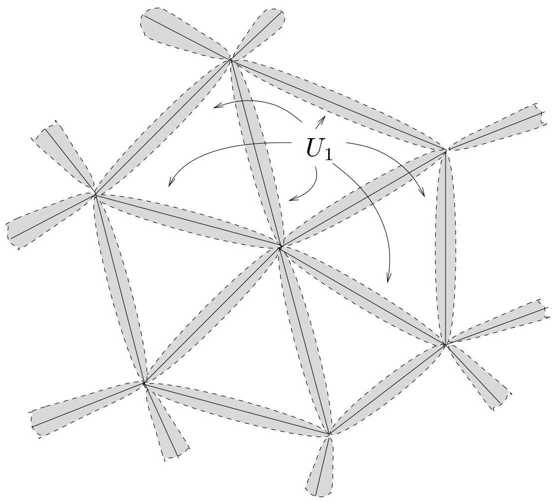
Se $d = 2$, obtemos os mesmos resultados sem necessidade de dividir a sucessão por troços. Assim, concluímos que:

$$\begin{aligned}\chi(M) &= \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \dim H^i(M) \\ &= \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \dim H^i(V_0) + (-1)^d r_d = \chi(V_0) + (-1)^d r_d.\end{aligned}$$

O que demonstra (18.1) se $k = 0$.

Para demonstrar (18.1) no caso $k = 1$, procedemos da seguinte forma: para cada face de dimensão 1, escolhemos vizinhanças abertas $U_{1,1}, \ldots, U_{1,r_1}$ das (1-faces)-(0-faces), que são disjuntas e difeomorfas a $(\mathrm{int}\,\Delta^1) \times B_1^{d-1}$, e definimos o aberto:

$$U_1 = \bigcup_{i=1}^{r_1} U_{1,i}.$$



Temos que $V_0 = U_1 \cup V_1$. Vemos, agora, que U_1 é a união de r_1 abertos contrácteis, enquanto que $U_1 \cap V_1$ possui o mesmo tipo de homotopia que a união disjunta de $(d-2)$-esferas. De forma inteiramente análoga ao caso $k = 0$, utilizando a sucessão de Mayer-Vietoris, mostra-se que

$$\chi(V_0) = \chi(V_1) + (-1)^{d-1} r_1.$$

Em geral, para cada k, escolhemos vizinhanças abertas $U_{k,1},\dots,U_{k,r_k}$ das $\{k\text{-faces}\}-\{(k-1)\text{-faces}\}$, que são disjuntas e difeomorfas a $(\text{int }\Delta^k)\times B_1^{d-k}$, e definimos o aberto:

$$U_k=\bigcup_{i=1}^{r_k}U_{k,i}.$$

Temos que $V_k=U_k\cup V_k$, com U_k a união de r_k abertos contrácteis, enquanto que $U_k\cap V_k$ possui o mesmo tipo de homotopia que a união disjunta de $(d-k-1)$-esferas. Utilizando a sucessão de Mayer-Vietoris, verifica-se que

$$\chi(V_{k-1})=\chi(V_k)+(-1)^{d-k}r_k.$$

Isto mostra que (18.1) é válida. $\square$

Como vimos num exercício da Lição 16, o produto exterior induz um produto ao nível de cohomologia:

$$\cup: H^k(M)\times H^l(M)\to H^{k+l}(M),\ \ [\omega]\cup[\eta]\equiv[\omega\wedge\eta].$$

Se η tem suporte compacto, então $\omega\wedge\eta$ também tem suporte compacto. Logo, temos igualmente um produto:

$$\cup: H^k(M)\times H^l_c(M)\to H^{k+l}_c(M).$$

Pelo Teorema de Stokes, a integração de formas diferenciais desce ao nível da cohomologia (tal como no caso do Teorema de de Rham). Assim, se M é uma variedade orientada de dimensão d, temos uma forma bilinear

$$H^k(M)\times H^{d-k}_c(M)\to\mathbb{R},\ \ ([\omega],[\eta])\mapsto\int_M\omega\wedge\eta. \tag{18.2}$$

Teorema 18.6 (Dualidade de Poincaré)**.** *Seja M uma variedade orientada de tipo finito. A forma bilinear (18.2) é não degenerada. Em particular:*

$$H^k(M)\simeq H^{d-k}_c(M)^*.$$

Para a demonstração, precisamos do seguinte resultado de álgebra homológica:

Lema 18.7 (Lema dos Cinco)**.** *Considere um diagrama comutativo de homomorfismos de espaços vectoriais:*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\varepsilon"'] \\
A' \arrow[r, "f_1'"] & B' \arrow[r, "f_2'"] & C' \arrow[r, "f_3'"] & D' \arrow[r, "f_4'"] & E'
\end{tikzcd}$$

onde as linhas são exactas. Se α, β, δ e ε são isomorfismos, então γ também é um isomorfismo.

A demonstração (elementar) consiste em passear pelo diagrama e é deixada como exercício.

Demonstração. Observe que a forma bilinear induz sempre um homomorfismo $H^k(M)\to H^{d-k}_c(M)^*$. Se U e V são abertos, deixamos como exercício mostrar que as sucessões de Mayer-Vietoris para $\Omega^\bullet$ e para $\Omega_c^\bullet$, determinam um diagrama de sucessões exactas longas:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H^k(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(U)\oplus H^k(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
\arrow[r] & H_c^{d-k}(U\cup V)^* \arrow[r] & H_c^{d-k}(U)^*\oplus H_c^{d-k}(V)^* \arrow[r] & H_c^{d-k}(U\cap V)^* \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

que é comutativo a menos de sinais. Isto significa, por exemplo, que

$$\int_{U\cap V}\omega\wedge \mathrm{d}^*\theta = \pm\int_{U\cup V}\mathrm{d}^*\omega\wedge\theta.$$

Aplicando o Lema dos Cinco a este diagrama, vemos que, se a dualidade de Poincaré se verifica para U, V e $U\cap V$, então também se verifica para $U\cup V$.

Seja então M uma variedade com uma boa cobertura finita. Mostramos a dualidade de Poincaré por indução na cardinalidade da cobertura:

- Se $M\simeq\mathbb{R}^d$, pelos Lemas de Poincaré, temos:

  $$H^k(\mathbb{R}^d)=\begin{cases}\mathbb{R} & \text{se } k=0,\\ \\ 0 & \text{se } k\neq 0.\end{cases}\qquad H_c^k(\mathbb{R}^d)=\begin{cases}\mathbb{R} & \text{se } k=d,\\ \\ 0 & \text{se } k\neq d.\end{cases}$$

  Daqui, segue-se que a forma bilinear é não-degenerada.
- Suponha-se que a dualidade de Poincaré se verifica para coberturas de cardinalidade menor ou igual a p. Seja M uma variedade que admite uma boa cobertura $\{U_1,\dots,U_{p+1}\}$ com $p+1$ elementos. Observe que os abertos:

  U_{p+1},
  $U_1\cup\cdots\cup U_p$, e
  $(U_1\cup\cdots\cup U_p)\cap U_{p+1}=(U_1\cap U_{p+1})\cup\cdots\cup(U_p\cap U_{p+1})$,

  satisfazem a dualidade de Poincaré, pois todos possuem uma boa cobertura com, no máximo, p abertos. Assim, a dualidade de Poincaré verifica-se para $M=U_1\cup\cdots\cup U_{p+1}$.

$\square$

Para uma variedade compacta, temos que $H_c(M)=H(M)$. Logo, se M é compacta e orientada, a dualidade de Poincaré afirma que:

$$H^k(M)\simeq H^{d-k}(M).$$

Um corolário imediato é:

Corolário 18.8. *Se M é uma variedade compacta orientada, de dimensão ímpar então:*

$$\chi(M)=0.$$

Observação 18.9. A dualidade de Poincaré ainda é válida para variedades sem boas coberturas finitas. No entanto, se a cohomologia não tem dimensão finita, é preciso ter um pouco de cuidado com a forma como se enuncia:

o que se mostra é que, para qualquer variedade orientada M, é válido o isomorfismo

$$H^k(M) \simeq (H_c^{d-k}(M))^*.$$

A equivalência dual $H_c^{d-k}(M) \simeq H^k(M)^*$, em geral, *não é* válida. Isto deve-se a que o dual de uma soma directa é um produto directo, mas o dual de um produto directo não é uma soma directa. Um exemplo é dado nos exercícios desta lição.

Por causa desta observação, no corolário seguinte omitimos a hipótese de existência de uma boa cobertura finita.

Corolário 18.10. *Seja M uma variedade conexa, orientável, de dimensão d. Então*

(i) $H^d(M) \simeq \mathbb{R}$ *se M é compacta;*
(ii) $H^d(M) \simeq 0$ *se M não é compacta;*
(iii) $H_c^d(M) \simeq \mathbb{R}$.

Deixamos como exercício verificar que, se M é uma variedade conexa, de dimensão d, não orientável, então $H^d(M) = H_c^d(M) = 0$.

Vemos, pois, que uma variedade conexa é orientável sse $H_c^d(M) = \mathbb{R}$. Note-se, ainda, que uma escolha de uma orientação μ determina um gerador de $H_c^d(M)$. De facto, nesse caso, integração fornece uma escolha canónica para o isomorfismo $H_c^d(M) \simeq \mathbb{R}$:

$$H_c^d(M) \to \mathbb{R}, \ [\omega] \mapsto \int_M \omega.$$

Na realidade, este isomorfismo não é mais do que dualidade de Poincaré, pois sendo M conexa, $H^0(M)$ é o espaço as funções constantes em M. Frequentemente, utilizamos a mesma letra μ para representar a orientação e a classe $\mu \in H_c^d(M)$ que corresponde à função constante 1.

Assim, seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades compactas, conexas, orientadas, com $\dim M = \dim N = d$. Os isomorfismos canónicos $H_c^d(M) \simeq \mathbb{R}$ e $H_c^d(N) \simeq \mathbb{R}$ permitem representar a aplicação induzida

$$\Phi^* : H_c^d(N) \to H_c^d(M)$$

por um número real a que se chama o *grau da aplicação*. Por outras palavras:

Definição 18.11. *Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação própria entre duas variedades conexas, orientadas, com* $\dim M = \dim N = d$. *O* ***grau*** *de Φ é o único número real* $\deg \Phi$ *que satisfaz:*

$$\int_M \Phi^*\omega = \deg \Phi \int_N \omega,$$

para toda a forma diferencial $\omega \in \Omega_c^d(N)$.

Se μ_M e μ_N são as orientações de M e N, então o grau da aplicação é dado por:

$$\Phi^*\mu_N = (\deg \Phi)\mu_M,$$

onde, seguindo a convenção acima, μ_M e μ_N também representam os geradores de $H_c^d(M)$ e $H_c^d(N)$ determinados pelas orientações.

No que se segue, por uma questão de simplicidade, vamos considerar apenas variedades compactas. A generalização destes resultados ao caso não compacto é deixada ao cuidado do leitor. O nosso principal objectivo é dar uma caracterização geométrica do grau de uma aplicação.

Começamos com a seguinte proposição:

Proposição 18.12. *Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades compactas, conexas, orientadas, com $\dim M = \dim N = d$. Se Φ não é sobrejectiva então $\deg \Phi = 0$.*

Demonstração. Como $\Phi(M)$ é fechado, $U = N - \Phi(M)$ é um aberto não vazio. Seja $\omega \in \Omega^d(N)$ uma forma com suporte em U e tal que $\int_N \omega \neq 0$. Então:

$$0 = \int_M \Phi^* \omega = \deg \Phi \int_N \omega,$$

logo $\deg \Phi = 0$. □

A interpretação geométrica para o grau de uma aplicação, a que aludimos acima, é dada pela resultado seguinte. Ela mostra, por exemplo, que o grau de uma aplicação é sempre um número inteiro, um facto que não é nada óbvio da definição de grau.

Teorema 18.13. *Seja $\Phi : M \to N$ uma aplicação entre variedades compactas, conexas, orientadas, de dimensão d. Seja $q \in N$ um valor regular de Φ, e para cada $p \in \Phi^{-1}(q)$ defina-se*

$$\operatorname{sgn}_p \Phi \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } \mathrm{d}_p\Phi : T_pM \to T_qN \text{ preserva orientações,} \\ \\ -1 & \text{se } \mathrm{d}_p\Phi : T_pM \to T_qN \text{ inverte orientações.} \end{cases}$$

Então[9]*:*

$$\deg \Phi = \sum_{p \in \Phi^{-1}(q)} \operatorname{sgn}_p \Phi.$$

Em particular, o grau é sempre um número inteiro.

Demonstração. Seja q um valor regular de Φ. O conjunto $\Phi^{-1}(q)$ é discreto, e como M é compacto, tem de ser finito: $\Phi^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_N\}$. Precisamos do seguinte lema:

Lema 18.14. *Existe uma vizinhança V de q e vizinhanças disjuntas $U_1, \dots, U_n$ de $p_1, \dots, p_N$ tais que*

$$\Phi^{-1}(V) = U_1 \cup \cdots \cup U_N.$$

Sejam $O_1, \dots, O_N$ vizinhanças disjuntas de $p_1, \dots, p_N$, e W uma vizinhança compacta de q. O conjunto $W' \subset M$ definido por:

$$W' = \Phi^{-1}(W) - (O_1 \cup \cdots \cup O_N),$$

é um conjunto compacto. Assim, $\Phi(W')$ é um conjunto fechado que não contém q. Existe, pois, um aberto $V \subset W - \Phi(W')$ contendo q e temos que $\Phi^{-1}(V) \subset O_1 \cup \cdots \cup O_N$. Se tomarmos $U_i = O_i \cap \Phi^{-1}(V)$, vemos que o lema é satisfeito.

[9] Se $\Phi^{-1}(q)$ é vazio então, por definição, a soma vale zero.

Fixemos V e $U_1, \ldots, U_N$, como no lema. Como cada p_i é regular, podemos, ainda, assumir que V é um domínio de coordenadas $(y^1, \ldots, y^d)$ em N e que os U_i's são domínios de coordenadas em M, tais que $\Phi|_{U_i}$ é um difeomorfismo.

Escolha-se $\omega \in \Omega^d(N)$ da forma:

$$\omega = f \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^d,$$

onde $f \geq 0$ é uma função com $\operatorname{supp} f \subset V$. É claro que

$$\operatorname{supp} \Phi^*\omega \subset U_1 \cup \cdots \cup U_N,$$

de forma que:

$$\int_M \Phi^*\omega = \sum_{i=1}^N \int_{U_i} \Phi^*\omega.$$

Como $\Phi|_{U_i}$ é um difeomorfismo, a fórmula de mudança de variável fornece:

$$\int_{U_i} \Phi^*\omega = \pm \int_V \omega = \pm \int_N \omega,$$

onde o sinal é positivo se $\Phi|_{U_i}$ preserva as orientações e é negativo caso contrário. Como $\Phi|_{U_i}$ preserva orientações se $\operatorname{sgn}_{p_i} \Phi > 0$ e troca orientações se $\operatorname{sgn}_{p_i} \Phi < 0$, concluímos que

$$\int_M \Phi^*\omega = \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}_{p_i} \Phi \int_N \omega,$$

o que demonstra o resultado. □

Note que os graus de aplicações homotópicas coincidem. Este facto pode ser utilizado com grande eficácia, como ilustramos através de um exemplo.

Exemplo 18.15.
Consideremos a aplicação antipodal $\Phi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ dada por $\Phi(p) = -p$. Para a orientação canónica de $\mathbb{S}^d$ definida pela forma

$$\omega = \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^{i-1} x^i \mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{d+1}.$$

temos que Φ preserva ou troca orientações dependendo se n é ímpar ou é par. Como $\Phi^{-1}(q)$ contém apenas um ponto, concluímos que

$$\deg \Phi = (-1)^{d-1}.$$

Isto também se segue directamente a partir da definição, pois $\int_{\mathbb{S}^d} \omega \neq 0$, e

$$\int_{\mathbb{S}^d} \Phi^*\omega = (-1)^{d-1} \int_{\mathbb{S}^d} \omega.$$

Vejamos que isto implica que numa esfera de dimensão par todo o campo vectorial se anula nalgum ponto. De facto, se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{2k})$ é um campo vectorial que não se anula, então, para cada $p \in \mathbb{S}^{2k}$, existe uma única semi-circunferência γ_p que une p a $-p$ e que tem vector tangente $X(p)$. Assim, a aplicação $H : \mathbb{S}^{2k} \times [0,1] \to \mathbb{S}^{2k}$ dada por

$$H(p,t) = \gamma_p(t),$$

é uma homotopia entre Φ e a aplicação identidade. Concluímos que:

$$-1 = \deg \Phi = \deg \mathrm{id} = 1,$$

uma contradição.

Por outro lado, para a esfera $\mathbb{S}^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k}$*, o campo vectorial* X *definido por:*

$$X(x_1, \ldots, x_{2k}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2k}, -x_{2k-1}),$$

é um campo vectorial que não se anula.

Como aplicação destes resultados, vamos estudar o índice de um zero de um campo vectorial X numa variedade M. Começamos com o caso de um campo vectorial num aberto $U \subset \mathbb{R}^d$, i.e., uma aplicação $X : U \to \mathbb{R}^d$, e suponhamos que $x_0 \in U$ é um zero isolado de X. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{B}_\varepsilon(x_0) \subset U$ (a bola fechada de raio ε centrada em x_0) não contém outro zero de X. Tomando $\mathbb{S}^{d-1}_\varepsilon$, a esfera de raio ε centrada em x_0, temos a *aplicação de Gauss* $G : \mathbb{S}^{d-1}_\varepsilon \to \mathbb{S}^{d-1}$, que é definida por:

$$G(x) = \frac{X_x}{\|X_x\|}.$$

Definimos o **índice** de X em x_0 com sendo o grau da aplicação de Gauss:

$$\operatorname{ind}_{x_0} X \equiv \deg G,$$

onde em cada esfera tomamos a orientação canónica. O leitor deverá verificar que esta definição é independente de ε.

O índice é invariante por difeomorfismos:

Lema 18.16. *Se* X *e* X' *são campos vectoriais em* $U, U' \subset \mathbb{R}^d$ *e* $\Phi : U \to U'$ *é um difeomorfismo, tal que* X *é* Φ*-relacionado com* X'*. Se* x_0 *é um zero isolado de* X*, então*

$$\operatorname{ind}_{x_0} X = \operatorname{ind}_{\Phi(x_0)} X'.$$

Demonstração. Podemos assumir que $\Phi(x_0) = x_0 = 0$ e que U é convexo.

Suponhamos, primeiro, que Φ preserva orientações. Então, a aplicação

$$H(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{t}\Phi(tx), & \text{se } t > 0, \\ \\ \mathrm{d}_0\Phi(x), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

é uma homotopia entre $\mathrm{d}_0\Phi$ e Φ, por difeomorfismos que fixam a origem. Como $\mathrm{d}_0\Phi$ é homotópica à identidade, por difeomorfismos que fixam a origem, vemos que existe uma homotopia, por difeomorfismos que fixam a origem, entre Φ e identidade. Assim, concluímos que as aplicações de Gauss de X e de X' são homotópicas. Logo, estas aplicações possuem o mesmo grau.

Para o caso não-orientável, basta agora considerar o caso em que Φ é uma reflexão. Neste caso, os campos X e X' estão relacionados por:

$$X' = \Phi \circ X \circ \Phi^{-1}.$$

As funções de Gauss de X e X' satisfazem a mesma relação:

$$G' = \Phi \circ G \circ \Phi^{-1},$$

e portanto os seus graus coincidem, uma vez o grau da composição é o produto dos graus). $\square$

Assim, se M é uma variedade e $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial, definimos o **índice de** X num zero isolado $p_0 \in M$, por:

$$\operatorname{ind}_{p_0} X \equiv \operatorname{ind}_0 (\phi_* X)|_{\phi(U)},$$

onde (U, ϕ) é um sistema de coordenadas centrado em p_0. Pelo lema, esta definição é independente do sistema de coordenadas utilizado. Veremos na próxima série de lições o *Teorema de Poincaré-Hopf* que afirma que se X é um campo vectorial numa variedade compacta M, com um número finito de zeros $\{p_1, \dots, p_N\}$. Então:

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}_{p_i} X.$$

Por enquanto, limitamo-nos ao problema de calcular o índice de um campo vectorial.

Para isso, seja X um campo vectorial numa variedade M e $p_0 \in M$ um zero de X. A secção zero $Z \subset TM$ e a fibra $T_{p_0}M \subset TM$ intersectam-se transversalmente em $0 \in T_{p_0}M$:

$$T_0(TM) = T_{p_0} Z \oplus T_{p_0}(T_{p_0}M) \simeq T_{p_0}M \oplus T_{p_0}M.$$

Para esta decomposição, o diferencial $\mathrm{d}_{p_0}X : T_{p_0}M \to T_0(TM)$ tem primeira componente a identidade, pois X é uma secção. A segunda componente determina uma aplicação $T_{p_0}M \to T_{p_0}M$ que vamos, também, designar por $\mathrm{d}_{p_0}X$. Um zero p_0 de um campo vectorial X diz-se **não-degenerado** se a aplicação $\mathrm{d}_{p_0}X : T_{p_0}M \to T_{p_0}M$ é não-degenerada.

Proposição 18.17. *Seja $p_0 \in M$ um zero não-degenerado de um campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então p_0 é um zero isolado e*

$$\operatorname{ind}_{p_0} X = \begin{cases} +1, & \text{se } \det \mathrm{d}_{p_0}X > 0, \\ \\ -1, & \text{se } \det \mathrm{d}_{p_0}X < 0. \end{cases}$$

Demonstração. Se escolhermos coordenadas locais (U, ϕ) centradas em p_0, o Teorema da Função Inversa garante que o campo vectorial $(\phi_* X)|_\phi(U)$ determina um difeomorfismo local, e portanto tem como aplicação de Gauss $G : \mathbb{S}^{d-1}_\varepsilon \to \mathbb{S}^{d-1}$ um difeomorfismo. Este difeomorfismo preserva (inverte) orientações sse $\det \mathrm{d}_{p_0}X > 0$ (respectivamente, < 0), logo o resultado segue-se do Teorema 18.13. □

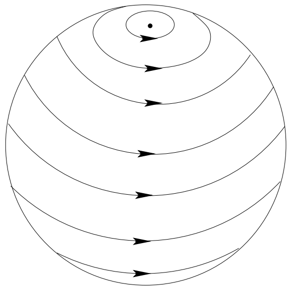
Exemplo 18.18.
Em $\mathbb{R}^3$, com coordenadas (x, y, z), temos o campo vectorial

$$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Este campo vectorial é tangente à esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e por isso define um campo vectorial em $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^2)$, que possui dois zeros: o pólo norte p_N e o pólo sul p_S.

A aplicação $\phi : (x, y, z) \mapsto (x, y)$ é um sistema de coordenadas locais para $\mathbb{S}^2$ na vizinhança de p_N (e também de p_S), e temos que:

$$\phi_* X = -v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}.$$



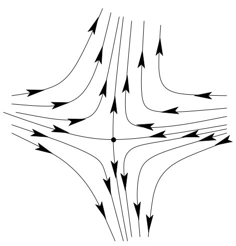
onde (u,v) são as coordenadas em $\mathbb{R}^2$. Como a aplicação $(u,v) \mapsto (-v,u)$ tem diferencial

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

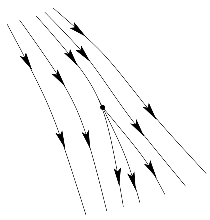
concluímos que p_N e p_S são zeros não-degenerados e que:

$$\operatorname{ind}_{p_N} X = \operatorname{ind}_{p_S} X = 1.$$

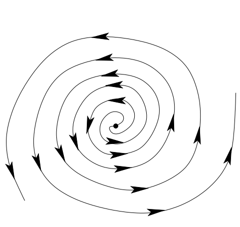
Em casos simples, é fácil determinar o índice de um campo vectorial a partir do seu retrato de fases, mesmo se os zeros são degenerados. A figura seguinte ilustra alguns exemplos de campos vectoriais planares, com um zero e os respectivos índices. O leitor deverá verificar que os graus das aplicações de Gauss são, de facto, os inteiros que constam na figura.



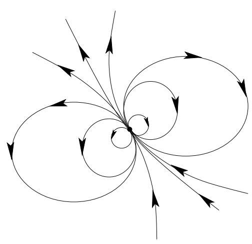
$\operatorname{ind}_{p_0} X = -1$



$\operatorname{ind}_{p_0} X = 0$



$\operatorname{ind}_{p_0} X = 1$



$\operatorname{ind}_{p_0} X = 2$

Exercícios.

1. Demonstre o Lema dos Cinco.
2. Calcule $H^k(M)$ e $H^k_c(M)$ para as seguintes variedades:

(a) Banda de Möbius;
(b) Garrafa de Klein;
(c) $M = \mathbb{T}^d$;
(Resposta: $\dim H^k(\mathbb{T}^d) = \binom{d}{k}$.)
(d) $M = \mathbb{P}^d$;
(Resposta: $\dim H^k(\mathbb{P}^d) = 1$ se $k = 0$ ou $k = d$ com d ímpar, e 0 caso contrário.)
(e) $M = \mathbb{P}^d(\mathbb{C})$;
(Resposta: $\dim H^{2k}(\mathbb{P}^d(\mathbb{C})) = 1$ se $2k \leq n$, e 0 caso contrário.)

3. Seja M uma variedade diferenciável não orientável de dimensão d, e $p \in M$. Recorde que duas bases de T_pM se dizem ser **equivalentes** se a respectiva matriz de mudança de base possui determinante positivo. Seja $\mathcal{O}_p$ o conjunto das (duas) classes de equivalência de bases de T_pM (as quais se designam por **orientações** de T_pM), e defina-se

$$\widetilde{M} = \{(p, O_p) : \ p \in M, O_p \in \mathcal{O}_p\}.$$

Dada uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^d \to M$, definimos a aplicação $\widetilde{\varphi} : U \to \widetilde{M}$ através de

$$\widetilde{\varphi}(x^1, \ldots, x^d) = \left(\varphi(x^1, \ldots, x^d), \left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^d}\right]\right).$$

(a) Mostre que $\widetilde{M}$ é uma variedade diferenciável **orientável** de dimensão d.
(b) Mostre que a aplicação $\pi : \widetilde{M} \to M$ definida por $\pi(p, O_p) = p$ é uma aplicação de revestimento, *i.e.*, mostre que para cada $p \in M$ existe um aberto $U \ni p$ tal que $\pi^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$, onde V_1, V_2 são abertos disjuntos e $\pi|_{V_i}$ é um difeomorfismo ($i = 1, 2$). ($\widetilde{M}$ diz-se então o **revestimento duplo orientável** de M).
(c) Seja $\Phi : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ a aplicação definida por $\Phi(p, O_p) = (p, -O_p)$, onde $-O_p$ designa a orientação de T_pM contrária a O_p. Mostre que Φ é um difeomorfismo que inverte a orientação e satisfaz $\pi \circ \Phi = \pi$, $\Phi \circ \Phi = \mathrm{id}$.
(d) Mostre que $\widetilde{\omega} \in \Omega^k(\widetilde{M})$ satisfaz $\widetilde{\omega} = \pi^*\omega$ para algum $\omega \in \Omega^k(M)$ *sse* $\Phi^*\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}$.
(e) Mostre que $H^d(M) = H^d_c(M) = 0$.

4. Seja M uma variedade conexa, de dimensão d, não orientável. Mostre que $H^d_c(M) = 0$, da seguinte forma:
(a) Mostre que basta ver que são exactas as formas $\omega \in \Omega^d_c(M)$ com $\operatorname{supp} \omega \subset U$, onde U é um aberto difeomorfo a $\mathbb{R}^d$.
(b) Se ω é como em (a), e $\int_U \omega = 0$, então ω é exacta.
(c) Se ω é como em (a), mas $\int_U \omega > 0$, então ω também é exacta.

Sugestão: Construa uma cadeia de abertos $U_1, \ldots, U_k$, com $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$ e $U_1 = U_k = U$, que são domínios de coordenadas $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^d$, com $\phi_i \circ \phi_{i+1}^{-1}$, para $i = 1, \ldots, k-1$, positivos e $\phi_{k-1} \circ \phi_k^{-1}$ negativo. Construa, também, formas diferenciais $\omega_1 = \omega, \omega_2 \ldots, \omega_k = -\omega$ de grau d com suporte $\operatorname{supp} \omega_i \subset U_i$ compacto, e que satisfazem

$$c_i = \frac{\int_{U_i} \omega_i}{\int_{U_i} \omega_{i-1}} > 0.$$

Finalmente, mostre que existem formas de suporte compacto η_i tais que:

$$\omega_i = c_i \omega_{i-1} + \mathrm{d}\eta_i,$$

e conclua que ω é exacta.

5. Sejam $M_1, M_2, \ldots,$ variedades de tipo finito de dimensão d, e considere a união disjunta dos M_i:

$$M = \bigcup_{i=1}^{+\infty} M_i.$$

Mostre que:

(a) A cohomologia de M é o produto directo:

$$H^k(M) = \prod_{i=1}^{+\infty} H^k(M_i);$$

(b) A cohomologia de M com suporte compacto é a soma directa:

$$H_c^k(M) = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} H_c^k(M_i);$$

Conclua que existe um isomorfismo:

$$H^k(M) \simeq (H_c^{d-k}(M))^*,$$

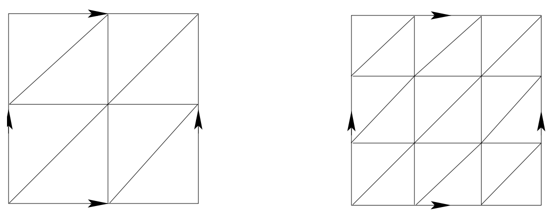
mas que $H_c^{d-k}(M)$ não é isomorfa $H^k(M)^*$.

6. Mostre que, na demonstração da dualidade de Poincaré, o diagrama de sucessões exactas longas:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^k(U \cup V) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(U) \oplus H^k(V) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r] & H_c^{d-k}(U \cup V)^* \arrow[r] & H_c^{d-k}(U)^* \oplus H_c^{d-k}(V)^* \arrow[r] & H_c^{d-k}(U \cap V)^* \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

é comutativo a menos de sinais.

7. Considere as seguintes subdivisões do quadrado $[0,1] \times [0,1]$:



(a) Verifique que apenas uma destas subdivisões induz uma triangulação do toro $\mathbb{T}^2$;

(b) Calcule r_0, r_1 e r_2 para essa triangulação.

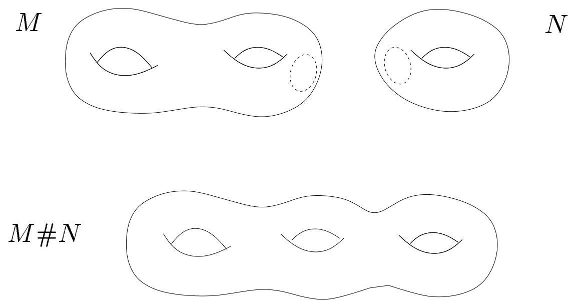
8. Sejam M e N variedades conexas de dimensão d. Seja $M\#N$ a soma conexa de M e N, i.e., a variedade obtida por colagem de M com N ao longo do bordo de abertos difeomorfos à bola $\{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| < 1\}$:

Calcule a característica de Euler de $M\#N$ em termos das características de Euler de M e de N.

9. Mostre que:

(a) $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ é difeomorfo a $\mathbb{S}^2$.

(b) A aplicação $\Phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dada por $\Phi([z,w]) = [z^n, w^n]$ é diferenciável para todo o $n \in \mathbb{N}$.



(c) $\deg \Phi = n$.

10. Seja $\Phi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ um difeomorfismo. Mostre que:
  (a) Se Φ não tem pontos fixos então Φ é homotópica à aplicação antipodal.
  (b) Se d é par e Φ preserva orientações então Φ tem pelo menos um ponto fixo.

11. Mostre que qualquer aplicação $\Phi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{T}^d$ tem grau zero.

12. Mostre que se uma aplicação $\Phi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ pode ser estendida à bola fechada
$$B = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| \leq 1\}$$
como uma aplicação diferenciável $\widetilde{\Phi} : B \to \mathbb{S}^d$ então $\deg \Phi = 0$. Conclua que a aplicação identidade $\mathrm{id} : \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ não pode ser estendida desta forma, e use este facto para provar a seguinte versão do **Teorema do Ponto Fixo de Brower**: toda a aplicação diferenciável $\Psi : B \to B$ tem pelo menos um ponto fixo.

13. Identifique o plano $M = \mathbb{R}^2$ com o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Mostre que a função polinomial $z \mapsto z^k$ define em $\mathbb{R}^2$ um campo vectorial com um zero na origem de índice k.

PARTE IV. **Fibrados**

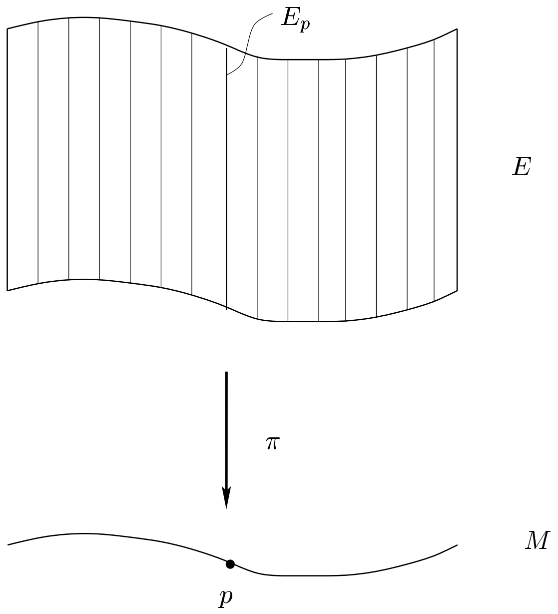
A noção de fibrado tangente foi introduzida na primeira série de lições. Vimos, também, outros exemplos de fibrados, tais como o fibrado cotangente, os fibrado exterior, etc. Até agora, utilizámos este conceito de forma informal e limitada. Acontece que muitos dos invariantes que podemos associar a uma variedade estão intimamente relacionados com o fibrado tangente e, mais geralmente, com fibrados sobre a variedade. É, pois, tempo de formalizar o conceito abstracto de fibrado e estudar de forma sistemática as suas propriedades.

Os conceitos e ideias principais a reter nesta quarta série de lições são:

- Na Lição 19: A noção de *fibrado vectorial*, que abstrai algumas das características do fibrado tangente, e desempenha um papel fulcral em geometria diferencial. As construções básicas com fibrados vectoriais, tais como soma de fibrados, produtos tensoriais, produtos exteriores, etc.
- Na Lição 20: O *pull-back* de fibrados vectoriais e classificação de fibrados vectoriais, que mostra que todo o fibrado vectorial é o pull-back de um *fibrado vectorial universal*.
- Na Lição 21: O *classe de Thom* e a *classe de Euler*, dois invariantes topológicos dos fibrados vectoriais. Para o caso do fibrado tangente, a relação entre a classe de Euler e a característica de Euler. O *Teorema de Poincaré-Hopf*, que exprime a característica de Euler em termos de zeros de campos vectoriais.
- Na Lição 22: As *conexões* em fibrados vectoriais, que permitem diferenciar secções do fibrado ao longo de campos vectoriais da base. A *curvatura* de uma conexão, e a *holonomia* de uma conexão plana.
- Na Lição 23: A *teoria de Chern-Weil* de classes características de fibrados vectoriais reais (*classes de Pontrjagin*) e complexos (*classes de Chern*).
- Na Lição 24: A noção abstracta de fibrado, e as construções básicas com fibrados. Os *fibrado principais* e os seus *fibrados associados*.
- Na Lição 25: A classificação de fibrados principais, conexões em fibrados principais e classes características de fibrados principais.

Lição 19. Fibrados Vectoriais

Um fibrado vectorial é uma colecção $\{E_p\}_{p\in M}$ de espaços vectoriais parametrizados por um espaço M. A união destes espaço vectoriais é um espaço E, e a aplicação $\pi : E \to M$, $\pi(E_p) = p$ deve satisfazer uma condição local de trivialidade. O leitor deverá reconhecer todas estas características no fibrado tangente a uma variedade. Vamos, agora, formalizar este conceito.



Seja $\pi : E \to M$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades diferenciáveis. Uma **carta trivializante** (de dimensão r) para π é um par (U, ϕ), onde $U \subset M$ é um aberto e $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ é um difeomorfismo, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

Neste diagrama, $\pi_1 : U \times \mathbb{R}^r \to U$ designa a projecção no primeiro factor.

Seja $E_p = \pi^{-1}(p)$ a fibra sobre $p \in U$. Definimos um difeomorfismo $\phi^p : E_p \to \mathbb{R}^r$ como sendo a composição:

$$\phi^p : E_p \xrightarrow{\phi} \{p\} \times \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}^r .$$

Assim, se $\mathbf{v} \in E_p$, temos que

$$\phi(\mathbf{v}) = (p, \phi^p(\mathbf{v})).$$

Observe que, como cada ϕ^p é um difeomorfismo, podemos utilizar ϕ^p para transportar a estrutura de espaço vectorial de $\mathbb{R}^r$ para E_p. Dadas duas cartas trivializantes que se intersectam, vamos querer que as estruturas de espaço vectoriais induzidas em cada fibra coincidam. É isso que garante a seguinte definição:

Definição 19.1. *Uma* ***estrutura de fibrado vectorial*** *de rank r numa variedade M é um terno $\xi = (\pi, E, M)$, onde $\pi : E \to M$ é uma aplicação diferenciável, com uma colecção de cartas trivializantes $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ de dimensão r, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma cobertura aberta de M: $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$;
(ii) As cartas são compatíveis: Para quaisquer $\alpha, \beta \in A$ e para todo o $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, as ***funções de transição*** *$g_{\alpha\beta}(p) \equiv \phi^p_\alpha \circ (\phi^p_\beta)^{-1} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ são isomorfismos lineares;*
(iii) A colecção $\mathcal{C}$ é maximal: se (U, ϕ) é uma carta trivializante de dimensão r com a propriedade de que para todo o $\alpha \in A$, as aplicações $\phi^p \circ (\phi^p_\alpha)^{-1}$ e $\phi^p_\alpha \circ (\phi^p)^{-1}$ são isomorfismos lineares, então $(U, \phi) \in \mathcal{C}$.

Ao terno $\xi = (\pi, E, M)$ chamamos um ***fibrado vectorial*** *de rank r.*

Dado um fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$, chamamos a E **espaço total**, a M **espaço base**, e a π **projecção** do fibrado ξ. A uma colecção de cartas que satisfaz (i) e (ii) chamamos um **atlas de fibrado vectorial** ou **trivialização** de ξ. Um atlas de fibrado vectorial define um fibrado vectorial, pois todo o atlas está contido num único atlas maximal. Como já observámos, por (ii), cada fibra E_p possui uma estrutura de espaço vectorial tal que, para toda a carta trivializante (U, ϕ), a aplicação $\phi^p : E_p \to \mathbb{R}^r$ é um isomorfismo linear.

Na definição de fibrado vectorial, todas as aplicações são C^∞. Da mesma forma, podem-se definir fibrados vectoriais sobre variedades C^k, variedades complexas, espaços topológicos, etc. Por outro lado, podemos definir fibrados vectoriais complexos, substituindo $\mathbb{R}^r$ por $\mathbb{C}^r$. Salvo menção em contrário, consideramos sempre fibrados vectoriais reais C^∞.

Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial e $U \subset M$ um conjunto aberto. Uma aplicação $s : U \to E$ diz-se uma **secção** sobre U se $\pi \circ s$ é a identidade em U. As secções sobre U formam um espaço vectorial real que designaremos por $\Gamma_U(E)$. Se $\operatorname{rank} \xi = r$, uma colecção $s_1, \dots, s_r$ de secções sobre U diz-se um **referencial** em U se, para todo o $p \in U$, as secções $\{s_1(p), \dots, s_r(p)\}$ formam uma base para E_p. No caso das **secções globais** de E, $U = M$ e escrevemos $\Gamma(E)$ em vez de $\Gamma_M(E)$.

Definição 19.2. *Sejam $\xi_1 = (\pi_1, E_1, M_1)$ e $\xi_2 = (\pi_2, E_2, M_2)$ dois fibrados vectoriais. Um* ***morfismo de fibrados vectoriais*** *é uma aplicação diferenciável $\Psi : E_1 \to E_2$ que transforma fibras de ξ_1 linearmente em fibras de ξ_2, i.e., Ψ cobre uma aplicação diferenciável $\psi : M_1 \to M_2$:*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & E_2 \arrow[d, "\pi_2"'] \\ M_1 \arrow[r, "\psi"] & M_2 \end{tikzcd}$$

e, para cada $p \in M_1$, a aplicação de fibras

$$\Psi^p \equiv \Psi|_{(E_1)_p} : (E_1)_p \to (E_2)_{\psi(p)}$$

é uma transformação linear.

Desta forma, obtemos uma categoria de fibrados vectoriais. Muitas vezes, estamos interessados em fibrados vectoriais sobre a *mesma* base, e em morfismos sobre a identidade (i.e., a aplicação $\psi : M \to M$ é a identidade). Note que estes também formam uma categoria. Vamos dizer que dois fibrados vectoriais $\xi_1 = (\pi_1, E_1, M_1)$ e $\xi_2 = (\pi_2, E_2, M_2)$ são:

- **equivalentes** se existirem morfismos $\Psi : E_1 \to E_2$ e $\Psi' : E_2 \to E_1$ que são inversos um do outro (i.e., um isomorfismo na categoria dos fibrados vectoriais). Assim, Ψ cobre um difeomorfismo $\psi : M_1 \to M_2$ e cada aplicação de fibras $\Psi^p : (E_1)_p \to (E_2)_{\psi(p)}$ é um isomorfismo linear.
- **isomorfos** se $M_1 = M_2 = M$ e existirem morfismos $\Psi : E_1 \to E_2$ e $\Psi' : E_2 \to E_1$, que cobrem a identidade e que são inversos um do outro (i.e., um isomorfismo na subcategoria dos fibrados com a mesma base). Neste caso, Ψ cobre a identidade $\psi = \mathrm{id}_M$ e cada aplicação de fibra $\Psi^p : (E_1)_p \to (E_2)_p$ é um isomorfismo linear.

Exemplos 19.3.

1. *Para uma variedade M, temos os fibrados vectoriais TM, T^*M e $\wedge^k(T^*M)$. As secções deste fibrados são os campos vectoriais e as formas diferenciais, que estudámos anteriormente. Se $\Psi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, então o seu diferencial $\mathrm{d}\Psi : TM \to TN$ é um morfismo de fibrados vectoriais (note, no entanto, que as transpostas $(\mathrm{d}_x\Phi)^*$, em geral,* não formam *um morfismo de fibrados vectoriais).*

2. *Para qualquer variedade M chama-se **fibrado vectorial trivial** de rank r sobre M ao fibrado vectorial $\varepsilon^r_M = (\pi, M \times \mathbb{R}^r, M)$, onde $\pi : M \times \mathbb{R}^r \to M$ é a projecção no primeiro factor. Note que $\Gamma(\varepsilon^r_M) = C^\infty(M; \mathbb{R}^r)$. Em geral, um fibrado vectorial ξ sobre M de rank r diz-se trivial se é isomorfo a ε^r_M. Deixamos como exercício verificar que um fibrado vectorial é trivial sse possui um referencial global. Uma **variedade paralelizável** é uma variedade M para a qual TM é um fibrado vectorial trivial. Por exemplo, qualquer grupo de Lie G é paralelizável, mas a esfera $\mathbb{S}^2$ não é paralelizável.*

3. *Uma distribuição D, r-dimensional, numa variedade M, define um fibrado vectorial sobre M de rank r. As fibras são os subespaços $D_p \subset T_pM$. O leitor deverá verificar a condição de trivialidade local. Uma secção deste fibrado é um campo vectorial tangente à distribuição.*

4. *A um fibrado vectorial com rank 1 chama-se um **fibrado de linhas**. Por exemplo, um campo vectorial não nulo define um fibrado linhas, que é sempre trivial (porquê?). Mais geralmente, uma distribuição de dimensão 1 define um fibrado de linhas que é trivial sse for a distribuição é gerada por um campo vectorial global.*

   Um exemplo muito importante de fibrado de linhas é o seguinte fibrado vectorial sobre o espaço projectivo $\mathbb{P}^{d-1}$. O espaço total é a variedade:

   $$E = \{([x], \mathbf{v}) \in \mathbb{P}^{d-1} \times \mathbb{R}^d : \mathbf{v} = \lambda x, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

   A projecção $\pi : E \to \mathbb{P}^{d-1}$ é a aplicação $\pi([x], \mathbf{v}) = [x]$. Para verificar a trivialidade local, seja $V \subset \mathbb{S}^{d-1}$ um aberto tal que se $x \in V$ então $-x \notin V$. Designe por $U = \{[x] : x \in V\} \subset \mathbb{P}^{d-1}$ o aberto correspondente no espaço projectivo. A aplicação definida por:

   $$\psi : U \times \mathbb{R} \to \pi^{-1}(U), \quad \psi([x], t) = ([x], tx), \forall x \in V$$

é um difeomorfismo e a sua inversa $\phi = \psi^{-1}$ define um carta trivializante sobre U. A família de todas as cartas (U, ϕ) deste tipo formam um atlas de fibrado vectorial sobre $\mathbb{P}^d$. A este fibrado vectorial chama-se o ***fibrado de linhas canónico*** *sobre $\mathbb{P}^{d-1}$ e designa-se por γ_d^1.*

Os fibrados vectoriais podem ser descritos pelas suas funções de transição. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r. Se (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) são cartas trivializantes, designe por $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(n)$ a função de transição

$$p \mapsto g_{\alpha\beta}(p) \equiv \phi_\alpha^p \circ (\phi_\beta^p)^{-1}.$$

Assim, temos que:

$$\phi_\alpha \circ (\phi_\beta)^{-1}(p, \mathbf{v}) = (p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot \mathbf{v}).$$

Estas aplicações satisfazem a condição:

$$g_{\alpha\beta}(p) g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p), \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma). \tag{19.1}$$

Se $\alpha = \beta = \gamma$, esta condição reduz-se a:

$$g_{\alpha\alpha}(p) = I, \quad (p \in U_\alpha),$$

e quando $\gamma = \alpha$ obtemos:

$$g_{\beta\alpha}(p) = g_{\alpha\beta}(p)^{-1}, \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta).$$

Note que a família $\{g_{\alpha\beta}\}$ depende da escolha de trivialização. No entanto, temos:

Lema 19.4. *Sejam ξ e η fibrados vectoriais sobre M com trivializações $\{\phi_\alpha\}$ e $\{\phi'_\alpha\}$, subordinadas à mesma cobertura aberta de M. Sejam $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ funções de transição correspondentes. Se ξ é isomorfo a η, então existem aplicações $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(n)$ de classe C^∞, tais que:*

$$g'_{\alpha\beta}(p) = \lambda_\alpha(p) \cdot g_{\alpha\beta}(p) \cdot \lambda_\beta^{-1}(p), \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta). \tag{19.2}$$

Demonstração. Seja $\Psi : \xi \to \eta$ um isomorfismo. Para cada U_α, definimos aplicações $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(r)$ de classe C^∞, por:

$$\lambda_\alpha(p) = \phi'^p_\alpha \circ \Psi \circ (\phi_\alpha^p)^{-1}.$$

Se $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, temos:

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta}(p) &= \phi'^p_\alpha \circ (\phi'^p_\beta)^{-1} \\ &= \lambda_\alpha(p) \circ \phi_\alpha^p \circ (\phi_\beta^p)^{-1} \circ (\lambda_\beta(p))^{-1} \\ &= \lambda_\alpha(p) \circ g_{\alpha\beta}(p) \circ \lambda_\beta(p)^{-1}. \end{aligned}$$

□

Seja M uma variedade. Chamamos **cociclo** subordinado a uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M, a uma família de aplicações $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(r)$, de classe C^∞, que satisfazem a relação (19.1). Dois cociclos $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ subordinados à mesma cobertura dizem-se **equivalentes** se existir uma família de aplicações $\lambda_\alpha : U_\alpha \to GL(r)$ de classe C^∞, que satisfazem a relação (19.2).

Vimos acima que (i) uma trivialização de um fibrado vectorial fornece um cociclo, e que (ii) duas trivializações de fibrados vectoriais isomorfos, subordinadas à mesma cobertura, determinam cociclos equivalentes. O recíproco também é verdadeiro:

Proposição 19.5. *Seja M uma variedade. Dado um cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$, subordinado a uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M, existe um fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$, que admite trivializações $\{\phi_\alpha\}$, para as quais as funções de transição são $\{g_{\alpha\beta}\}$. Dois cociclos $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ equivalentes determinam fibrados vectoriais isomorfos.*

Demonstração. Dado um cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$, subordinado a uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M, construímos uma variedade E como o quociente:

$$E = \bigcup_{\alpha\in A} (U_\alpha \times \mathbb{R}^r) \Big/ \sim$$

onde $\sim$ é a relação de equivalência definida por:

$$(p, \mathbf{v}) \sim (q, \mathbf{w}) \text{ sse } \begin{cases} p = q \text{ e} \\ \exists \alpha, \beta \in A : \ g_{\alpha\beta}(p) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w}. \end{cases}$$

A projecção $\pi : E \to M$ é a aplicação óbvia:

$$\pi([p, \mathbf{v}]) = p.$$

É fácil de ver que as funções $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ dadas por:

$$\phi_\alpha([p, \mathbf{v}]) = (p, \mathbf{v}),$$

são cartas trivializantes, e as respectivas funções de transição são precisamente os $\{g_{\alpha\beta}\}$. Designemos este fibrado vectorial por $\xi = (\pi, E, M)$

Seja $\{g'_{\alpha\beta}\}$ é um cociclo equivalente a $\{g_{\alpha\beta}\}$ através de uma família $\{\lambda_\alpha\}$. Se construirmos o respectivo fibrado $\xi' = (\pi', E', M)$, obtemos um isomorfismo de fibrados $\Psi : \xi \to \xi'$, definindo Ψ em cada aberto $\pi^{-1}(U_\alpha)$ por:

$$\Psi([p, \mathbf{v}]) = [p, \lambda_\alpha(p) \cdot \mathbf{v}].$$

Os detalhes são deixados como exercício. □

Existe um princípio geral que afirma: *toda a construção functorial com espaços vectoriais pode ser transposta para fibrados vectoriais.* Embora este princípio possa ser tornado preciso, em vez de prosseguir esta via abstracta, vamos descrever explicitamente as construções mais importantes que envolvem fibrados vectoriais, e que correspondem a construções bem conhecidas com espaço vectoriais.

Antes de mais, todo o fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ pode ser restrito a uma subvariedade $N \subset M$. A **restrição** ξ_N é o fibrado vectorial com espaço total dado por:

$$E_N = \bigcup_{p\in N} E_p,$$

e cuja projecção $\pi_N : E_N \to N$ é a restrição de π a E_N. A restrição é um exemplo de um subfibrado vectorial: um fibrado vectorial $\eta = (\tau, F, N)$ diz-se um **subfibrado vectorial** de um fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$, se F é uma subvariedade mergulhada de E, e a inclusão $F \hookrightarrow E$ é um morfismo de fibrados vectoriais.

Se $\Psi : \eta \to \xi$ é um morfismo de fibrados vectoriais que cobre a identidade, em geral, o seu núcleo e a sua imagem *não são* subfibrados vectoriais. Para evitar este problema, consideramos morfismos de fibrados vectoriais $\Psi : (\pi, E, M) \to (\tau, F, M)$, que cobrem a identidade, e que têm **rank constante** k, i.e., todas as aplicações entre as fibras $\Psi^p : E_p \to F_p$ possuem rank k. Para um morfismo de rank constante podemos, então, definir os seguintes fibrados vectoriais sobre M:

- O **núcleo** de Ψ: é o subfibrado vectorial $\operatorname{Ker}\Psi \subset E$ cujo espaço total é $\{\mathbf{v} \in E : \Psi(\mathbf{v}) = 0\}$;
- A **imagem** de Ψ: é o subfibrado vectorial $\operatorname{Im}\Psi \subset F$ cujo espaço total é $\{\Psi(\mathbf{v}) \in F : \mathbf{v} \in E\}$;
- O **co-núcleo** de Ψ: é o fibrado vectorial $\operatorname{coKer}\Psi$ cujo espaço total é o quociente $F/\sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência dada por $\mathbf{w}_1 \sim \mathbf{w}_2$ sse $\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \Psi(\mathbf{v})$, para algum $\mathbf{v} \in E$.

Note que se Ψ é um *monomorfismo* (i.e., cada Ψ^p é injectivo) ou se Ψ é um *epimorfismo* (i.e., cada Ψ^p é sobrejectivo) então tem rank constante. Logo o núcleo, a imagem e co-núcleo de monomorfismos e epimorfismos são fibrados vectoriais. Os detalhes destas construções são deixados como exercício.

Os conceitos associados a sucessões exactas extendem-se, facilmente, a fibrados vectoriais e morfismos de rank constante. Por exemplo, numa sucessão exacta curta de fibrados vectoriais:

$$0 \longrightarrow \xi \xrightarrow{\Phi} \eta \xrightarrow{\Psi} \theta \longrightarrow 0$$

Φ é um monomorfismo e Ψ é um epimorfismo. Temos, ainda, isomorfismos $\xi \simeq \operatorname{Ker}\Psi$ e $\theta \simeq \operatorname{coKer}\Phi$. Neste caso, seguimos a terminologia usual, dizendo que θ é o **fibrado vectorial quociente** do monomorfismo Φ.

Um exemplo importante de fibrado quociente é obtido considerando um subfibrado vectorial $\xi = (\tau, F, M) \subset \eta = (\pi, E, M)$. Neste caso, a inclusão é um monomorfismo de fibrados vectoriais, logo podemos formar o seu quociente, que designamos por η/ξ. Note que as fibras de η/ξ são os espaços vectoriais quocientes E_p/F_p.

Exemplo 19.6.

Seja M uma variedade e $N \subset M$ uma subvariedade. O fibrado tangente TN é um subfibrado vectorial de $T_N M$. O fibrado quociente $\nu(N) \equiv T_N M/TN$ costuma-se chamar ***fibrado normal de*** *N em M.*

Mais geralmente seja D uma distribuição involutiva de classe C^∞ numa variedade M. Então D determina uma folheação $\mathcal{F}$ de M e um subfibrado vectorial $T\mathcal{F} \subset TM$. O fibrado quociente $\nu(\mathcal{F}) \equiv TM/T\mathcal{F}$ costuma-se chamar ***fibrado normal de*** *$\mathcal{F}$ em M. Se L é uma folha de $\mathcal{F}$ a restrição de $\nu(\mathcal{F})$ a L é o fibrado normal $\nu(L)$.*

Sejam $\xi = (\pi, E, M)$ e $\eta = (\tau, F, M)$ fibrados vectoriais sobre a mesma variedade M. A **soma de Whitney** ou **soma directa** de ξ e η é o fibrado vectorial $\xi \oplus \eta$ cujo espaço total é dado por

$$E \oplus F = \{(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in E \times F : \pi(\mathbf{v}) = \tau(\mathbf{w})\},$$

e cuja projecção é dada por:

$$E \oplus F \to M,\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \pi(\mathbf{v}) = \tau(\mathbf{w}).$$

Note que as fibras de $\xi \oplus \eta$ são as somas directas $E_p \oplus F_p$. A condição de trivialidade local é facilmente verificada: se $\{\phi_\alpha\}$ e $\{\psi_\alpha\}$ são trivializações de ξ e η, subordinadas à mesma cobertura, a que correspondem cociclos $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{h_{\alpha\beta}\}$, então obtemos uma trivialização de $\xi \oplus \eta$ dada por $\{(\phi_\alpha \times \psi_\alpha)|_{E\oplus F}\}$, e a que corresponde um cociclo com funções de transição

$$g_{\alpha\beta} \oplus h_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta} \end{bmatrix}.$$

De forma análoga, podemos definir:

- O **produto tensorial** $\xi \otimes \eta$: as fibras são os produtos tensoriais $E_p \otimes F_p$, e as funções de transição são $g_{\alpha\beta} \otimes h_{\alpha\beta}$.
- O **fibrado vectorial dual** ξ^*: as fibras são os espaços vectoriais duais E_p^* e as funções de transição são as inversas transpostas $(g_{\alpha\beta}^t)^{-1}$.
- Os **produtos exteriores** $\wedge^k\xi$: as fibras são os produtos exteriores $\wedge^k E_p$ e as funções de transição são os produtos $g_{\alpha\beta} \wedge \cdots \wedge g_{\alpha\beta}$.
- O **fibrados Hom**(ξ, η): as fibras são os espaços de homomorfismos $\mathrm{Hom}(E_p, F_p)$. Deixamos como exercício calcular as funções de transição e verificar que existe um isomorfismo natural $\mathrm{Hom}(\xi, \eta) \simeq \xi^* \otimes \eta$.

Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r. Vamos dizer que ξ é um **fibrado vectorial orientável** se o produto exterior $\wedge^r\xi$ possui uma secção que não se anula. Note que esta secção corresponde a escolher uma orientação em cada espaço vectorial E_p. Se $\{g_{\alpha\beta}\}$ é um cociclo definido por uma trivialização $\{\phi_\alpha\}$ de ξ, deixamos como exercício verificar que ξ é orientável sse existir um cociclo equivalente $\{g'_{\alpha\beta}\}$ em que as funções de transição tomam valores em $GL^+(r)$, o grupo das matrizes invertíveis $r \times r$ com determinante positivo:

$$g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL^+(r) \subset GL(r).$$

No caso em que $\xi = TM$, esta noção corresponde à noção de orientação de M que estudámos anteriormente. As possíveis orientações de ξ, E e M estão relacionadas da seguinte forma.

Lema 19.7. *Se $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado vectorial orientável e M é uma variedade orientável, então E é uma variedade orientável.*

A demonstração é deixada como exercício.

Uma **estrutura Riemanniana** num fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ é uma escolha de um produto interno $\langle\ ,\rangle : E_p \times E_p \to \mathbb{R}$ em cada fibra, e que varia suavemente, i.e., para quaisquer secções $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ a função $p \mapsto \langle s_1(p), s_2(p)\rangle$ é de classe C^∞. Se $\{g_{\alpha\beta}\}$ é um cociclo definido por uma trivialização $\{\phi_\alpha\}$ de ξ, deixamos como exercício verificar que ξ possui uma estrutura Riemanniana sse existir um cociclo equivalente $\{g'_{\alpha\beta}\}$ em que as funções de transição tomam valores no grupo ortogonal $O(r)$:

$$g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to O(r) \subset GL(r).$$

Como $GL(r)$ admite a decomposição polar

$$GL(r) = O(r) \times \{\text{matrizes simétricas definidas positivas}\},$$

vemos que é sempre possível encontrar um cociclo equivalente com valores em $O(r)$. Assim, qualquer fibrado vectorial admite uma estrutura Riemanniana. Também podemos utilizar partições da unidade para obter uma demonstração alternativa deste facto.

Se $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado vectorial e $\langle\ ,\ \rangle$ é uma estrutura Riemanniana em ξ, então para qualquer subfibrado vectorial $\eta = (\tau, F, N)$ podemos definir o **fibrado vectorial ortogonal** $\eta^\perp$ sobre N como sendo o subfibrado vectorial de ξ com espaço total $F^\perp$, onde

$$F_p^\perp \equiv \{\mathbf{v} \in E_p : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0, \forall \mathbf{w} \in F_p\}.$$

No caso em $M = N$, temos que:

$$\xi = \eta \oplus \eta^\perp.$$

Neste caso, $\eta^\perp \simeq \xi/\eta$, pois a projecção natural $\xi \to \xi/\eta$ restrita a $\eta^\perp$ fornece um isomorfismo.

Exercícios.

1. Mostre que um fibrado vectorial é trivial sse possui um referencial global.

2. Seja $G_r(\mathbb{R}^d)$ a variedade Grassmanniana dos r-planos de $\mathbb{R}^d$. Considere a variedade $E \subset G_r(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ definida por:
$$E = \{(S, x) : S \text{ é um subespaço de } \mathbb{R}^d \text{ e } x \in S\},$$
e aplicação diferenciável $\pi : E \to G_r(\mathbb{R}^d)$ dada por:
$$\pi(S, x) = S.$$
Mostre que $\gamma_d^r = (\pi, E, G_r(\mathbb{R}^d))$ é um fibrado vectorial de rank k. A este fibrado chama-se **fibrado canónico** sobre $G_r(\mathbb{R}^d)$.

3. Complete os detalhes da demonstração da Proposição 19.5.

4. Seja $\Psi : \eta \to \xi$ um morfismo de fibrados vectoriais que cobre a identidade. Mostre que o núcleo e a imagem de Ψ são subfibrados vectoriais se o rank das aplicações lineares Ψ^p é constante. Dê contra-exemplos quando o rank não é constante.

5. Considere uma sucessão exacta curta de fibrados vectoriais
$$0 \longrightarrow \xi \longrightarrow \eta \xrightarrow{\Psi} \theta \longrightarrow 0$$
Mostre que esta sucessão exacta curta *cinde-se*, i.e., existe um monomorfismo de fibrados vectoriais $\Phi : \theta \to \eta$ tal que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_\theta$.

6. Dados dois fibrados vectoriais $\xi = (\pi, E, M)$ e $\eta = (\tau, F, M)$, mostre que existe um fibrado vectorial $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$ cujas fibras são os espaços de homomorfismos $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)$. Calcule as funções de transição $\mathrm{Hom}(\xi, \eta)$ em termos das funções de transição de ξ e η e verifique que existe um isomorfismo natural $\mathrm{Hom}(\xi, \eta) \simeq \xi^* \otimes \eta$.

7. Se $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado vectorial orientável e M é uma variedade orientável, mostre que E é uma variedade orientável.

8. Seja $E = \mathbb{P}^{d+1} - \{[0,\ldots,0,1]\}$, e $\pi : E \to \mathbb{P}^d$ a aplicação dada por

$$\pi\left(\left[x^0,\ldots,x^{d+1}\right]\right) = \left[x^0,\ldots,x^d\right].$$

Mostre que:

(a) As parametrizações $\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to E$ dadas por

$$\phi_i^{-1}\left(u^1,\ldots,u^d,t\right) = \left[u^1,\ldots,u^{i-1},1,u^i,\ldots,u^d,t\right]$$

definem um fibrado de linhas $\xi = (\pi, E, \mathbb{P}^d)$.

(b) ξ é isomorfo ao fibrado tautológico γ^1_{d+1} sobre $\mathbb{P}^d$.

(c) γ^1_{d+1} não é o fibrado trivial.
(Sugestão: Note que o fibrado trivial é orientável.)

9. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial. Mostre que existe um isomorfismo de fibrados vectoriais

$$T_M E \simeq \xi \oplus TM,$$

que é natural: se $\Psi : (\pi, E, M) \to (\tau, F, N)$ é um morfismo de fibrados que cobre a aplicação $\psi : M \to N$, então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
T_M E \arrow[r, "\mathrm{d}\Psi"] \arrow[d, "\simeq"'] & T_N F \arrow[d, "\simeq"] \\
\xi \oplus TM \arrow[r, "\Psi\oplus\mathrm{d}\psi"'] & \eta \oplus TN
\end{tikzcd}$$

10. Seja ξ um fibrado vectorial e $\{g_{\alpha\beta}\}$ um cociclo definido por uma trivialização $\{\phi_\alpha\}$ de ξ. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) ξ é orientável;

(b) Existe um cociclo equivalente a $\{g_{\alpha\beta}\}$ em que as funções de transição tomam valores em $GL^+(r)$;

(c) Existe um cociclo equivalente a $\{g_{\alpha\beta}\}$ em que as funções de transição tomam valores em $SO(r)$.

Lição 20. Pull-backs e a Classificação de Fibrados Vectoriais

Vamos, agora, estudar propriedades globais de fibrados vectoriais. Uma construção que desempenha um papel crucial neste estudo é o *pull-back* de fibrados vectoriais por aplicações diferenciáveis, que passamos a descrever.

Seja $\psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável e $\xi = (\pi, E, N)$ um fibrado vectorial sobre N de rank r. O **pull-back** de ξ por ψ é um fibrado vectorial $\psi^*\xi = (\hat{\pi}, \psi^*E, M)$ de rank r, onde o espaço total é dado por

$$\psi^*E = \{(p, \mathbf{v}) \in M \times E : \psi(p) = \pi(\mathbf{v})\},$$

e a projecção é definida por:

$$\hat{\pi} : \psi^*E \to M,\ (p, \mathbf{v}) \mapsto p.$$

Observe que a fibra de $\psi^*\xi$ sobre p é isomorfa à fibra de ξ sobre $\psi(p)$. Por outras palavras, o pull-back de ξ por ψ é um fibrado vectorial em que a fibra sobre cada ponto da pré-imagem $\psi^{-1}(q)$ é uma cópia da fibra de ξ sobre q.

Para verificar a trivialidade local de $\psi^*\xi$, seja $\{\phi_\alpha\}$ uma trivialização para ξ, subordinada a uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de N. Obtemos uma trivialização

$\{\widetilde{\phi}_\alpha\}$ para $\psi^*\xi$, subordinada à cobertura $\{\psi^{-1}(U_\alpha)\}$ de N, definindo

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi}_\alpha : \hat{\pi}^{-1}(\psi^{-1}(U_\alpha)) &\to \psi^{-1}(U_\alpha) \times \mathbb{R}^r \\ (p, \mathbf{v}) &\longmapsto (p, \phi_\alpha^{\psi(p)}(\mathbf{v})).\end{aligned}$$

Se $\{g_{\alpha\beta}\}$ é o cociclo de ξ definido pela trivialização $\{\phi_\alpha\}$, então o cociclo de $\psi^*\xi$ definido pela trivialização $\{\widetilde{\phi}_\alpha\}$ é $\{\psi^* g_{\alpha\beta}\} = \{g_{\alpha\beta} \circ \psi\}$.

Note que a aplicação $\Psi : \psi^*\xi \to \xi$ dada por $(p, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{v}$ é um morfismo de fibrados vectoriais que cobre ψ. Assim, vemos que o pull-back permite completar o seguinte diagrama num morfismo de fibrados vectoriais:

$$\begin{tikzcd} \psi^*E \arrow[r, dashed, "\Psi"] \arrow[d, dashed, "\hat{\pi}"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "\psi"] & N \end{tikzcd}$$

Por outro lado, temos a seguinte propriedade universal que caracteriza o pull-back. A demonstração é deixada como exercício.

Proposição 20.1. *Seja $\psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável, $\eta = (\tau, F, M)$ e $\xi = (\pi, E, N)$ fibrados vectoriais e $\Phi : \eta \to \xi$ é um morfismo de fibrados vectoriais que cobre ψ. Então existe um único morfismo de fibrados $\tilde{\Phi} : \eta \to \psi^*\xi$, que cobre a identidade, e que torna o diagrama comutativo:*

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dashed, "\tilde{\Phi}"] \arrow[drr, bend left, "\Phi"] \arrow[ddr, bend right, "\tau"'] & & \\ & \psi^*E \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\hat{\pi}"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ & M \arrow[r, "\psi"'] & N \end{tikzcd}$$

Temos ainda que $\tilde{\Phi}$ é um isomorfismo sse $\Phi^p : F_p \to E_{\psi(p)}$ é um isomorfismo, para todo o $p \in M$.

Sejam $\xi = (\pi, E, N)$ e $\eta = (\tau, F, N)$ fibrados vectoriais sobre N, e seja $\Phi : \xi \to \eta$ um morfismo de fibrados vectoriais, que cobre a identidade. Se $\psi : M \to N$ é uma aplicação diferenciável, então temos um morfismo de fibrados vectoriais $\psi^*(\Phi) : \psi^*\xi \to \psi^*\eta$, definido por:

$$\psi^*(\Phi)(p, \mathbf{v}) = (p, \Phi(\mathbf{v})).$$

É claro que este morfismo torna o seguinte diagrama comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\psi^*E \arrow[rr, "\psi^*(\Phi)"] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \psi^*F \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& E \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dd] & & F \arrow[dd] \\
M \arrow[rr] \arrow[dr, "\psi"'] & & M \arrow[dr, "\psi"'] & \\
& N \arrow[rr] & & N
\end{tikzcd}
$$

Proposição 20.2. *Seja $\psi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Então:*

(i) O pull-back do fibrado trivial é o fibrado trivial: $\psi^*(\varepsilon^r_N) = \varepsilon^r_M$.

(ii) Se $\phi : Q \to M$ é uma aplicação diferenciável, então $(\psi \circ \phi)^*\xi = \phi^*(\psi^*\xi)$, para qualquer fibrado vectorial ξ sobre N.

(iii) O pull-back do morfismo identidade é a identidade: $\psi^*(id_\xi) = id_{\psi^*\xi}$.

(iv) Se $\Phi : \xi \to \eta$ e $\Psi : \eta \to \theta$ são morfismos de fibrados vectoriais sobre a identidade, então $\phi^*(\Psi \circ \Phi) = \phi^*(\Psi) \circ \phi^*(\Phi)$.

Assim, fixadas variedades diferenciáveis M e N, e uma aplicação diferenciável $\psi : M \to N$, temos:

- O pull-back define um functor covariante da categoria dos fibrados vectoriais sobre N na categoria dos fibrados vectoriais sobre M.

Por outro lado, seja $\mathrm{Vect}_r(M)$ o conjunto das classes de isomorfismo de fibrados vectoriais de rank r sobre uma variedade M. É um conjunto com um ponto distinguido: a classe dos fibrados triviais. Dada uma aplicação diferenciável $\psi : M \to N$, a aplicação $\psi^* : \mathrm{Vect}_r(N) \to \mathrm{Vect}_r(M)$ preserva o ponto distinguido. Assim, também temos:

- O pull-back define um functor contravariante da categoria das variedades diferenciáveis na categoria dos conjuntos com um ponto distinguido.

Uma propriedade fundamental do pull-back de fibrados vectoriais é a seguinte:

Teorema 20.3 (Invariância por homotopia)**.** *Se ψ e $\phi : M \to N$ são aplicações homotópicas e ξ é um fibrado vectorial sobre N, então os pull-backs $\psi^*\xi$ e $\phi^*\xi$ são fibrados vectoriais isomorfos.*

Demonstração. A demonstração que apresentamos é válida na categoria C^0. Seja $H : M \times [0,1] \to N$ um homotopia entre ϕ e ψ. Temos que:

$$
\begin{aligned}
\phi^*\xi &= H_0^*\xi = H^*\xi|_{M\times\{0\}}, \\
\psi^*\xi &= H_1^*\xi = H^*\xi|_{M\times\{1\}}.
\end{aligned}
$$

Assim, basta verificar que, para todo o fibrado vectorial η sobre $M \times [0,1]$, as restrições $\eta|_{M\times\{0\}}$ e $\eta|_{M\times\{1\}}$ são isomorfas.

Vejamos que, para todo o fibrado vectorial $\eta = (\pi, E, M \times [0,1])$, existe um morfismo de fibrados vectoriais $\Delta : \eta \to \eta$, que cobre a aplicação

$$\delta : M \times [0,1] \to M \times [0,1],\ (p,t) \mapsto (t,1),$$

e tal que as aplicações das fibras são isomorfismos. Daqui resulta, imediatamente, que $\eta|_{M\times\{0\}}$ e $\eta|_{M\times\{1\}}$ são isomorfos. Para construir Δ, vamos precisar do seguinte lema cuja demonstração é deixada como exercício:

Lema 20.4. *Seja η um fibrado vectorial sobre $M \times [0,1]$. Existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M tal que as restrições $\eta|_{U_\alpha\times[0,1]}$ são triviais.*

Assim, seja $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma cobertura aberta de M, contável, e tal que as restrições $\eta|_{U_k\times[0,1]}$ são triviais. Designamos as aplicações trivializantes por ϕ_k:

$$\begin{tikzcd}
E|_{U_k\times[0,1]} \arrow[rr, "\phi_k"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (U_k\times[0,1])\times\mathbb{R}^r \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& U_k\times[0,1] &
\end{tikzcd}$$

Seja, ainda, $\{\rho_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ um *envelope da identidade* subordinado à cobertura $\{U_k\}_{k\in Nn}$, i.e., uma colecção de aplicações contínuas $\rho_k : M \to \mathbb{R}$ tais que $0 \le \rho_k \le 1$, $\operatorname{supp}\rho_k \subset U_k$ e, para todo o $p \in M$,

$$\max\{\rho_k(p) : k \in \mathbb{N}\} = 1.$$

Para obter um envelope da unidade, tomamos uma partição da unidade $\{\theta_k\}$, e definimos:

$$\rho_k(p) \equiv \frac{\theta_k(p)}{\max\{\theta_k(p) : k \in \mathbb{N}\}}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos morfismos $\Delta_k : \eta \to \eta$ por:

(a) Δ_k cobre a aplicação $\delta_k : M \times [0,1] \to M \times [0,1]$ dada por:

$$\delta_k(p,t) = (p, \max(\rho_k(p), t)).$$

(b) Em $\pi^{-1}(U_k \times [0,1])$, Δ_k é definida por:

$$\Delta_k(\phi_k^{-1}(p,t,\mathbf{v})) \equiv \phi_k^{-1}(p, \max(\rho_k(p), t)),$$

e Δ_k é a identidade no complementar de $\pi^{-1}(U_k \times [0,1])$.

Finalmente, definimos Δ por:

$$\Delta = \cdots \circ \Delta_k \circ \cdots \circ \Delta_1.$$

Como cada $p \in M$ possui uma vizinhança que intersecta, apenas, um número finito de abertos U_k, obtemos um morfismo de fibrados $\Delta : \eta \to \eta$ que, localmente, é a composição de isomorfismos de fibrados (de classe C^0). Logo Δ é um isomorfismo (de classe C^0) que cobre $\delta : M \times [0,1] \to M \times [0,1]$([10]). $\square$

Corolário 20.5. *Um fibrado vectorial sobre uma variedade contráctil é trivial.*

[10] Pode-se mostrar que um morfismo de classe C^0 , que cobre uma aplicação C^∞, pode ser aproximado por um isomorfismo de classe C^∞, que cobre a mesma aplicação. Por outro, um morfismo suficientemente próximo de um isomorfismo é um isomorfismo, donde o resultado também é verdadeiro no caso C^∞

Demonstração. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial e tomemos aplicações $\psi : M \to \{*\}$ e $\phi : \{*\} \to M$ tais que $\phi \circ \psi$ é homotópica à aplicação id_M. Pelo teorema, temos que:

$$\xi \simeq (\psi \circ \phi)^* \xi \simeq \phi^*(\psi^* \xi).$$

Como $\psi^*\xi$ tem base um conjunto singular, é um fibrado vectorial trivial. Logo, $\phi^*(\psi^*\xi)$ é um fibrado vectorial trivial. $\square$

Assim, o conjunto $\mathrm{Vect}_r(M)$, formado pelas classes de isomorfismo de fibrados vectoriais sobre M, é um conjunto singular, se M é uma variedade contráctil. É claro que, em geral, existem fibrados não triviais. Por exemplo, deixamos como exercício verificar que $\mathrm{Vect}_1(\mathbb{S}^1)$ é um conjunto com dois pontos. O problema de determinar o conjunto $\mathrm{Vect}_k(M)$ pode ser reduzido a um problema de teoria de homotopia, o que passamos a explicar.

Recordemos que γ_n^r designa o **fibrado canónico** sobre a variedade Grassmanniana $G_r(\mathbb{R}^n)$ (Exercício 2, da Lição anterior). O espaço total de γ_n^r é:

$$E = \{(S, x) : S \text{ é um subespaço de } \mathbb{R}^n \text{ e } x \in S\},$$

e a projecção na base é dada por $\pi(S, x) = S$. O fibrado canónico é um subfibrado vectorial do fibrado trivial $\varepsilon^n_{G_r(\mathbb{R}^n)} = (\pi_1, G_r(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n, G_r(\mathbb{R}^n))$. O **fibrado quociente universal** é o fibrado quociente definido pela sucessão exacta curta de fibrados vectoriais:

$$0 \longrightarrow \gamma_n^{n-r} \longrightarrow \varepsilon^n_{G_{n-r}(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow \eta_n^r \longrightarrow 0$$

A razão para o adjectivo *universal* é justificado pela seguinte proposição:

Proposição 20.6. *Seja M uma variedade diferenciável e ξ um fibrado vectorial de rank r sobre M. Se ξ admite n secções globais $s_1, \dots, s_n$ que geram E_p, para todo o $p \in M$, então existe uma aplicação diferenciável $\psi : M \to G_{n-r}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\xi \simeq \psi^*(\eta_n^r)$.*

Demonstração. Seja V o espaço vectorial de dimensão n com base $\{s_1, \dots, s_n\}$. Como, para cada $p \in M$, as secções geram a fibra E_p, temos uma aplicação linear sobrejectiva

$$V \xrightarrow{\mathrm{av}_p} E_p \longrightarrow 0\ .$$

O núcleo $\mathrm{Ker}\,\mathrm{av}_p$ desta aplicação é um subespaço de V de codimensão r. Por outro lado, a fibra do fibrado quociente universal η_n^r da Grassmanniana $G_{n-r}(V)$ é $V/\mathrm{Ker}\,\mathrm{av}_p \simeq E_p$. Assim, se definirmos a aplicação diferenciável

$$\psi : M \to G_{n-r}(V),\ p \mapsto \mathrm{Ker}\,\mathrm{av}_p,$$

então $\xi \simeq \psi^*(\eta_n^r)$. É claro que podemos identificar V com $\mathbb{R}^n$ e $G_{n-r}(V)$ com $G_{n-r}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

A uma aplicação $\psi : M \to G_{n-r}(\mathbb{R}^n)$, como na proposição, chama-se uma **aplicação classificante** para o fibrado vectorial ξ. Um fibrado vectorial sobre uma variedade de tipo finito, possui sempre um conjunto finito de secções geradoras.

Lema 20.7. *Seja M uma variedade que admite uma boa cobertura com k abertos, e ξ um fibrado vectorial de rank r sobre M. Então ξ admite $n = rk$ secções globais $s_1, \dots, s_n$ que geram E_p, para todo o $p \in M$.*

A demonstração deste lema é deixada como exercício. Assim, para variedades de tipo finito existem sempre aplicações de classificação.

Designando por $[M,N]$ o conjunto das classes de homotopia das aplicações $\phi : M \to N$, temos:

Teorema 20.8 (Classificação dos Fibrados Vectoriais)**.** *Seja M uma variedade que admite uma boa cobertura com k abertos. Para todo o $n \geq rk$, existe um correspondência biunívoca*

$$\mathrm{Vect}_r(M) \simeq [M, G_{n-r}(\mathbb{R}^n)].$$

Demonstração. Se $\phi, \phi' : M \to G_{n-r}(\mathbb{R}^n)$ são duas aplicações classificantes de um fibrado ξ sobre M, que correspondem a duas escolhas de secções globais $s_1, \ldots, s_n$ e $s'_1, \ldots, s'_n$, então

$$\phi'(p) = A \cdot \phi(p), \quad \forall p \in M,$$

onde $A \in GL(n)$ é independente de p. Seja $\gamma(t) : [0,1] \to GL(n)$ um caminho com $\gamma(0) = I$ e $\gamma(1) = A$. Então

$$\phi_t(p) = \gamma(t) \cdot \phi(p), \quad (p \in M),$$

define uma homotopia entre ϕ e ϕ'. Note, ainda, que, se ξ e η são fibrados vectoriais isomorfos, então temos uma correspondência biunívoca entre as secções de ξ e as secções de η. Logo, a classe de homotopia de uma aplicação classificante de ξ é determinada pela classe de isomorfismo de ξ. Assim, temos uma aplicação:

$$f : \mathrm{Vect}_r(M) \to [M : G_{n-r}(\mathbb{R}^n)].$$

Por outro lado, pela invariância por homotopia dos pull-backs, temos que o pull-back do fibrado quociente universal, induz uma aplicação

$$g : [M : G_{n-r}(\mathbb{R}^n)] \to \mathrm{Vect}_r(M), \ \psi \mapsto \psi^* \eta^r_n.$$

Estas aplicações são inversas uma da outra. □

Este resultado reduz a classificação dos fibrados vectoriais a uma questão de homotopia. No exemplo seguinte, ilustramos com o caso das esferas. Este exemplo, pressupõe alguma Teoria de Homotopia.

Exemplo 20.9.

Para uma espaço topológico X, conexo por arcos, a homotopia livre e a homotopia com um ponto base x_0, estão relacionadas por:

$$\pi_k(X,x)/\pi_1(X,x) \simeq [\mathbb{S}^k, X],$$

onde o quociente corresponde à acção natural de $\pi_1(X,x)$ em $\pi_k(X,x)$. Assim, vemos que

$$\mathrm{Vect}_r(\mathbb{S}^k) = [\mathbb{S}^k, G_{n-r}(\mathbb{R}^n)] \simeq \pi_k(G_{n-r}(\mathbb{R}^n))/\pi_1(G_{n-r}(\mathbb{R}^n)),$$

para n suficientemente grande. Por outro lado, utilizando o facto de que a Grassmanniana é o espaço homogéneo:

$$G_{n-r}(\mathbb{R}^n) = O(n)/(O(n-r) \times O(r)),$$

e que $\pi_k(O(n)/O(n-r)) = 0$, se n é suficientemente grande, a sucessão exacta longa de homotopia mostra que $\pi_k(G_{n-r}(\mathbb{R}^n)) = \pi_{k-1}(O(r))$, se n é suficientemente grande. Concluímos que:

$$\mathrm{Vect}_r(\mathbb{S}^k) = \pi_{k-1}(O(r))/\pi_0(O(r)) = \pi_{k-1}(O(r))/\mathbb{Z}_2.$$

Por exemplo, temos:

$$\mathrm{Vect}_2(\mathbb{S}^k) = \pi_{k-1}(O(2))/\mathbb{Z}_2 = \pi_{k-1}(\mathbb{S}^1)/\mathbb{Z}_2,$$

se $k \geq 2$. Logo:

$$\mathrm{Vect}_2(\mathbb{S}^k) = 0, \text{ se } k \geq 3.$$

Se $g \in O(r)$, a acção de g em $O(r)$ por conjugação induz uma acção ao nível de homotopia:

$$i_g : O(n) \to O(n),\ i_g(h) = ghg^{-1} \implies (i_g)_* : \pi_k(O(r)) \to \pi_k(O(r)).$$

Se g_1 e g_2 pertencem à mesma componente conexa, então $(i_{g_1})_* = (i_{g_2})_*$. Assim, obtemos uma acção de $\pi_0(O(r)) = \mathbb{Z}_2$ em $\pi_{k-1}(O(r))$, que corresponde precisamente à acção descrita acima. Se r é ímpar, então $-I$ representa a classe não-trivial em $\pi_0(O_r)$. Como a acção por conjugação por $-I$ é trivial, esta acção é trivial, e concluímos que:

$$\mathrm{Vect}_r(\mathbb{S}^k) = \pi_{k-1}(O(r)), \text{ se } r \text{ é ímpar.}$$

Por exemplo, temos:

$$\mathrm{Vect}_3(\mathbb{S}^4) = \pi_3(SO(3)) = \pi_3(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z}.$$

Se a variedade não é de tipo finito, ainda existe uma classificação de fibrados vectoriais sobre M. Nesse caso, considera-se o espaço:

$$\mathbb{R}^\infty = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathbb{R}^d,$$

que é o limite directo da sucessão de espaços vectoriais:

$$\cdots \subset \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+2} \subset \cdots$$

Em $\mathbb{R}^\infty$, consideramos os subespaços de codimensão r, que formam a Grassmanniana $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^\infty) = G_{\infty-r}(\mathbb{R}^\infty)$, e que pode, também, ser vista como o limite directo da sucessão de Grassmannianas:

$$\cdots \subset G_{d-r}(\mathbb{R}^d) \subset G_{d+1-r}(\mathbb{R}^{d+1}) \subset G_{d+2-r}(\mathbb{R}^{d+2}) \subset \cdots$$

A sucessão de fibrados quocientes universais sobre estas Grassmannianas:

$$\cdots \subset \eta_d^r \subset \eta_{d+1}^r \subset \eta_{d+2}^r \subset \cdots$$

possui um limite directo η_∞^r, que é o fibrado quociente universal de rank r sobre a Grassmanniana infinita $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^\infty)$.

Mostra-se que um fibrado de rank r sobre uma variedade M é isomorfo a um pull-back $\psi^*\eta_\infty^r$, para alguma aplicação $\psi : M \to \tilde{G}_r(\mathbb{R}^\infty)$. Assim, para *qualquer* variedade M, temos uma bijecção:

$$\mathrm{Vect}_r(M) \simeq [M, \tilde{G}_r(\mathbb{R}^\infty)].$$

Exercícios.

1. Demonstre a Proposição 20.1. Mostre, ainda, que a propriedade universal dada por esta proposição caracteriza o pull-back de espaços vectoriais a menos de isomorfismo.

2. Verifique as propriedades básicas do pull-back dadas pela Proposição 20.2.

3. Mostre que o pull-back de γ^1_{d+1} pela aplicação $\psi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$ dada por

$$\psi\left([x^0, x^1]\right) = \left[(x^0)^d, (x^0)^{d-1}x^1, \ldots, x^0(x^1)^{d-1}, (x^1)^d\right]$$

é isomorfo a $\gamma^1_2 \otimes \ldots \otimes \gamma^1_2$ (produto tensorial com d factores).

4. Seja ξ um fibrado vectorial sobre $M \times [0,1]$. Mostre que existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de M tal que as restrições $\xi|_{U_\alpha \times [0,1]}$ são triviais.
Sugestão: Mostre que, se ξ é um fibrado vectorial sobre $M \times [a,c]$ que é trivial quando restrito a $M \times [a,b]$ e a $M \times [b,c]$, para algum $a < b < c$, então ξ é um fibrado vectorial trivial.

5. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial e $N \subset M$ uma subvariedade fechada. Mostre que toda a secção $s : N \to E$ sobre N, admite uma extensão a uma secção $\tilde{s} : U \to E$ definida num aberto $U \supset N$.

6. Calcule $\mathrm{Vect}_1(\mathbb{S}^1)$ (sem recorrer à classificação dos fibrados vectoriais).

7. Seja M uma variedade que admite uma boa cobertura com k abertos, e ξ um fibrado vectorial de rank r sobre M. Mostre que ξ admite $n = rk$ secções globais $s_1, \ldots, s_n$, que geram E_p, para todo o $p \in M$.

8. Calcule $\mathrm{Vect}_r(\mathbb{S}^1)$, $\mathrm{Vect}_r(\mathbb{S}^2)$ e $\mathrm{Vect}_r(\mathbb{S}^3)$.

Lição 21. A Classe de Thom e a Classe de Euler

Aquando do nosso estudo da invariância por homotopia da cohomologia de Rham, vimos que:

$$H^\bullet(M \times \mathbb{R}^r) \simeq H^\bullet(M),$$
$$H_c^\bullet(M \times \mathbb{R}^r) \simeq H_c^{\bullet - r}(M).$$

Este resultados podem ser interpretados como resultados que relacionam a cohomologia do espaço total do fibrado trivial com a cohomologia da base.

Mais geralmente, temos:

Proposição 21.1. *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial. Então:*

$$H^\bullet(E) \simeq H^\bullet(M).$$

Demonstração. Seja $s : M \to E$ a secção zero. A sua imagem é uma deformação por retracção de E. Pela invariância por homotopia, obtemos que $s^* : H^\bullet(E) \to H^\bullet(M)$ é um isomorfismo. □

A proposição correspondente para cohomologia com suporte compacto não é verdadeira, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 21.2.
Seja $M = \mathbb{S}^1$ e consideremos o fibrado de linhas não-trivial $\pi : E \to \mathbb{S}^1$. Uma realização concreta para este fibrado, é dada pela banda de Möbius. Como E é uma variedade de dimensão 2, não-orientada, temos que $H_c^2(E) = 0$. Por outro lado, $H_c^{2-1}(\mathbb{S}^1) = H^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$.

No entanto, quando E e M são orientáveis, obtemos:

Proposição 21.3. *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r, com E e M orientáveis de tipo finito. Então:*

$$H_c^\bullet(E) \simeq H_c^{\bullet - r}(M).$$

Demonstração. Como E e M são orientáveis, de tipo finito, podemos utilizar dualidade de Poincaré, obtendo:

$$\begin{aligned} H_c^\bullet(E) &\simeq H^{d+r-\bullet}(E) && \text{(por dualidade de Poincaré para } E\text{)},\\ &\simeq H^{d+r-\bullet}(M) && \text{(pela Proposição 21.1)},\\ &\simeq H_c^{\bullet - r}(M) && \text{(por dualidade de Poincaré para } M\text{)}. \end{aligned}$$

□

Se M é uma variedade compacta, então o espaço total de qualquer fibrado vectorial sobre M é de tipo finito. Logo:

Corolário 21.4 (Dualidade de Thom)**.** *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial orientável, de rank r, e M uma variedade compacta orientável. Então:*

$$H_c^\bullet(E) \simeq H^{\bullet - r}(M).$$

A aplicação que fornece o isomorfismo da dualidade de Thom é a *integração ao longo das fibras* $\pi_* : \Omega_c^\bullet(E) \to \Omega^{\bullet - r}(M)$. Para descrever π_*, podemos cobrir M com sistemas de coordenadas trivializantes orientadas (U_α, ϕ_α), e em que cada U_α é um domínio de coordenadas $(x^1, \ldots, x^d)$ de M. Obtemos sistemas de coordenadas $(x^1, \ldots, x^d, t^1, \ldots, t^r)$ para $\pi^{-1}(U_\alpha)$, onde $(t^1, \ldots, t^r)$ são coordenadas lineares nas fibras. Se ω é uma forma diferencial em E, então $\omega_\alpha = \omega|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ é uma combinação linear de formas diferenciais de dois tipos:

$f(x,t)(\pi^*\theta) \wedge dt^{i_1} \wedge \cdots \wedge dt^{i_k}$, com $k < r$;
$f(x,t)(\pi^*\theta) \wedge dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^r$;

onde θ é um forma diferencial em M e $f(x,t)$ possui suporte compacto. A aplicação $\pi_* : \Omega_c^\bullet(E) \to \Omega^{\bullet - r}(M)$ é zero nas formas do primeiro tipo, enquanto que nas formas do segundo tipo é dada por:

$$f(x,t)(\pi^*\theta) \wedge dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^r \longmapsto \theta \int_{\mathbb{R}^r} f(x, t^1, \ldots, t^r) dt^1 \cdots dt^r.$$

Como dois sistemas de coordenadas nas fibras $(t^1, \ldots, t^r)$ e $(\bar{t}^1, \ldots, \bar{t}^r)$ estão relacionadas por um elemento de $GL(r)^+$, obtemos $\pi_*\omega_\alpha = \pi_*\omega_\beta$, sempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$.

A integração ao longo das fibras comuta com o diferencial: $\mathrm{d}\pi_* = \pi_*\mathrm{d}$. Deixamos como exercício verificar que é válida a **fórmula de projecção**:

$$\pi_*(\pi^*\theta \wedge \omega) = \theta \wedge \pi_*\omega, \tag{21.1}$$

para toda as formas $\theta \in \Omega^\bullet(M)$ e $\omega \in \Omega_c^\bullet(E)$.

Observação 21.5. Para fibrados vectoriais sobre variedades não-compactas também existe uma versão da dualidade de Thom. De facto, podemos considerar formas com suporte compacto na direcção vertical: o complexo $\Omega_{cv}^*(E)$ é definido por formas diferenciais ω em E tais que $\operatorname{supp}\omega \cap \pi^{-1}(K)$ é compacto para todo o conjunto compacto $K \subset M$. Assim, a restrição de

ω a cada uma das fibras E_p tem suporte compacto, e podemos definir integração ao longo das fibras. Assumindo E orientável, obtemos a dualidade de Thom:

$$H^\bullet_{cv}(E) \simeq H^{\bullet - r}(M).$$

Nestas notas, vamos considerar dualidade de Thom, apenas, no caso em que M é compacto.

Se M é um variedade orientada, conexa, com $d = \dim M$, com orientação μ, vimos que existe um gerador canónico em $\mu \in H^d_c(M)$: a classe μ é representada por qualquer forma $\omega \in \Omega^d_c(M)$ tal que:

$$\int_M \omega = 1.$$

Note que μ é a imagem de 1 pela dualidade de Poincaré $H^0(M) \simeq H^d_c(M)$.

A dualidade de Thom, por sua vez, fornece uma classe canónica em $H^r_c(E)$.

Definição 21.6. *A* ***classe de Thom*** *de um fibrado vectorial orientado $\xi = (\pi, E, M)$ sobre uma variedade compacta, orientada, conexa M é a imagem de 1 pela a dualidade de Thom $H^0(M) \simeq H^r_c(E)$. Designamos esta classe por $U \in H^r_c(E)$.*

A classe de Thom permite-nos escrever o inverso da integração ao longo das fibras $\pi_* : H^\bullet_c(E) \to H^{\bullet - r}(M)$, que fornece a dualidade de Thom. De facto, como $\pi_* U = 1$, segue-se da fórmula de projecção (21.1), que a aplicação $H^\bullet(M) \to H^{\bullet + r}_c(E)$ que inverte π_*, é dada por:

$$(\pi_*)^{-1}([\theta]) = [\pi^*\theta] \cup U.$$

A proposição seguinte fornece uma outra caracterização importante da classe de Thom:

Teorema 21.7. *A classe de Thom de um fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$, orientado, sobre uma variedade compacta, orientada, conexa, é a única classe $U \in H^r_c(E)$ que se restringe em cada fibra E_p ao gerador canónico de $H^r_c(E_p)$, i.e.,*

$$\int_{E_p} i^*U = 1, \quad \forall p \in M,$$

onde $i : E_p \hookrightarrow E$ é a inclusão.

Demonstração. Como $\pi_* U = 1$, vemos que a restrição i^*U a cada fibra E_p é uma forma de suporte compacto tal que $\int_{E_p} i^*U = 1$.

Reciprocamente, seja $U' \in H^r_c(E)$ tal que a restrição $i^*U' \in H^r_c(E_p)$ é o gerador canónico, para todo o $p \in M$. Então $\pi_* U' = 1$, e portanto U' coincide com a classe de Thom. $\square$

Podemos utilizar a classe de Thom de um fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ de rank r para determinar um elemento em $H^r(M)$, que é um invariante do fibrado vectorial.

Definição 21.8. *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial orientado de rank r, sobre uma variedade compacta, orientada, conexa M. A **classe de Euler** de ξ é a classe $\chi(\xi) \in H^r(M)$ definida por:*

$$\chi(\xi) \equiv s^*U,$$

onde U é a classe de Thom de ξ e $s : M \to E$ é uma secção global de ξ.

Note que um fibrado vectorial possui sempre secções globais (por exemplo, a secção nula). Por outro lado, se $s_0, s_1 : M \to E$ são duas secções globais, então $H(p,t) = ts_1(p) + (1-t)s_0(p)$ é uma homotopia entre s_0 e s_1, logo $[s_0^*U] = [s_1^*U]$, e a classe de Euler está bem definida.

A proposição seguinte fornece algumas propriedades elementares da classe de Euler. Deixamos a demonstração para os exercícios.

Proposição 21.9. *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial orientado de rank r sobre uma variedade compacta, orientada, conexa M. Então:*

(i) Se $\Psi : \eta \to \xi$ é um morfismo de fibrados vectoriais de rank r que é um isomorfismo linear com determinante positivo nas fibras, e que cobre uma aplicação $\psi : N \to M$, então $\chi(\eta) = \psi^*\chi(\xi)$.

(ii) Se $\bar{\xi}$ designa o fibrado ξ com a orientação oposta, então $\chi(\bar{\xi}) = -\chi(\xi)$.

(iii) Se o rank r é ímpar, então $\chi(\xi) = 0$.

(iv) Se $\xi' = (\pi', E', M)$ é outro fibrado vectorial orientado de rank r' sobre M, então $\chi(\xi \oplus \xi') = \chi(\xi) \cup \chi(\xi')$.

A classe de Euler de um fibrado vectorial é uma *obstrução* à existência de secções globais que não se anulam. De facto, temos:

Teorema 21.10. *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial orientado de rank r sobre uma variedade compacta, orientada, conexa M. Se ξ admite uma secção que não se anula, então $\chi(\xi) = 0$.*

Demonstração. Seja $s : M \to E$ uma secção que não se anula. Se $\omega \in \Omega_c^r(E)$ é uma forma diferencial de suporte compacto que representa a classe de Thom, i.e., $U = [\omega]$, então existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que a imagem da secção cs não intersecta $\operatorname{supp}\omega$. Logo:

$$\chi(\xi) = (cs)^*U = [(cs)^*\omega] = 0.$$

□

Deve-se observar, no entanto, que existem fibrados vectoriais ξ com $\chi(\xi) = 0$, mas que não possuem secções que não se anulam.

A designação *classe de Euler* está relacionada com o caso especial $\xi = TM$. Recordando a noção de índice de um zero isolado de um campo vectorial (ver Lição 18), temos:

Teorema 21.11. *Seja M uma variedade compacta, orientada, conexa, de dimensão d. Então, para qualquer campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ com um número finito de zeros $\{p_1, \dots, p_N\}$, temos:*

$$\chi(TM) = \left(\sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}_{p_i} X\right) \mu \in H^d(M),$$

onde $\mu \in H^d(M)$ é a classe definida pela orientação de M.

Demonstração. Seja $\omega \in \Omega_c^d(TM)$ uma forma diferencial de suporte compacto que representa a classe de Thom. Precisamos de mostrar que:

$$\int_M X^*\omega = \sum_{i=1}^N \operatorname{ind}_{p_i} X.$$

Podemos supor que os zeros de X são não degenerados (exercício). Sejam então (U_i, ϕ_i) sistemas de coordenadas centrados em p_i, e B_i os conjuntos

$$B_i = \phi_i^{-1}(\{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| < 1\}).$$

Observe que podemos supor que $X_p \notin \operatorname{supp}\omega$, para $p \notin \bigcup_{i=1}^N B_i$. Assim, basta verificar que:

$$\int_{B_i} X^*\omega = \operatorname{ind}_{p_i} X.$$

Deixamos a verificação desta identidade como um exercício. □

Um corolário imediato do teorema é:

Corolário 21.12. *Sejam X e Y campos vectoriais com um número finito de zeros, numa variedade compacta, orientada, conexa M. A soma dos índices dos zeros de X é igual à soma dos índices dos zeros de Y.*

Por esta altura altura (e como é sugerido pela notação) o leitor já deverá desconfiar do seguinte resultado:

Teorema 21.13 (Poincaré-Hopf)**.** *Seja M uma variedade compacta, orientada, conexa. Então, para qualquer campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, com um número finito de zeros $\{p_1, \dots, p_N\}$, temos:*

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^N \operatorname{ind}_{p_i} X.$$

Demonstração. Pelo corolário, basta mostrar que existe um campo vectorial X em M, com um número finito de zeros, para a qual a igualdade é satisfeita. Para isso, fixamos uma triangulação $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{r_d}\}$ de M, e construímos um campo vectorial X com as seguintes propriedades:

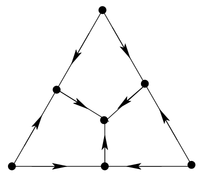
(a) X possui um único zero p_i em cada face da triangulação.
(b) p_i é não-degenerado e $\operatorname{ind}_{p_i} X = (-1)^k$, onde k é a dimensão da face.

Assim, se r_k é o número de faces de dimensão k, vemos que:

$$\sum_{i=1}^N \operatorname{ind}_{p_i} X = r_0 - r_1 + \cdots + (-1)^d r_d.$$

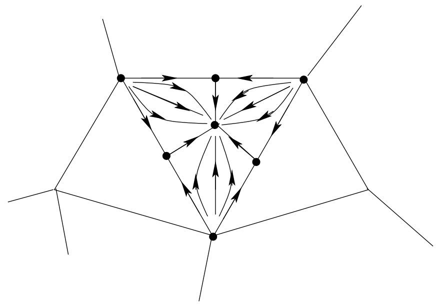
Logo o resultado segue-se da fórmula de Euler (Teorema 18.5). O campo vectorial X pode ser descrito pelo seu espaço de fases, restrito a cada face:

- Nas faces de dimensão 0, o campo vectorial X tem zeros.
- Numa face de dimensão 1, consideramos um zero no centro da face e tomamos curvas que unem os zeros nos vértices a esse zero.



- Numa face de dimensão 2, tomamos um zero no seu centro e unimos com heteroclínicas aos zeros das faces de dimensão 1:

  Completamos o retrato de fase do campo vectorial na face de dimensão 2, de forma que o zero no seu interior é um atractor:



- Em geral, uma vez construído o retrato de fase nas faces de dimensão $k-1$, construímos o retrato de fase numa face de dimensão k, tomando o seu centro e unindo com heteroclínicas esse centro aos zeros nas faces de dimensão $k-1$. Completamos o retrato de fase de forma que o novo zero é um atractor do campo vectorial restrito à face de dimensão k.

Claramente, o campo construído desta forma tem zeros exactamente nos centros da faces. Esses zeros são não-degenerados. Para um zero p_i na face de dimensão k, a linearização do campo em p_i é uma matriz real com k valores próprios com parte real negativa (que correspondem às direcções ao longo da face) e $n-k$ valores próprios com parte real positiva (que correspondem às direcções transversais à faces). O determinante desta matriz tem sinal $(-1)^k$. Assim, para este zero, o índice é $\operatorname{ind}_{p_i} X = (-1)^k$, donde o campo X satisfaz (a) e (b). □

Observação 21.14. Como observámos acima, existem fibrados vectoriais com $\chi(\xi) = 0$, e em que todas as secções se anulam. No entanto, no caso do fibrado tangente, pode-se mostrar que $\chi(TM)$ (e, portanto, $\chi(M)$) é zero sse existe um campo vectorial que não se anula (Exercício 6 desta lição).

Exercícios.

1. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial orientável sobre uma variedade compacta. Demonstre a fórmula de projecção:
$$\pi_*(\pi^*\theta \wedge \omega) = \theta \wedge \pi_*\omega, \quad (\theta \in \Omega^*(M),\ \omega \in \Omega^\bullet_c(E)).$$
2. Sejam $E_1 \to M$ e $E_2 \to M$ fibrados vectoriais orientados sobre uma variedade M compacta, orientada e conexa. Considere a soma de Whitney deste

fibrados vectoriais e as projecções:

$$\begin{tikzcd} & E_1 \oplus E_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ E_1 & & E_2 \end{tikzcd}$$

Mostre que as classes de Thom de E_1, E_2 e $E_1 \oplus E_2$ estão relacionadas por:

$$U_{E_1 \oplus E_2} = \pi_1^* U_{E_1} \wedge \pi_2^* U_{E_2}.$$

3. Sejam $\xi = (\pi, E, M)$ e $\xi' = (\pi', E', M')$ fibrados vectoriais orientados sobre uma variedade M compacta, orientada e conexa. Mostre que:

$$\chi(\xi \oplus \xi') = \chi(\xi) \cup \chi(\xi'),$$

onde na soma $\xi \oplus \xi'$ consideramos a soma directa das orientações.

4. Sejam $\xi = (\pi, E, M)$ e $\eta = (\tau, F, N)$ fibrados vectoriais de rank r orientados, onde M e N são variedades compactas, orientadas e conexas. Mostre que se $\Psi : \eta \to \xi$ é um morfismo de fibrados, que preserva orientações, e que cobre uma aplicação $\psi : N \to M$, então:

$$\chi(\eta) = \psi^* \chi(\xi).$$

Utilize esta propriedade para mostrar que:
 (a) Se $\bar{\xi}$ designa o fibrado ξ com a orientação oposta, então $\chi(\bar{\xi}) = -\chi(\xi)$.
 (b) Se $\operatorname{rank} \xi$ é ímpar, então $\chi(\xi) = 0$.

5. Seja X um campo vectorial em $\mathbb{R}^d$ com um zero isolado x_0, e B uma bola aberta centrada em x_0 tal que o único zero de X em $\bar{B}$ é x_0. Mostre que existe um campo vectorial Y que coincide com X fora de B e possui finitos zeros não degenerados em B cujos índices têm como soma o índice de X em x_0.
(Sugestão: Faça $Y_x = X_x - \rho(x) y_0$, onde y_0 é um valor regular de X suficientemente pequeno e ρ é uma função de classe C^∞ com suporte contido em B constante igual a 1 numa vizinhança de x_0.)

6. Complete a demonstração do Teorema 21.11.

7. Considere o fibrado de linhas **complexo** (portanto fibrado vectorial real de rank 2) $\xi = (\pi, E, \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$, onde $E = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - \{[0,0,1]\}$ e $\pi([z,w,t]) = [z,w]$, definido pelas as cartas trivializantes (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2), onde

$$\begin{aligned} U_1 &= \{[z,1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : z \in \mathbb{C}\}, \quad \phi_1([z,1,t]) = ([z,1],t); \\ U_2 &= \{[1,w] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : w \in \mathbb{C}\}, \quad \phi_2([1,w,t]) = ([1,w],t). \end{aligned}$$

Mostre que:
 (a) A aplicação $s : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to E$ dada por $s([z,w]) = [z,w,z]$ é uma secção de ξ.
 (b) ξ é um fibrado orientável, com $\chi(\xi) = \mu$ para uma certa escolha de orientação, onde μ é o gerador canónico de $H^2(\mathbb{S}^2)$.
 (c) ξ é um fibrado não trivial que não é isomorfo a $T\mathbb{S}^2$.

8. Seja M uma variedade compacta de dimensão d. Pode-se mostrar que:
 (a) Se $p_1, \dots, p_N \in M$ então existe um aberto $U \subset M$, difeomorfo à bola $\{x \in \mathbb{R}^d : ||x|| < 1\}$, tal que $p_1, \dots, p_n \in U$.
 (b) Se $\psi : \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{S}^{d-1}$ possui grau zero, então é homotópica à aplicação constante.

Utilize estes factos para demonstrar que, se $\chi(M)=0$, então existe um campo vectorial em M que não se anula.

Lição 22. Conexões e Curvatura

Em geral, não existe uma forma natural de diferenciar as secções de um fibrado vectorial. A razão é que, em geral, não existe uma forma natural de comparar as fibras sobre pontos diferentes da base. Assim, introduz-se de forma axiomática uma derivada nas secções, a que se chama *conexão*. A definição precisa é a seguinte:

Definição 22.1. *Uma* ***conexão num fibrado vectorial*** $\xi=(\pi,E,M)$ *é uma aplicação*

$$\nabla:\mathfrak{X}(M)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E),\ (X,s)\mapsto\nabla_X s,$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{X_1+X_2}s=\nabla_{X_1}s+\nabla_{X_2}s$*;*
(ii) $\nabla_X(s_1+s_2)=\nabla_X s_1+\nabla_X s_2$*;*
(iii) $\nabla_{fX}s=f\nabla_X s$*;*
(iv) $\nabla_X(fs)=f\nabla_X s+X(f)s$*.*

As propriedades (iii) e (iv) mostram que uma conexão ∇ é local. Assim, ∇ pode ser restrita a um aberto $U\subset M$, resultando num conexão em $\xi|_U$. Por outro lado, a aplicação $X\mapsto\nabla_X$ é $C^\infty(M)$-linear, logo, para toda a secção s definida numa vizinhança U de $p\in M$ e para $\mathbf{v}\in T_pM$, podemos definir

$$\nabla_{\mathbf{v}}s\equiv\nabla_X s(p)\in E_p,$$

onde X é qualquer campo vectorial definido numa vizinhança de p e tal que $X_p=\mathbf{v}$. Note, no entanto, que $\nabla_{\mathbf{v}}s$ depende dos valores de s numa vizinhança de p, e não apenas de $s(p)$ (propriedade (iv) da definição).

Seja $U\subset M$ um aberto trivializante para ξ. Então podemos escolher uma base $\{s_1,\dots,s_r\}$ para as secções de $\xi|_U$, de forma que qualquer outra secção é uma combinação linear:

$$s=f^1s_1+\cdots+f^rs_r.$$

para certas funções $f_i\in C^\infty(U)$. A conexão ∇ fica determinada pela sua acção nestas secções, pois se X é um campo vectorial, então pela propriedade (iv), temos que:

$$\nabla_X s=\sum_{a=1}^r f^a\nabla_X s_a+X(f^a)s_a.$$

Por outro lado, se U é ainda um domínio de um sistema de coordenadas $(x^1,\dots,x^d)$ de M, então temos que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}s_a=\sum_{b=1}^r\Gamma_{ia}^b s_b,\quad (i=1,\dots,d,\ a=1,\dots,r),$$

para certas funções $\Gamma_{ia}^b s_b \in C^\infty(U)$. Estas funções chamam-se os **símbolos de Christoffel** da conexão. Portanto localmente

$$\begin{aligned}\nabla_X s &= \sum_{a=1}^{r}\left(X(f^a) + \sum_{i=1}^{d}\sum_{b=1}^{r}\Gamma_{ib}^a X^i f^b\right) s_a \\ &= \sum_{a=1}^{r}\left(X(f^a) + \sum_{b=1}^{r}\omega_b^a(X) f^b\right) s_a,\end{aligned}$$

onde a matriz $r \times r$ de 1-formas diferenciais em U definida por

$$\omega_b^a = \sum_{i=1}^{d}\Gamma_{ib}^a \mathrm{d}x^i$$

se diz a **1-forma da conexão**.

Exemplo 22.2.
Recordemos que um fibrado $\xi = (\pi, E, M)$ de rank r é trivial sse possui uma base de secções globais $\{s_1, \dots, s_r\}$. Para cada escolha de uma base, podemos definir uma conexão em ξ por:

$$\nabla_X s_a = 0, \quad (a = 1, \dots, r).$$

Esta conexão depende da escolha de base trivializante.

A colecção das conexões sobre um fibrado vectorial ξ não possui uma estrutura de espaço vectorial. No entanto, se $f \in C^\infty(M)$ é uma função diferenciável e ∇_1 e ∇_2 são conexões, então a combinação linear

$$f\nabla_1 + (1-f)\nabla_2,$$

ainda define uma conexão em ξ. Isto permite-nos mostrar a

Proposição 22.3. *Todo o fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$ admite uma conexão.*

Demonstração. Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de M por abertos trivializantes. Pelo exemplo acima, em cada U_α podemos escolher uma conexão ∇^α. Definimos uma conexão ∇ em M "colando" estas conexões: se $\{\rho_\alpha\}$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_\alpha\}$, então

$$\nabla \equiv \sum_\alpha \rho_\alpha \nabla^\alpha,$$

define uma conexão em ξ. □

Deixamos como exercício verificar que as construções com fibrados e as conexões estão relacionadas da seguinte forma:

Proposição 22.4. *Sejam ξ e ξ' fibrados vectoriais sobre M, com conexões ∇ e ∇'. Então os fibrados associados $\xi \oplus \xi'$, ξ^* e $\wedge^k \xi$, possuem todos conexões induzidas por ∇ e ∇'. Se $\psi : N \to M$ é uma aplicação diferenciável, então $\psi^*\xi$ possui uma conexão induzida por ∇.*

Se ∇ é uma conexão num fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$, então definimos a **curvatura** de ∇ como sendo a aplicação $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\xi) \to \Gamma(\xi)$ definida por:

$$(X, Y, s) \mapsto R(X, Y)s \equiv \nabla_X(\nabla_Y s) - \nabla_Y(\nabla_X s) - \nabla_{[X,Y]}s.$$

Um cálculo simples mostra que R é $C^\infty(M)$-linear em todos os argumentos, de forma que podemos pensar em R como uma aplicação de fibrados (um "tensor") $R : TM \oplus TM \oplus E \to E$.

A expressão local do tensor de curvatura num aberto trivializante $U \subset M$ para ξ, em termos de uma base de secções $\{s_1, \dots, s_r\}$ e de coordenadas $(x^1, \dots, x^d)$, é dada por:

$$R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})s_a = \sum_{b=1}^{r} R^b_{ija} s_b,$$

onde as componentes R^b_{ija} podem ser expressas em termos dos símbolos de Cristoffel Γ^b_{ia} por:

$$R^b_{ija} = \frac{\partial \Gamma^b_{ja}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^b_{ia}}{\partial x^j} + \sum_{c=1}^{r} \Gamma^b_{ic} \Gamma^c_{ja} - \sum_{c=1}^{r} \Gamma^b_{jc} \Gamma^c_{ia}.$$

Uma vez que R^b_{ija} é anti-simétrico nos índices i, j, podemos também codificar a curvatura em termos de uma matriz de formas diferenciais:

$$\Omega^b_a = \sum_{i<j} R^b_{ija} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j,$$

À matriz $\Omega = [\Omega^b_a]$ chama-se a **2-forma de curvatura** da conexão. Deixamos como exercício verificar que a 1-forma de conexão e a 2-forma de curvatura satisfazem a **equação de estrutura**:

$$\Omega^a_b = \mathrm{d}\omega^a_b + \sum_c \omega^a_c \wedge \omega^c_b.$$

Esta equação pode, também, ser escrita na forma matricial:

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega.$$

Tomando a derivada exterior da equação de estrutura obtemos:

Teorema 22.5 (Identidade de Bianchi)**.** *Para uma conexão num fibrado vectorial ξ, com 1-forma de conexão ω e 2-forma de curvatura Ω, é válida a identidade:*

$$\mathrm{d}\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega.$$

A fim de fornecer uma interpretação geométrica para a curvatura duma conexão, vamos estudar o transporte paralelo ao longo de curvas em M. Esta noção exprime, de forma precisa, o facto de que uma conexão permite comparar as fibras sobre pontos diferentes da base.

Seja, então, $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial com uma conexão ∇. Se $c : [0,1] \to M$ é uma curva diferenciável, então o fibrado $c^*\xi$ possui uma conexão induzida, que designamos ainda por ∇. Uma secção s do fibrado $c^*\xi$ não é mais do que uma secção de ξ ao longo de c, i.e., uma aplicação diferenciável $s : [0,1] \to E$ tal que $\pi(s(t)) = c(t)$, para todo $t \in [0,1]$. A

derivada covariante de uma secção ao longo da curva c é a secção ao longo de c dada por:

$$\frac{Ds}{Dt} \equiv \nabla_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}} s.$$

Assim, obtemos uma forma de diferenciar secções ao longo de uma curva c. Dizemos que uma secção s ao longo de uma curva c é uma **secção paralela** se a sua derivada covariante é nula: $\frac{Ds}{Dt} = 0$.

Fixemos coordenadas locais $(U, x^1, \ldots, x^d)$ e secções trivializantes $\{s_1, \ldots, s_r\}$ sobre U. Se escrevermos a curva $c(t)$ em coordenadas locais $c^i(t) = x^i(c(t))$, então a derivada covariante de uma secção $s(t) = \sum_a v^a(t) s_a(c(t))$ ao longo de c tem componentes:

$$\left(\frac{Ds}{Dt}\right)^a = \frac{\mathrm{d}v^a(t)}{\mathrm{d}t} + \sum_{b=1}^{r} \frac{\mathrm{d}c^i(t)}{\mathrm{d}t} \Gamma^a_{ib}(c(t)) v^b(t), \quad (a = 1, \ldots, r).$$

Observação 22.6. Observe que, mesmo para a curva constante $c(t) = p_0$, a derivada covariante ao longo de c não é nula! De facto, neste caso, uma secção ao longo de c não é mais do que uma curva $f : [0,1] \to E_{p_0}$ na fibra sobre p_0, e a derivada covariante é a derivada usual desta curva.

Recorrendo a resultados standard da teoria das equações diferenciais ordinárias, obtemos imediatamente:

Lema 22.7. *Dada uma curva $c : [0,1] \to M$ e um vector na fibra $v_0 \in E_{c(0)}$, existe uma única secção s ao longo de c que é paralela e tem condição inicial $s(0) = v_0$.*

Nas condições do lema, dizemos que os vectores $s(t) \in E_{c(t)}$ são obtidos por **transporte paralelo ao longo de** c. Designamos por $\tau_t : E_{c(0)} \to E_{c(t)}$ a operação de transporte paralelo, definida por $\tau_t(v_0) = s(t)$.

Proposição 22.8. *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial com uma conexão ∇, e $c : [0,1] \to M$ uma curva diferenciável. Então:*

(i) O transporte paralelo $\tau_t : E_{c(0)} \to E_{c(t)}$ ao longo de c é um isomorfismo linear.

(ii) Se $\mathbf{v} = c'(0) \in T_{c(0)}M$ é o vector tangente a c, então:

$$\nabla_{\mathbf{v}} s = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\tau_t^{-1} s(c(t)) - s(c(0))\right),$$

para qualquer secção $s \in \Gamma(\xi)$.

Demonstração. Como a equação diferencial que define o transporte paralelo é linear, é claro que τ_t é linear. Por outro lado, τ_t é invertível, pois a sua inversa é transporte paralelo ao longo da curva $c : [0,t] \to M$, percorrida em sentido contrário. A demonstração de (ii) é deixada como exercício. □

Estamos agora prontos para dar uma interpretação geométrica da curvatura. Para isso, escolhemos uma imersão injectiva $\phi : [0,1] \times [0,1] \to M$ (i.e., uma superfície parametrizada), e vamos designar por (x, y) os parâmetros. Dada uma secção s do fibrado ao longo de ϕ, introduzimos as seguintes derivadas:

- $\frac{Ds}{Dx}(x,y)$ derivada covariante ao longo da curva $t \mapsto \phi(t,y)$ em $t = x$;

- $\frac{Ds}{Dy}(x,y)$ derivada covariante ao longo da curva $t \mapsto \phi(x,t)$ em $t = y$;
- $\frac{\partial\phi}{\partial x} \equiv \phi_*(\frac{\partial}{\partial x})$ e $\frac{\partial\phi}{\partial y} \equiv \phi_*(\frac{\partial}{\partial y})$.

Temos então:

Proposição 22.9. *Para uma secção s de ξ ao longo de uma superfície parametrizada $\phi : [0,1] \times [0,1] \to M$, a curvatura de uma conexão satisfaz:*

$$\frac{D}{Dx}\frac{Ds}{Dy} - \frac{D}{Dy}\frac{Ds}{Dx} = R(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y})s.$$

A demonstração é imediata calculando em coordenadas locais.

Uma **conexão plana** é uma conexão para a qual o tensor de curvatura é identicamente nulo. Um corolário do resultado anterior, é a seguinte forma canónica local para conexões planas:

Corolário 22.10. *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r com uma conexão plana ∇. Para todo o $p \in M$, existe uma base de secções locais $\{s_1, \dots, s_r\}$ definidas numa vizinhança U de p, tais que*

$$\nabla_X s_i = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Assim, $\xi|_U$ é isomorfo ao fibrado trivial ε_U^r com a conexão plana canónica.

Demonstração. Seja U um vizinhança trivializante difeomorfa a $\mathbb{R}^d$. Para construir as secções $\{s_1, \dots, s_r\}$, escolhemos uma base para E_p e fazemos transporte paralelo de cada elemento da base, ao longo das rectas que unem $q \in U$ a p. As secções que se obtêm satisfazem a condição da proposição. □

O corolário anterior descreve as conexões planas localmente. Para descrever o que se passa com uma conexão plana globalmente, vamos introduzir o conceito de *holonomia*. Seja, então, $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r com uma conexão ∇ e fixemos um ponto na base $p_0 \in M$. Para cada curva $c : [0,1] \to M$ fechada, com base em p_0 ($c(0) = c(1) = p_0$) o transporte paralelo ao longo de $c(t)$ fornece um isomorfismo linear $H_{p_0}(c) \equiv \tau_1 : E_{p_0} \to E_{p_0}$. Podemos, ainda, estender esta definição a curvas fechadas seccionalmente C^1. Deve ser claro que, se c_1 e c_2 designam curvas fechadas, seccionalmente C^1, e $c_1 \cdot c_2$ designa a sua concatenação, então

$$H_{p_0}(c_1 \cdot c_2) = H_{p_0}(c_1) \circ H_{p_0}(c_2).$$

Para conexões planas temos a seguinte propriedade, que é um corolário do resultado anterior:

Lema 22.11. *Se c_0 e c_1 são curvas homotópicas com base em p_0, então $H_{p_0}(c_0) = H_{p_0}(c_1)$.*

Assim, obtemos um homomorfismo $H_{p_0} : \pi_1(M, p_0) \to GL(E_{p_0})$, a que chamamos **homomorfismo de holonomia** da conexão plana ∇, com base em p_0. Note que se $q_0 \in M$ é outro ponto da mesma componente conexa de M, então podemos escolher um caminho $c : [0,1] \to M$, que une p_0 a q_0 (i.e., $c(0) = p_0$ e $c(1) = q_0$). Transporte paralelo ao longo de $c(t)$ fornece um isomorfismo $\tau : E_{p_0} \to E_{q_0}$ e:

$$H_{q_0} = \tau \circ H_{p_0} \circ \tau^{-1}.$$

Logo, os homomorfismos de holonomia relativos a pontos na mesma componente conexa são conjugados. Assim, no caso conexo, podemos ignorar o ponto base e obtemos:

Teorema 22.12. *Seja M uma variedade conexa. Se $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado vectorial de rank r com uma conexão plana ∇, então a holonomia de ∇ induz uma representação $H : \pi_1(M) \to GL(\mathbb{R}^r)$ do grupo fundamental. Reciprocamente, toda a representação do grupo fundamental de M, define um fibrado vectorial de rank r com uma conexão plana ∇, cuja holonomia induz a representação.*

Demonstração. Já vimos acima que um fibrado vectorial com uma conexão plana, induz uma representação do grupos fundamental. Reciprocamente, seja $H : \pi_1(M, p_0) \to GL(\mathbb{R}^r)$ uma representação do grupo fundamental, de forma que temos uma acção de $\pi(M, p_0)$ em $\mathbb{R}^r$. Recordemos, também, que o grupo $\pi_1(M, p_0)$ actua no revestimento universal $\widetilde{M}$ por transformações de revestimento. Se identificarmos $\widetilde{M}$ com o conjunto das classes de homotopia de caminhos $[c]$, com ponto inicial $c(0) = p_0$, a acção de $\pi_1(M, p_0)$ em $\widetilde{M}$ é dada por concatenação:

$$\pi_1(M, p_0) \times \widetilde{M} \to \widetilde{M}, \ ([\gamma], [c]) \mapsto [\gamma \cdot c].$$

Note que esta acção é livre e propriamente descontínua, logo a acção diagonal de $\pi_1(M)$ em $\widetilde{M} \times \mathbb{R}^r$ também é livre e propriamente descontínua. Assim, o espaço quociente é uma variedade, que designamos por E. Para a aplicação $\pi : E \to M$ definida por:

$$\pi([[c], \mathbf{v}]) = c(1),$$

o triplo $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado vectorial. A conexão canónica plana em $\widetilde{M} \times \mathbb{R}^r$ induz uma conexão em ξ para a qual a holonomia com base em p_0 é precisamente $H : \pi_1(M, p_0) \to GL(\mathbb{R}^r)$. □

O exemplo clássico de uma conexão é a *conexão de Levi-Civita* no fibrado tangente de uma variedade Riemanniana. Vamos recordar de seguida a construção desta conexão. Começamos com uma definição:

Definição 22.13. *Seja ξ um fibrado vectorial sobre M com uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$. Uma conexão em ξ diz-se compatível com a métrica se*

$$X(\langle s_1, s_2 \rangle) = \langle \nabla_X s_1, s_2 \rangle + \langle s_1, \nabla_X s_2 \rangle,$$

para todo o campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e todo o par de secções $s_1, s_2 \in \Gamma(\xi)$.

A proposição seguinte fornece caracterizações alternativas para uma conexão ser compatível com uma métrica Riemanniana.

Proposição 22.14. *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial com uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$. Para uma conexão ∇ em ξ, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *∇ é compatível com a métrica.*
(ii) *O transporte paralelo $\tau_t : E_{c(0)} \to E_{c(t)}$ ao longo de qualquer curva c, é uma isometria.*
(iii) *Para toda a base de secções trivializante ortonormada, a 1-forma da conexão $\omega = [\omega_a^b]$ é uma matriz anti-simétrica.*

Vejamos, agora, o caso do fibrado tangente $\xi = TM$ de uma variedade M. Fixada uma conexão ∇ em TM, as noções que discutimos anteriormente adquirem um significado ainda mais geométrico. Por exemplo, se $M = \mathbb{R}^d$, então temos a conexão plana canónica ∇ em $T\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, que corresponde à derivada direccional usual. Para esta conexão, um campo vectorial X (i.e., uma secção de TM) é paralelo ao longo de uma curva $c(t)$ sse os vectores $X_{c(t)}$ são paralelos no sentido usual.

Há, no entanto, vários conceitos que podemos associar a uma conexão no fibrado tangente TM e que não fazem sentido para conexões em fibrados vectoriais arbitrários. Isto deve-se a que, neste caso, uma conexão permite diferenciar campos vectoriais ao longo de campos vectoriais, o que torna a situação particularmente simétrica.

Por exemplo, para uma conexão ∇ em TM uma **geodésica** é uma curva $c(t)$ para a qual a derivada $\dot{c}(t)$ (que é um campo vectorial ao longo de $c(t)$) é paralela, i.e., satisfaz:

$$\frac{D\dot{c}}{Dt}(t) = 0.$$

É fácil de ver que, dado $p_0 \in M$ e $\mathbf{v} \in T_{p_0}M$, existe uma única geodésica $c(t)$ tal que $c(0) = p_0$ e $\dot{c}(0) = \mathbf{v}$. Esta geodésica está definida para $0 \leq t < \varepsilon$, e escolhendo $\mathbf{v}$ suficientemente pequeno podemos assumir que $\varepsilon > 1$. Nesse caso, definimos:

$$\exp_{p_0}(\mathbf{v}) \equiv c(1).$$

Assim, obtemos uma **aplicação exponencial** $\exp_{p_0} : U \to M$, definida numa vizinhança $U \subset T_{p_0}M$ da origem.

Um outra noção que só faz sentido para conexões ∇ em TM é a noção de *torção*: é a aplicação $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definida por:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Como T é $C^\infty(M)$-linear em ambos os argumentos, define um morfismo de fibrados $T : TM \oplus TM \to TM$, e chamamos a T o **tensor de torção**. Uma **conexão simétrica** é uma conexão ∇ com tensor de torção nula. A seguinte proposição fornece uma caracterização geométrica do tensor de torção:

Proposição 22.15. *Para uma superfície parametrizada $\phi : [0,1] \times [0,1] \to M$, a torção de uma conexão ∇ em TM satisfaz:*

$$\frac{D}{Dx}\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{D}{Dy}\frac{\partial \phi}{\partial x} = T(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial x}).$$

Demonstração. Imediata, calculando ambos os lados em coordenadas locais. $\square$

Finalmente, para uma variedade Riemanniana existe uma escolha natural de conexão:

Proposição 22.16. *Seja $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ uma variedade Riemanniana. Existe uma única conexão em TM simétrica e compatível com a métrica.*

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos vectoriais em M. A condição de compatibilidade de ∇ com a métrica, fornece:

$$\begin{aligned} X \cdot \langle Y, Z\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \\ Y \cdot \langle Z, X\rangle &= \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \\ Z \cdot \langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \end{aligned}$$

Somando as primeiras duas equações e subtraindo a terceira, obtemos:

$$\begin{aligned} X \cdot \langle Y, Z\rangle + Y \cdot \langle Z, X\rangle - Z \cdot \langle X, Y\rangle &= 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle \\ &\quad - \langle X, [Y, Z]\rangle - \langle Y, [Z, X]\rangle - \langle Z, [X, Y]\rangle, \end{aligned}$$

onde utilizámos a simetria da conexão. Esta relação mostra que as duas condições determinam completamente a conexão pela fórmula:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z\rangle &= \frac{1}{2}\left(X \cdot \langle Y, Z\rangle + Y \cdot \langle Z, X\rangle - Z \cdot \langle X, Y\rangle\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle\right). \end{aligned}$$

Por outro lado, é fácil verificar que esta fórmula define uma conexão em TM, simétrica e compatível com a métrica. □

A conexão da proposição é conhecida como a **conexão de Levi-Civita** da variedade Riemanniana. Define-se curvatura, geodésica, etc., da variedade Riemanniana, como as noções correspondentes da conexão de Levi-Civita. É claro que, nesta situação, a métrica fornece informação adicional para além da conexão. Por exemplo, o Corolário 22.10, no caso de uma variedade Riemanniana, admite a seguinte versão mais fina:

Teorema 22.17. *Seja $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ uma variedade Riemanniana, com tensor de curvatura nulo: $R = 0$. Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U que é isométrica a um aberto de $\mathbb{R}^d$, com a métrica euclidiana.*

Deixamos a demonstração como exercício.

Exercícios.

1. Seja ξ um fibrado vectorial sobre M, com conexão ∇. Mostre que:
   (a) Os fibrados associados ξ^* e $\wedge^k \xi$ possuem conexões induzidas por ∇.
   (b) Se $\psi : N \to M$ é uma aplicação diferenciável, então $\psi^*\xi$ possui uma conexão induzida por ∇.

   Determine as 1-formas de todas estas conexões em termos da 1-forma da conexão de ∇.

2. Sejam ξ e ξ' fibrados vectoriais sobre M, com conexões ∇ e ∇'. Mostre que $\xi \oplus \xi'$ possui uma conexão induzida por ∇ e ∇'. Determine a 1-forma desta conexão em termos das 1-formas das conexões de ∇ e ∇'.

3. Para uma conexão num fibrado vectorial ξ, com 1-forma de conexão ω e 2-forma de curvatura Ω, verifique a equação de estrutura e a identidade de Bianchi.

4. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r com uma conexão ∇. Sejam $\{s_1, \dots, s_r\}$ e $\{s'_1, \dots, s'_r\}$ dois referenciais locais num aberto trivializante

$U \subset M$, relacionados pela matriz de mudança de base $A \in C^\infty(U, GL(r))$. Mostre que:

(a) As matrizes ω e ω' das formas de conexão associada aos dois referenciais satisfazem
$$\omega' = A^{-1}\omega A + A^{-1}\mathrm{d}A.$$

(b) As matrizes Ω e Ω' das formas de curvatura associadas aos dois referenciais satisfazem
$$\Omega' = A^{-1}\Omega A.$$

5. Considere o fibrado de linhas complexo $\xi = \big(\pi, \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) - \{[0,0,1]\}, \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\big)$ definido anteriormente. Mostre que:

(a) Tomando como abertos trivializantes
$$U_1 = \{[z,1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : z \in \mathbb{C}\};$$
$$U_2 = \{[1,w] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : w \in \mathbb{C}\}$$
existe um cociclo $g_{21} : U_1 \cap U_2 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ para este fibrado dado por
$$g_{21}([z,1]) = \frac{\overline{z}}{|z|}.$$

(b) As formas-1 com valores complexos ω e η dadas nas coordenadas z e w por
$$\omega = \frac{1}{2}\frac{z\mathrm{d}\overline{z} - \overline{z}\mathrm{d}z}{1+|z|^2} \qquad \text{e} \qquad \eta = \frac{1}{2}\frac{w\mathrm{d}\overline{w} - \overline{w}\mathrm{d}w}{1+|w|^2}$$
definem para este cociclo uma conexão ∇ em ξ.

(c) A forma de curvatura é dada em U_1 por
$$\Omega = \frac{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\overline{z}}{\left(1+|z|^2\right)^2}.$$

6. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial com uma conexão ∇. Para uma curva diferenciável $c : [0,1] \to M$, designe o transporte paralelo ao longo de c por $\tau_t : E_{c(0)} \to E_{c(t)}$. Mostre que se $\mathbf{v} = c'(0) \in T_{c(0)}M$ é o vector tangente a c, então:
$$\nabla_{\mathbf{v}} s = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(\tau_t^{-1} s(c(t)) - s(c(0))\right),$$
para qualquer secção $s \in \Gamma(\xi)$.

7. Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Mostre que existe uma única conexão ∇ em TG, que é invariante por translações à esquerda e à direita, e pela inversão $g \mapsto g^{-1}$. Mostre, ainda, que ∇ satisfaz as seguintes propriedades:

(a) Para todos os campos invariantes à esquerda $X, Y \in \mathfrak{g}$:
$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y].$$

(b) A torção de ∇ é nula e a sua curvatura é dada por:
$$R(X,Y) \cdot Z = \frac{1}{4}[[X,Y],Z], \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(G).$$

(c) A exponencial de ∇ na identidade $\exp_e$ coincide com a exponencial $\exp : \mathfrak{g} \to G$.

(d) O transporte paralelo ao longo da curva $c(t) = \exp(tX)$, $X \in \mathfrak{g}$, é dado por:
$$\tau_t(\mathbf{v}) = \mathrm{d}L_{\exp(\frac{t}{2}X)} \cdot \mathrm{d}R_{\exp(\frac{t}{2}X)} \cdot \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in T_eG.$$

(e) As geodésicas são as translações dos subgrupos a 1 parâmetro.

8. Seja ξ um fibrado vectorial sobre M com uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$. Mostre que ξ possui uma conexão compatível com a métrica.

9. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial com uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$. Para uma conexão ∇ em ξ, mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:
   (a) ∇ é compatível com a métrica.
   (b) O transporte paralelo $\tau_t : E_{c(0)} \to E_{c(t)}$ ao longo de qualquer curva c, é uma isometria.
   (c) Para toda a base ortonormada de secções trivializantes, a 1-forma da conexão $\omega = [\omega^a_b]$ é uma matriz anti-simétrica.

10. Seja $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ uma variedade Riemanniana, com tensor de curvatura nulo: $R = 0$. Mostre que, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U isométrica a um aberto de $\mathbb{R}^d$ com a métrica euclidiana.

Lição 23. Classes Características

Nesta lição vamos estudar certas classes de cohomologia que se podem associar a um fibrado vectorial. Estas classes são invariantes das classes de isomorfismo de fibrados vectoriais, e caracterizam certas propriedades dos fibrados, a menos de isomorfismo.

Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vectorial. Vamos considerar as formas diferenciais com valores em E:
$$\Omega^\bullet(M; E) = \Omega^\bullet(M) \otimes \Gamma(E).$$
Assim, $\Omega^k(M; E)$ é o espaço das secções do fibrado vectorial $\wedge^k T^*M \otimes E$. Uma forma diferencial de grau k com valores em E é, pois, uma aplicação k-multilinear alternada:
$$\omega : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E).$$
Em particular, $\Omega^0(M; E)$ é o espaço $\Gamma(E)$ formado pelas secções do fibrado $\pi : E \to M$. O produto exterior de uma forma com valores em E por uma forma com valores em F define-se do mesmo modo que o produto exterior de formas com valores em $\mathbb{R}$, mas é agora uma forma com valores em $E \otimes F$.

Uma conexão ∇ no fibrado vectorial $\pi : E \to M$ determina um operador $\mathrm{d}_\nabla : \Omega^0(M; E) \to \Omega^1(M; E)$, através da fórmula:
$$(\mathrm{d}_\nabla s)(X) = \nabla_X s.$$
A aplicação d_∇ é $\mathbb{R}$-linear e satisfaz:
$$\mathrm{d}_\nabla(fs) = \mathrm{d}f \otimes s + f\mathrm{d}_\nabla s.$$
Reciprocamente, todo a aplicação $\Omega^0(M; E) \to \Omega^1(M; E)$, que é $\mathbb{R}$-linear e satisfaz esta propriedade, define uma conexão. Esta é, pois, uma forma diferente de pensar nas conexões em E.

Deixamos como exercício verificar que o operador d_∇ se estende, de forma única, a formas diferenciais com valores em E de qualquer grau:

Proposição 23.1. *Existe um único operador* $\mathrm{d}_\nabla : \Omega^\bullet(M; E) \to \Omega^{\bullet+1}(M; E)$ *que é* $\mathbb{R}$*-linear e satisfaz a identidade de Leibniz:*
$$\mathrm{d}_\nabla(\omega \otimes s) = \mathrm{d}\omega \otimes s + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \mathrm{d}_\nabla(s), \quad \forall \omega \in \Omega^\bullet(M), s \in \Gamma(E).$$

Este operador é um diferencial, i.e., $\mathrm{d}_\nabla \circ \mathrm{d}_\nabla = 0$, *sse a conexão é plana.*

Explicitamente, o operador $\mathrm{d}_\nabla : \Omega^k(M;E) \to \Omega^{k+1}(M;E)$ é dado pela fórmula:

$$\begin{aligned}(23.1)\quad \mathrm{d}_\nabla\omega(X_0,\dots,X_k) = &\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\nabla_{X_i}(\omega(X_0,\dots,\widehat{X}_i,\dots,X_k))\\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\dots,\widehat{X}_i,\dots,\widehat{X}_j,\dots,X_k).\end{aligned}$$

Por outro lado, d_∇ e o tensor de curvatura R_∇ da conexão estão relacionados por:

$$\mathrm{d}_\nabla(\mathrm{d}_\nabla s)(X,Y) = R_\nabla(X,Y)s, \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M), s \in \Gamma(E).$$

No caso em que ∇ é uma conexão plana, a cohomologia determinada pelo complexo $(\Omega^\bullet(M;E), \mathrm{d}_\nabla)$ chama-se a **cohomologia de** M **com coeficientes em** E e designa-se por $H^\bullet(M;E)$. Em geral, $R \neq 0$ mas satisfaz a identidade de Bianchi, o que se traduz nesta linguagem na identidade:

$$(23.2)\qquad \mathrm{d}_\nabla R_\nabla = 0.$$

Nesta equação, vemos o tensor de curvatura como uma aplicação bilinear alternada $R : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \to \Gamma(\mathrm{End}(E))$, i.e., é uma 2-forma com valores em $\mathrm{End}(E)$. Por sua vez, em $\mathrm{End}(E)$ tomamos a conexão induzida por ∇.

A equação de Bianchi pode ser utilizada para associar à conexão certas classes de cohomologia. Para isso, precisamos primeiro de recordar algumas noções elementares sobre a relação entre polinómios homogéneos num espaço vectorial V e aplicações $P : V\times\cdots\times V \to \mathbb{R}$ multilineares e simétricas.

Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Vamos designar por $I^k(G)$ o espaço das aplicações $P : \mathfrak{g}\times\cdots\times\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ que são k-multilineares, simétricas, e invariantes pela acção adjunta:

$$P(\mathrm{Ad}\,g\cdot X_1,\dots,\mathrm{Ad}\,g\cdot X_k) = P(X_1,\dots,X_k), \quad \forall g\in G,\ X_1,\dots,X_k\in\mathfrak{g}.$$

Introduzimos, ainda, o anel de todas as expressões simétricas invariantes:

$$I(G) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} I^k(G).$$

O produto em $I(G)$ é o produto simétrico:

$$P_1P_2(X_1,\dots,X_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} P_1(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})P_2(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+l)}).$$

Note que, se $P \in I^k(G)$ então a aplicação $\widetilde{P} : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\widetilde{P} : X \mapsto P(X,\dots,X),$$

é um polinómio homogéneo, de grau k, e Ad-invariante. Reciprocamente, todo o polinómio $\widetilde{P} : \mathfrak{g}\to\mathbb{R}$, homogéneo de grau k, e Ad-invariante, determina uma aplicação k-multilinear, simétrica, e Ad-invariante. De facto, se

$\xi^1, \ldots, \xi^r$ é uma base para $\mathfrak{g}^*$, então um polinómio $\widetilde{P} : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ homogéneo de grau k, escreve-se na forma:

$$\widetilde{P}(X) = \sum_{i_1 \cdots i_k = 1}^{r} a_{i_1 \cdots i_k} \xi^{i_1}(X) \cdots \xi^{i_k}(X),$$

onde os coeficientes $a_{i_1 \cdots i_k}$ são simétricos nos índices. Este polinómio define uma aplicação k-multilinear, simétrica, e Ad-invariante, por:

$$P(X_1, \ldots, X_k) = \sum_{i_1 \cdots i_k = 1}^{r} a_{i_1 \cdots i_k} \xi^{i_1}(X_1) \cdots \xi^{i_k}(X_k).$$

Assim, podemos identificar $I(G)$ como a álgebra dos polinómios em $\mathfrak{g}$ que são Ad-invariantes. Sob esta identificação, o produto de polinómios corresponde ao produto simétrico.

Nesta lição, vamos estar interessados, apenas, no caso $G = GL(r)$, de forma que $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(r)$ é o espaço vectorial das matrizes $r \times r$. A condição de invariância reduz-se a:

$$P(AX_1A^{-1}, \ldots, AX_kA^{-1}) = P(X_1, \ldots, X_k), \quad X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{gl}(r),$$

para toda a matriz invertível $A \in GL(r)$. A observação chave é a seguinte:

Proposição 23.2. *Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vectorial de rank r. Todo o elemento $P \in I^k(GL(r))$ determina uma aplicação*

$$P : \Omega^\bullet(M; \otimes^k \operatorname{End}(E)) \to \Omega^\bullet(M),$$

que satisfaz:

$$\mathrm{d}P = P\mathrm{d}_\nabla.$$

Demonstração. Observe que se $s_1, \ldots, s_r$ é um base local de secções de E, então, dada uma secção $A \in \Gamma(\operatorname{End}(E))$, temos:

$$As_a = \sum_{b=1}^{r} A_a^b s_b,$$

para certas funções A_i^j. Assim, para cada $P \in I^k(GL(r))$, podemos definir $P : \Gamma(\otimes^k \operatorname{End}(E)) \to C^\infty(M)$ por:

$$P(A_1 \otimes \cdots \otimes A_k) = P([(A_1)_a^b], \cdots, [(A_k)_a^b]).$$

Pela condição de invariância, esta definição é independente da escolha de base local de secções. Como uma forma $\omega \in \Omega^l(M; \otimes^k \operatorname{End}(E))$ é uma aplicação l-multilinear alternada $\omega : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(\otimes^k \operatorname{End}(E))$, a composição com P determina uma aplicação l-multilinear alternada $P \circ \omega : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$, i.e., um elemento $P(\omega) \in \Omega^l(M)$. Deixamos como exercício verificar que:

$$\mathrm{d}P = P\mathrm{d}_\nabla.$$

□

Se ∇ é uma conexão num fibrado vectorial $\pi : E \to M$, com curvatura R, então $R^k \in \Omega^{2k}(M; \otimes^k \operatorname{End}(E))$. Logo, se $P \in I^k(GL(r))$, obtemos um forma diferencial $P(R^k) \in \Omega^{2k}(M)$. Pela identidade de Bianchi (23.2), obtemos:

$$\mathrm{d}P(R^k) = P(\mathrm{d}_\nabla R^k) = kP(R^{k-1}\mathrm{d}_\nabla R) = 0,$$

logo $P(R)$ é uma forma diferencial de grau $2k$ fechada. Esta forma diferencial é dada, explicitamente, por

$$P(R^k)(X_1, \dots, X_{2k}) = \frac{1}{(2k)!} \sum_{\sigma \in S_{2k}} (-1)^{\operatorname{sgn}\sigma} P(R_{\sigma(1)\sigma(2)}, \dots, R_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)}).$$

onde $X_1, \dots, X_{2k} \in \mathfrak{X}(M)$ e $R_{ij} \equiv R(X_i, X_j)$. Pode-se, ainda, verificar que, se $P_1 \in I^k(GL(r))$ e $P_2 \in I^l(GL(r))$, então:

$$P_1 P_2(R^{k+l}) = P_1(R^k) \wedge P_2(R^l) \in \Omega^{2(k+l)}(M).$$

Desta forma, concluímos que:

Teorema 23.3 (Chern-Weil)**.** *Seja ∇ uma conexão num fibrado vectorial $\pi : E \to M$, com curvatura R. A aplicação $I(GL(r)) \to H(M)$ definida por*

$$I^k(GL(r)) \to H^{2k}(M), \; P \longmapsto [P(R^k)],$$

é um homomorfismo de anéis. Este homomorfismo é independente da conexão.

Demonstração. Falta, apenas, mostrar que o homomorfismo é independente das conexões. Para isso, vamos ver que, se ∇_0 e ∇_1 são duas conexões em $\pi : E \to M$, então, para todo o $P \in I^k(GL(r))$, as formas diferenciais $P(R^k_{\nabla_0})$ e $P(R^k_{\nabla_1})$ diferem por uma forma exacta.

Para isso, considere a projecção $p : M \times [0,1] \to M$. No fibrado pull-back p^*E temos uma conexão ∇ definida por:

$$\nabla = t\nabla_1 + (1-t)\nabla_0, \quad (t \in [0,1]).$$

Por outro lado, podemos introduzir uma operação de *integração ao longo das fibras*:

$$\int_0^1 : \Omega^\bullet(M \times [0,1]) \to \Omega^{\bullet-1}(M),$$

através da fórmula:

$$(\int_0^1 \omega)(X_1, \dots, X_{l-1}) = \int_0^1 \omega(\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \dots, X_{l-1})\mathrm{d}t.$$

Assim, define-se a forma de transgressão de **Chern-Simons** por

$$P(\nabla_0, \nabla_1) \equiv \int_0^1 P(R^k_\nabla) \in \Omega^{2k-1}(M). \tag{23.3}$$

Temos o seguinte lema:

Lema 23.4. *A forma de transgressão de Chern-Simons satisfaz:*

$$\mathrm{d}P(\nabla_0, \nabla_1) = P(R^k_{\nabla_1}) - P(R^k_{\nabla_0}).$$

A demonstração é uma aplicação simples de integração por partes, e é deixada como exercício. Esta fórmula mostra que $P(R^k_{\nabla_1})$ e $P(R^k_{\nabla_0})$ definem a mesma classes de cohomologia. □

Assim, todo o elemento P define uma classe de cohomologia em $H^\bullet(M)$, a que se chama **classe característica** do fibrado vectorial $\xi = (\pi, E, M)$. Esta classe depende, apenas, da classe de equivalência de ξ. Isto é uma consequência da

Proposição 23.5. *Seja $\psi : N \to M$ uma aplicação diferenciável e seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r. Para todo o $P \in I^\bullet(GL(r))$,*

$$\psi^* P(R^k_\nabla) = P(R^k_{\psi^*\nabla}),$$

onde ∇ é uma qualquer conexão em ξ.

A demonstração é deixada como exercício.

Resta-nos, pois, determinar expressões simétricas invariantes ou, equivalentemente, polinómios invariantes. Para isso, dada uma matriz $A \in \mathfrak{gl}(r)$, designamos por $\sigma_k(A)$ a função simétrica elementar de ordem k, de forma que:

$$\det(I + \lambda A) = I + \lambda\sigma_1(A) + \cdots + \lambda^r \sigma_r(A),$$

para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$. Vemos, facilmente, que $\sigma_k : \mathfrak{gl}(r) \to \mathbb{R}$ é um polinómio homogéneo de grau k, Ad-invariante.

Definição 23.6. *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r. Para $k = 1, 2, \dots$ define-se as **classes de Pontrjagin** de ξ por:*

$$p_k(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{2k}}[\sigma_{2k}(R^{2k})] \in H^{4k}(M),$$

*onde R é a curvatura de uma conexão ∇ em ξ. Definimos a **classe de Pontrjagin total** do fibrado vectorial ξ por:*

$$p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \cdots + p_{[r/2]}(\xi),$$

onde $[r/2]$ designa o maior inteiro menor ou igual a $r/2$.

A razão porque não consideramos as classes $[\sigma_k(R^k)]$ para k ímpar é que estas classes são zero. A proposição seguinte fornece propriedades básicas destas classes.

Proposição 23.7. *Seja M uma variedade diferenciável. As classes de Pontrjagin satisfazem:*

(i) $p(\xi \oplus \eta) = p(\xi) \cup p(\eta)$, para quaisquer fibrados ξ e η sobre M;
(ii) $p(\psi^*\xi) = \psi^* p(\xi)$, para qualquer fibrado ξ sobre M e aplicação diferenciável $\psi : N \to M$;
(iii) $p(\xi) = 1$, se ξ é um fibrado que admite uma conexão plana.

A demonstração é imediata da construção das classes de Pontrjagin e do seu carácter functorial.

Exemplo 23.8.
Seja $M = \mathbb{S}^d$ e consideremos o seu fibrado tangente $T\mathbb{S}^d$. Temos $\mathbb{S}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ e designamos por $\nu(\mathbb{S}^d)$ o fibrado normal a $\mathbb{S}^d$. Como

$$T\mathbb{S}^d \oplus \nu(\mathbb{S}^d) = T_{\mathbb{S}^d}\mathbb{R}^{d+1},$$

esta soma directa é trivial. Por outro lado, o fibrado normal $\nu(\mathbb{S}^n)$ também é trivial (porquê?). Pela propriedade (i), concluímos que $p(T\mathbb{S}^d) = 1$.

A fim de obter exemplos mais interessantes, vamos considerar classes características de fibrados *complexos*. No caso complexo, temos a seguinte proposição:

Proposição 23.9. *Para uma matriz $A \in \mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$, designe por $\sigma_i(A)$ a função simétrica elementar dos valores próprios de A, de forma que:*

$$\det(I+\lambda A) = I + \lambda\sigma_1(A) + \cdots + \lambda^r\sigma_r(A),$$

para todo o $\lambda \in \mathbb{C}$. Todo o polinómio invariante em $\mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$ pode ser expresso como uma função polinomial dos $\sigma_1,\dots,\sigma_r$.

Demonstração. Se $A \in \mathfrak{gl}(r,\mathbb{C})$, seja $J = SAS^{-1}$ a sua forma canónica de Jordan. Seja, ainda, S_ε a matriz:

$$S_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \varepsilon^{1-r} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \varepsilon^{-r} \end{bmatrix} S.$$

Se P é um polinómio invariante, então $P(A) = P(S_\varepsilon A S_\varepsilon^{-1})$. A matriz $S_\varepsilon A S_\varepsilon^{-1}$ difere de J, apenas nas entradas não diagonais que são multiplicadas por ε. Tomando ε pequeno, por continuidade, concluímos que $P(A)$ depende apenas dos valores próprios de A. Como $P(A)$ é uma função simétrica polinomial dos valores próprios, concluímos que é um polinómio das funções simétricas elementares $\sigma_1(A),\dots,\sigma_r(A)$. $\square$

Seja então $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial complexo, de forma que $E_p \simeq \mathbb{C}^r$, onde $r = \operatorname{rank}\xi$. Tudo o que vimos acerca de fibrados reais se generaliza com as modificações óbvias a fibrados complexos. Em particular, podemos definir o homomorfismo de Chern-Weil

$$I(GL(r,\mathbb{C})) \to H(M).$$

Tomando as funções simétricas elementares como elementos $\sigma_k \in I^k(GL(r,\mathbb{C}))$, definimos:

Definição 23.10. *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial complexo de rank r. Para $k = 1,\dots,r$ definimos as **classes de Chern** de ξ por:*

$$c_k(\xi) = \frac{1}{(2\pi i)^k}[\sigma_k(R^k)] \in H^{2k}(M),$$

*onde R é a curvatura de uma conexão ∇ em ξ. A **classe de Chern total** do fibrado complexo ξ é a soma:*

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \cdots + c_r(\xi) \in H(M).$$

De forma análoga ao caso real temos:

Proposição 23.11. *Seja M uma variedade diferenciável. As classes de Chern satisfazem:*

(i) $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cup c(\eta)$, *para quaisquer fibrados vectoriais complexos ξ e η sobre M;*

(ii) $c(\psi^*\xi) = \psi^* c(\xi)$, *para qualquer fibrado vectorial complexo ξ sobre M e aplicação diferenciável $\psi : N \to M$;*

(iii) $c(\xi) = 1$, *se ξ é um fibrado vectorial complexo que admite uma conexão plana.*

Se $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado vectorial complexo, então o seu **conjugado** é o fibrado vectorial complexo $\bar{\xi}$ cujas funções de transição são as conjugadas das funções de transição de ξ. Note-se que qualquer fibrado vectorial complexo é também um fibrado vectorial real, e que, como fibrados vectoriais reais, ξ e $\bar{\xi}$ são isomorfos (o isomorfismo correspondendo à conjugação na fibra). A demonstração da seguinte proposição é deixada como exercício:

Proposição 23.12. *Seja $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado vectorial complexo. As classes de Chern de ξ e $\bar{\xi}$ estão relacionadas por $c_k(\bar{\xi}) = (-1)^k c_k(\xi)$ de forma que:*

$$c(\bar{\xi}) = 1 - c_1(\xi) + c_2(\xi) - \cdots + (-1)^r c_r(\xi).$$

Deixamos como exercício verificar que para o fibrado de linhas (complexo) canónico sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$, que designamos por $\gamma_2^1(\mathbb{C})$, a primeira classe de Chern é $c_1(\gamma_2^1) = -1$, onde $-1 \in H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ é o gerador canónico. Pode-se mostrar que esta *normalização* em conjunto com as propriedades (i) a (iii) acima, determinam completamente as classes de Chern.

Finalmente, as classes de Pontrjagin de um fibrado vectorial real ξ podem ser obtidas a partir das classes de Chern do fibrado vectorial complexo $\xi \otimes \mathbb{C}$, obtido por complexificação de ξ:

Proposição 23.13. *Para um fibrado vectorial real ξ, as suas classes de Pontrjagin e as classes de Chern do seu complexificado estão relacionadas por:*

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi \otimes \mathbb{C}).$$

É fácil de ver que a complexificação $\xi \otimes \mathbb{C}$ e o seu conjugado são fibrados vectoriais isomorfos. Assim, pela Proposição 23.12, vemos que $c_k(\xi \otimes \mathbb{C}) = 0$ se k é ímpar. Isto fornece outra explicação para o facto de que as classes de Pontrjagin são classes em grau $4k$, e não estão definidas para grau $2k$.

Exercícios.

1. Seja ∇ uma conexão num fibrado vectorial $\pi : E \to M$. Mostre que existe um único operador $\mathbb{R}$-linear $\mathrm{d}_\nabla : \Omega^\bullet(M; E) \to \Omega^{\bullet+1}(M; E)$ que satisfaz a identidade de Leibniz:

$$\mathrm{d}_\nabla(\omega \otimes s) = \mathrm{d}\omega \otimes s + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \mathrm{d}_\nabla(s), \quad \forall \omega \in \Omega^\bullet(M; E), s \in \Gamma(E).$$

   Verifique que $\mathrm{d}_\nabla \circ \mathrm{d}_\nabla = 0$ sse a conexão é plana.

2. Seja $\pi : E \to M$ um fibrado vectorial de rank r. Para um elemento $P \in I^k(GL(r))$, mostre que a aplicação $P : \Omega^\bullet(M; \otimes^k \operatorname{End}(E)) \to \Omega^\bullet(M)$, satisfaz: $\mathrm{d}P = P\mathrm{d}_\nabla$.
(Sugestão: Mostre que para qualquer ponto $p \in M$ existe um referencial local definido numa vizinhança de p cuja 1-forma da conexão se anula em p.)

3. Mostre que a forma de transgressão de Chern-Simons, definida por (23.3), satisfaz:

$$\mathrm{d}P(\nabla_0, \nabla_1) = P(R_{\nabla_1}^k) - P(R_{\nabla_0}^k).$$

4. Seja $\psi : N \to M$ uma aplicação diferencial e $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r. Mostre que, para todo o $P \in I^\bullet(GL(r))$,

$$\psi^* P(R^k_\nabla) = P(R^k_{\psi^*\nabla}),$$

onde ∇ é qualquer conexão em ξ.

5. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r. Mostre que, se k é ímpar, então $[\sigma_k(R^k)] = 0$, para qualquer conexão ∇ em ξ com curvatura R. (Sugestão: Escolha uma métrica em ξ e tome uma conexão ∇ compatível com a métrica.)

6. Seja $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado vectorial complexo. Mostre que as classes de Chern de ξ e do seu conjugado $\bar{\xi}$ estão relacionadas por $c_k(\bar{\xi}) = (-1)^k c_k(\xi)$.

7.
   (a) Seja V um espaço vectorial real. Mostre que V admite uma estrutura de espaço vectorial complexo que estende a sua estrutura de espaço vectorial real sse existe um operador linear $J : V \to V$ tal que $J^2 = -\mathrm{id}$.
   (b) Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial real com uma conexão ∇, e $J \in \Gamma(\mathrm{End}(E))$ um operador tal que $J^2 = -\mathrm{id}$. Mostre que ξ pode ser visto como um fibrado vectorial complexo, e que ∇ é uma conexão neste fibrado complexo **sse** $d_\nabla J = 0$.
   (c) Seja M uma superfície Riemanniana orientada, ∇ a conexão de Levi-Civita e $\{E_1, E_2\}$ um referencial local ortonormado positivamente orientado. Mostre que o operador J definido por $J(E_1) = E_2$ e $J(E_2) = -E_1$ está bem definido e satisfaz $J^2 = -\mathrm{id}$ e $d_\nabla J = 0$. Portanto TM pode ser visto como um fibrado de linha complexo sobre M com uma conexão ∇ induzida pela conexão de Levi-Civita.
   (d) Mostre que se M é uma superfície Riemanniana orientada então

$$c_1(TM) = \frac{1}{2\pi}\left[\Omega^2_1\right],$$

   onde Ω^2_1 é a forma de curvatura num qualquer referencial ortonormado positivamente orientado. Use o Teorema de Gauss-Bonnet para mostrar que $c_1(TM) = \chi(TM)$.

8. Seja $\gamma^1_2(\mathbb{C})$ o fibrado de linhas (complexo) canónico sobre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$. Mostre que $c_1(\gamma^1_2) = -1$, onde $-1 \in H^2(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ é o gerador canónico.

9. Mostre que a classe de Chern total do fibrado tangente a $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ é:

$$c(T\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = (1 + a)^n,$$

onde $a \in H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ é um gerador apropriado.

10. A esfera $\mathbb{S}^4$ pode ser dada por duas parametrizações $\phi_1^{-1}, \phi_2^{-1} : \mathbb{H} \to \mathbb{S}^4$ cuja função de transição é

$$y = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) = x^{-1}$$

(as cartas locais correspondentes são, a menos de reordenamento das coordenadas, as projecções estereográficas a partir dos dois pólos). Mostre que as formas locais

$$\omega = \frac{x d\bar{x} - dx\bar{x}}{2\,(1 + |x|^2)} \quad \text{e} \quad \theta = \frac{y d\bar{y} - dy\bar{y}}{2\,(1 + |y|^2)}$$

satisfazem

$$\theta = \left(\frac{x}{|x|}\right)^{-1} \omega \ \frac{x}{|x|} + \left(\frac{x}{|x|}\right)^{-1} d\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

e portanto determinam uma conexão num certo fibrado vectorial complexo ξ sobre $\mathbb{S}^4$, cujas funções de transição tomam valores em $SU(2)$. Calcule a segunda classe de Chern $c_2(\xi)$, e conclua que este fibrado não é trivial.

Lição 24. Fibrados Gerais

É útil considerar fibrados em que a fibra é um espaço fixo (variedade) F sem propriedades adicionais, generalizando o caso de fibrados vectoriais (em que as fibras são espaços vectoriais).

Seja, então, $\pi : E \to M$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades diferenciáveis. Uma **carta trivializante** para π com tipo de fibra F é um par (U, ϕ), onde $U \subset M$ é um aberto e $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ é um difeomorfismo, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Neste diagrama, $\pi_1 : U \times F \to U$ designa a projecção no primeiro factor. Mais uma vez, se $E_p = \pi^{-1}(p)$ é a fibra sobre $p \in U$, definimos um difeomorfismo $\phi^p : E_p \to F$ como sendo a composição:

$$\phi^p : E_p \xrightarrow{\phi} \{p\} \times F \longrightarrow F\ .$$

Assim, se $\mathbf{v} \in E_p$, temos que

$$\phi(\mathbf{v}) = (p, \phi^p(\mathbf{v})).$$

A definição de um fibrado geral é a seguinte:

Definição 24.1. *Seja F uma variedade. Uma **estrutura de fibrado** com tipo de fibra F numa variedade M é um terno $\xi = (\pi, E, M)$, onde $\pi : E \to M$ é uma aplicação diferenciável, com uma colecção de cartas trivializantes $\mathcal{C} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ com tipo de fibra F, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ é uma cobertura aberta de M: $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$;

*(ii) As cartas são compatíveis: Para quaisquer $\alpha, \beta \in A$ e para todo o $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, as **funções de transição** $g_{\alpha\beta}(p) \equiv \phi^p_\alpha \circ (\phi^p_\beta)^{-1} : F \to F$ são difeomorfismos;*

(iii) A colecção $\mathcal{C}$ é maximal: se (U, ϕ) é uma carta trivializante com a propriedade de que para todo o $\alpha \in A$, as aplicações $\phi^p \circ (\phi^p_\alpha)^{-1}$ e $\phi^p_\alpha \circ (\phi^p)^{-1}$ são isomorfismos lineares, então $(U, \phi) \in \mathcal{C}$.

*Ao terno $\xi = (\pi, E, M)$ chamamos um **fibrado** de tipo de fibra F.*

Utilizaremos a mesma nomenclatura que para o caso dos fibrados vectoriais. Assim, falamos de **espaço total**, **espaço base**, e **projecção** do fibrado. A uma colecção de cartas que satisfaz (i) e (ii) chamamos um **atlas**

de fibrado ou **trivialização** de ξ. Da mesma forma, definimos **secção** sobre um aberto U, e designamos o conjunto das secções sobre U por $\Gamma_U(E)$. Embora existam sempre secções definidas localmente, um fibrado geral pode não ter secções globais.

Os fibrados podem ser descritos pelas suas funções de transição: Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado com tipo de fibra F. Se (U_α, ϕ_α) e (U_α, ϕ_α) são cartas trivializantes, definimos a **função de transição** $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{Dif}(F)$ por:

$$p \mapsto g_{\alpha\beta}(p) \equiv \phi^p_\alpha \circ (\phi^p_\beta)^{-1}.$$

Assim, temos que:

$$\phi_\alpha \circ (\phi_\beta)^{-1}(p, \mathbf{v}) = (p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot \mathbf{v}).$$

Os fibrados mais interessantes possuem uma estrutura adicional na fibra e as funções de transição preservam essa estrutura adicional. Assim, dizemos que o fibrado possui **grupo de estrutura** um grupo de Lie G se as funções de transição são aplicações C^∞ com valores no grupo G, e G é um grupo de transformações de F:

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G \subset \mathrm{Dif}(F).$$

Vamos usar a abreviação G-**fibrado**, para um fibrado com grupo de estrutura G. Exemplos muito importantes de fibrados com grupo de estrutura são:

- **Fibrados vectoriais:** Neste caso a fibra é um espaço vectorial V e o grupo de estrutura é o grupo das transformações lineares $G = GL(V)$. Este foram os fibrados que estudámos nas lições anteriores.
- **Fibrados principais:** Neste caso a fibra é um grupo de Lie G e o grupo de estrutura é o mesmo grupo de Lie G, que actua em si próprio por translações à direita: $G \times G \to G$, $(h, g) \mapsto hg$. Neste caso, G actua no espaço total E, a acção é livre, M coincide com o quociente E/G, e $\pi : E \to M = E/G$ é a aplicação quociente.

No que se segue, vamos considerar fibrados com grupo de estrutura um grupo de Lie G. No entanto, muito dos resultados que obtemos ainda são válidos no caso $G = \mathrm{Dif}(F)$, com as modificações apropriadas.

A noção de morfismo de G-fibrados é análoga à de morfismos de fibrados vectoriais, onde substituímos $GL(r)$ pelo grupo de estrutura G.

Definição 24.2. *Sejam $\xi = (\pi, E, M)$ e $\xi' = (\pi', E', M')$ dois fibrados com tipo de fibra F e mesmo grupo de estrutura G. Um **morfismo de G-fibrados** é uma aplicação diferenciável $\Psi : E \to E'$ que transforma fibras de ξ em fibras de ξ', i.e., Ψ cobre uma aplicação diferenciável $\psi : M \to M'$:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "\psi"] & M' \end{tikzcd}$$

e, para cada $p \in M$, a aplicação de fibras

$$\Psi^p \equiv \Psi|_{E_p} : E_p \to E'_q,$$

onde $q = \psi(p)$*, satisfaz:*
$$\phi'^q_\beta \circ \Psi^p \circ (\phi^p_\alpha)^{-1} \in G,$$
para quaisquer trivializações $\{\phi_\alpha\}$ *de* ξ *e* $\{\phi'_\beta\}$ *de* ξ'*.*

Desta forma, obtemos uma categoria de fibrados com fibra F e grupo de estrutura G. Também para estes, faremos a distinção entre fibrados *equivalentes* e fibrados *isomorfos*, análoga à distinção já feita no caso dos fibrados vectoriais.

Exemplos 24.3.

1. *Para qualquer fibra* F *e grupo de estrutura* $G \subset \mathrm{Dif}(F)$ *temos sempre o* ***fibrado trivial*** $(\pi_1, M \times F, M)$*. As secções deste fibrado podem ser identificadas com as aplicações diferenciáveis* $M \to F$*.*
2. *O 2-toro fornece um fibrado trivial* $(\pi_1, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ *com fibra* $\mathbb{S}^1$ *e grupo de estrutura* $\mathbb{S}^1$*. Este fibrado é um* $\mathbb{S}^1$*-fibrado principal. Um exemplo dum* $\mathbb{S}^1$*-fibrado principal não-trivial, é dado pela garrafa de Klein* $(\pi, K, \mathbb{S}^1)$*.*
3. *Seja* $\pi : \tilde{M} \to M$ *o revestimento universal de uma variedade* M*. O terno* $(\pi, \tilde{M}, M)$ *é um fibrado principal com grupo de estrutura (e fibra) o grupo fundamental* $\pi_1(M)$ *(a topologia de* $\pi_1(M)$ *é a topologia discreta).*

A descrição de fibrados pelas suas funções de transição é análoga à descrição de fibrados vectoriais. Assim, se $\xi = (\pi, E, M)$ é um G-fibrado com fibra F, as funções de transição
$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G,$$
relativas a uma trivialização $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, satisfazem a condição de cociclo:
$$g_{\alpha\beta}(p) g_{\beta\gamma}(p) = g_{\alpha\gamma}(p), \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma).$$
Dizemos que dois cociclos $\{g_{\alpha\beta}\}$ e $\{g'_{\alpha\beta}\}$ são equivalentes se existem aplicações $\lambda_\alpha : U_\alpha \to G$ de classe C^∞, tais que:
$$g'_{\alpha\beta}(p) = \lambda_\alpha(p) \cdot g_{\alpha\beta}(p) \cdot \lambda_\beta^{-1}(p), \quad (p \in U_\alpha \cap U_\beta).$$
Mais uma vez, duas trivializações dão origem a cociclos equivalentes. Reciprocamente, temos o seguinte análogo da Proposição 19.5. A demonstração é idêntica ao caso dos fibrados vectoriais.

Proposição 24.4. *Seja* M *uma variedade e* G *um grupo de Lie que actua numa variedade* F*. Dado um cociclo* $\{g_{\alpha\beta}\}$ *com valores em* G*, subordinado a uma cobertura* $\{U_\alpha\}$ *de* M*, existe um fibrado* $\xi = (\pi, E, M)$ *com tipo de fibra* F *e grupo de estrutura* G*, que admite trivializações* $\{\phi_\alpha\}$*, para as quais as funções de transição são* $\{g_{\alpha\beta}\}$*. Dois cociclos equivalentes determinam* G*-fibrados isomorfos.*

Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado com tipo de fibra F e grupo de estrutura G, e $\{g_{\alpha\beta}\}$ o cociclo definido por uma trivialização $\{\phi_\alpha\}$ de ξ. Se $H \subset G$ é um subgrupo, dizemos que o **grupo de estrutura de** ξ **pode ser reduzido a** H se existir um cociclo equivalente $\{g'_{\alpha\beta}\}$ em que as funções de transição tomam valores em H:
$$g'_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to H \subset GL(r).$$

Os exemplos seguintes ilustram de que forma o grupo de estrutura (e a redução do grupo de estrutura) está intimamente relacionado com propriedades geométricas do fibrado.

EXEMPLOS 24.5.

1. *Um fibrado $\xi = (\pi, E, M)$ com tipo de fibra F e grupo de estrutura G é trivial sse o seu grupo de estrutura pode ser reduzido ao grupo trivial $\{e\}$.*

2. *Vimos anteriormente que um fibrado vectorial de rank r é orientável sse o seu grupo de estrutura pode ser reduzido a $GL^+(r)$. De igual forma, um fibrado admite uma estrutura Riemanniana sse o grupo de estrutura pode ser reduzido a $O(r)$ (o que, pela decomposição polar, pode sempre ser feito). A redução do grupo de estrutura a $SO(r)$ corresponde à escolha de uma estrutura Riemanniana e de uma orientação para o fibrado.*

Observação 24.6. Na definição de morfismo de fibrados, a escolha do grupo de estrutura é fulcral: um G-fibrado pode não ser isomorfo ao fibrado trivial, por um morfismo de G-fibrados, mas pode acontecer que é isomorfo ao fibrado trivial, por um morfismo de G'-fibrados, onde $G' \supset G$ é um grupo de estrutura que contém G como subgrupo. Um exemplo é dado num dos exercícios, no final desta lição.

Os fibrados principais destacam-se entre os fibrados gerais, pois temos:

- A todo o G-fibrado $\xi_F = (\pi, E, M)$ com tipo de fibra F, podemos associar um G-fibrado principal $\xi = (\pi, P, M)$: de facto, fixando uma trivialização $\{\phi_\alpha\}$ de ξ_F, o cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ toma valores em G. Como G actua em si próprio por translações à direita, este cociclo define um G-fibrado com fibra G, que é um G-fibrado principal.
- A um G-fibrado principal $\xi = (\pi, P, M)$ e a uma variedade F onde G actua à esquerda, podemos associar um fibrado $\xi_F = (\pi, E, M)$ com tipo de fibra F e grupo de estrutura G: uma trivialização $\{\phi_\alpha\}$ de ξ, determina um cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ que toma valores em G. Como G actua em F, este cociclo define um G-fibrado ξ_F com fibra F.

Para um fibrado principal $\xi = (\pi, P, M)$ com grupo de estrutura G, um seu **fibrado associado** $\xi_F = (\pi_F, E, M)$ pode, também, ser descrito sem recorrer a cociclos. O espaço total de ξ_F é

$$E = P \times_G F,$$

onde $P \times_G F$ designa o espaço quociente para a acção à direita de G em $P \times F$ definida por: $(u, f) \cdot g \equiv (u \cdot g, g^{-1} \cdot f)$ (recorde-se que G actua à direita em P e à esquerda em F). A projecção $\pi_F : E \to M$ é dada por: $\pi_F([u, f]) = \pi(u)$.

De agora em diante, vamos concentrar-nos no estudo dos fibrados principais. Para estes, temos a seguinte caracterização alternativa:

Lema 24.7. *Um fibrado $\xi = (\pi, E, M)$ é um G-fibrado principal sse existe uma acção à direita $E \times G \to E$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) A acção é livre;

(ii) O quociente E/G é uma variedade, $M = E/G$ e $\pi : E \to E/G = M$ é a aplicação quociente;

(iii) As trivializações locais (U, ϕ) são G-equivariantes: $\phi^p(g\cdot\mathbf{v}) = g\cdot\phi^p(\mathbf{v})$.

A demonstração é deixada como exercício. Vejamos alguns exemplos.

Exemplos 24.8.

1. *Seja M uma variedade diferenciável de dimensão d. O **fibrado dos referenciais** é o fibrado $\pi : F(M) \to M$ com grupo de estrutura $GL(d)$, em que a fibra sobre $p \in M$ é o conjunto das bases ordenadas de T_pM:*
$$F(M)_p = \{(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) : \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \text{ é uma base de } T_pM\}.$$
O grupo $GL(d)$ actua à direita em $F(M)$: se $u = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ é um referencial e $A = (a_i^j)$ é uma matriz invertível, então $u \cdot A = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_d)$ é o referencial dado por:
$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{d} \mathbf{v}_j a_i^j, \qquad (i = 1, \ldots, d).$$
Esta acção satisfaz as propriedades do Lema 24.7, logo $F(M)$ é um fibrado principal com grupo de estrutura $GL(d)$.
Considere-se a acção de $GL(d)$ em $\mathbb{R}^d$ por multiplicação de matrizes. Obtemos um fibrado associado a $F(M)$ com fibra de tipo $\mathbb{R}^r$, i.e., um fibrado vectorial. Deixamos como exercício verificar que este fibrado é canonicamente isomorfo ao fibrado tangente $T(M)$. Da mesma forma, obtêm-se os fibrados cotangente, exterior, tensorial, etc., tomando as acções de $GL(d)$ em $(\mathbb{R}^d)^*$, $\wedge^k\mathbb{R}^d$, $\otimes^k\mathbb{R}^d$, etc.
Mais geralmente, para qualquer fibrado vectorial $\pi : E \to M$ de rank r, podemos considerar o fibrado dos referenciais $F(E)$, que é um fibrado principal com com grupo de estrutura $GL(r)$. O fibrado associado a $F(E)$ com fibra $\mathbb{R}^r$, obtido da acção de $GL(r)$ em $\mathbb{R}^r$ por multiplicação de matrizes, é um fibrado vectorial canonicamente isomorfo ao fibrado original $\pi : E \to M$. De igual forma, podemos obter os fibrados associados E^*, $\wedge^k E$, $\otimes^k E$, etc.
2. *Seja $E\times G \to E$ uma acção livre e própria de um grupo de Lie G numa variedade E. Então $\pi : E \to E/G$ é um fibrado principal com grupo de estrutura G. Pelo Teorema 12.4, as condições (i) e (ii) do Lema 24.7 são satisfeitas. A verificação da condição (iii) foi feita no Exercício 1 da Lição 12.*
Por exemplo, seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Então a acção à direita de H em G por translações, é uma acção livre e própria. Assim, obtemos um fibrado principal $\pi : G \to G/H$ com grupo de estrutura H.

Seja $\xi = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal, e F uma variedade com uma acção à esquerda de G. *Qualquer construção functorial no fibrado associado $\xi_F = (\pi, E, M)$ deve poder ser expressa em termos de ξ e F.* Como exemplo deste princípio, para as secções de ξ_F, temos:

Proposição 24.9. *Sejam $\xi = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal e F uma variedade com uma acção à esquerda de G. As secções do fibrado associado $\xi_F = (\pi, E, M)$ estão em correspondência biunívoca com as aplicações G-equivariantes $h : P \to F$.*

Demonstração. Recordemos que o espaço total do fibrado associado é dado por:
$$E = P \times_G F = (P \times F)/G.$$

Um elemento $v \in E_p$ é, pois, uma classe de equivalência em $P_p \times_G F$, que pode ser escrita na forma:

$$v = [(u, h_p(u))], \quad \forall u \in P_p,$$

para uma única aplicação $h_p : P_p \to F$ G-equivariante:

$$h_p(u \cdot g) = g^{-1} \cdot h_p(u).$$

Assim, uma secção $s : M \to E$ pode ser escrita na forma:

$$s(p) = [(u, h(u))], \quad \forall u \in P \text{ com } \pi(u) = p,$$

onde $h : P \to F$ é uma aplicação G-equivariante. Reciprocamente, uma aplicação G-equivariante $h : P \to F$ determina, através desta fórmula, uma secção de ξ_F. □

Convém generalizar a noção de morfismo para fibrados principais, da seguinte forma:

Definição 24.10. *Sejam $\xi' = (\pi', P', M')$ um G'-fibrado principal e $\xi = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal. Um* ***morfismo*** *$\Psi : \xi' \to \xi$ é um par formado por uma aplicação $\Psi : P' \to P$ e um homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G' \to G$, tal que*

$$\Psi(u \cdot g) = \Psi(u)\Phi(g), \forall u \in P', g \in G'.$$

Como um morfismo de fibrados principais $\Psi : \xi' \to \xi$ leva fibras em fibras, Ψ cobre uma aplicação diferenciável $\psi : M' \to M$:

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\pi'"'] & P \arrow[d, "\pi"] \\ M' \arrow[r, "\psi"'] & M \end{tikzcd}$$

No caso em que $\Psi : P' \to P$ e $\Phi : G' \to G$ são mergulhos, podemos identificar P' e G' com as suas imagens $\Psi(P') \subset P$ e $\Phi(G') \subset G$. Dizemos, pois, que ξ' é um **subfibrado** do fibrado principal ξ. No caso em que $M' = M$ e $\psi =$id, o subfibrado corresponde à redução do grupo de estrutura de G a H. Neste caso, dizemos que ξ' é o **fibrado reduzido** de ξ.

Exercícios.

1. Verifique que $\xi = (\pi, E, M)$ é um G-fibrado principal sse $\xi = (\pi, E, M)$ é um fibrado com uma acção à direita $E \times G \to E$ que satisfaz as seguintes propriedades:
   (i) A acção é livre;
   (ii) O quociente E/G é uma variedade, $M = E/G$ e $\pi : E \to E/G = M$ é a aplicação quociente;
   (iii) As trivializações locais (U, ϕ) são G-equivariantes:
   $$\phi^p(g \cdot \mathbf{v}) = g \cdot \phi^p(\mathbf{v}).$$
2. Demonstre a Proposição 24.4.

3. Considere a cobertura de $M = \mathbb{S}^1$ pelos abertos:

$$U_\pm = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} - \{(\pm 1, 0)\}.$$

Defina um cociclo $\{g_{\alpha\beta}\}$ relativo a esta cobertura, por

$$g_{+-}(x,y) = \begin{cases} I & \text{se } (x,y) \in y > 0, \\ \\ -I & \text{se } (x,y) \in y < 0. \end{cases}$$

onde I é a matriz identidade 2×2. Mostre que:

(a) Este cociclo define um fibrado com fibra $\mathbb{S}^1$ e grupo de estrutura $\mathbb{S}^1 = S0(2)$ que é isomorfo (como $\mathbb{S}^1$-fibrado) ao fibrado trivial.

(b) Este cociclo define um fibrado com fibra $\mathbb{S}^1$ e grupo de estrutura $\mathbb{Z}_2 = \{I, -I\}$ que não é isomorfo (como $\mathbb{Z}_2$-fibrado) ao fibrado trivial.

4. Mostre que um fibrado principal é trivial sse possui uma secção global. (Nota: Este exercício é um caso muito particular do próximo exercício.)

5. Seja $\xi = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Note que o grupo G actua no quociente G/H, de forma que temos um fibrado associado $\xi_{G/H} = (\pi', P \times_G (G/H), M)$. Mostre que o este fibrado pode ser identificado com o quociente $(\pi', P/H, M)$, onde $\pi' : P/H \to M$ é a aplicação induzida por $\pi : P \to M$ no quociente, e verifique que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) O grupo de estrutura de ξ pode ser reduzido a H.

(b) O fibrado associado $\xi_{G/H}$ possui uma secção, i.e., existe uma aplicação $s : M \to P/H$ tal que $\pi' \circ s = \text{id}$.

(c) Existe uma aplicação G-equivariante $h : P \to G/H$.

6. Seja M uma variedade Riemanniana e considere o $O(d)$-fibrado principal $\pi : OF(M) \to M$ formado pelos referenciais ortonormados:

$$OF(M)_p = \{(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) : \ \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r \text{ é uma base ortonormada de } T_pM\}.$$

Mostre que $OF(M)$ é o fibrado reduzido de $F(M)$, que corresponde à redução do grupo de estrutura de $GL(d)$ a $O(d)$.

Lição 25. Fibrados Principais

Seja $\psi : N \to M$ uma aplicação diferenciável e $\xi = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal. Tal como no caso dos fibrados vectoriais, podemos formar o **pull-back** $\psi^*\xi$: é o fibrado principal sobre N, com grupo de estrutura G, cujo espaço total é dado por:

$$\psi^* P \equiv \{(p,u) \in N \times P : \psi(p) = \pi(u)\}.$$

Note que G actua à direita neste espaço: $(p,u)\cdot g \equiv (p, u\cdot g)$. Temos, também, um morfismo de fibrados principais $\Psi : \psi^*\xi \to \xi$, dado por $\Psi(p,u) = u$, e que permite completar o diagrama:

$$\begin{tikzcd} \psi^* P \arrow[r, dashed, "\Psi"] \arrow[d, dashed, "\hat{\pi}"'] & P \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "\psi"] & N \end{tikzcd}$$

O pull-back de fibrados principais satisfaz propriedades análogas às do pull-back de fibrados vectoriais, tais como propriedade universal, invariância por homotopia, etc., que deixamos ao cuidado do leitor enunciar (e demonstrar!).

Vejamos, agora, de forma abreviada, a classificação dos fibrados principais. Seja $\xi = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal e E um espaço com uma acção *livre* de G. Pela Proposição 24.9, as secções do fibrado associado $\xi_E = (\pi, P \times_G E, M)$ estão em correspondência biunívoca com as aplicações G-equivariantes $\Phi : P \to E$. Note que esta aplicação cobre uma aplicação $\phi : M \to E/G$:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\phi"'] & E/G \end{tikzcd}$$

Como a acção é livre, a aplicação Φ é injectiva. Note, ainda, que $\pi : E \to E/G$ é um G-fibrado principal η e que $\Phi : \xi \to \eta$ é um morfismo de fibrados principais. Da propriedade universal dos pull-backs concluímos que existe um isomorfismo de fibrados principais:

$$\xi \simeq \phi^*\eta.$$

Assuma, adicionalmente, que E é *contráctil*. Então quaisquer duas secções s_0, s_1 de ξ_E são homotópicas, logo a classe de homotopia da aplicação ϕ é única e independente da escolha da secção. Assim, obtemos:

Teorema 25.1 (Classificação de Fibrados Principais)**.** *Seja E um espaço contráctil com uma acção livre de G. Então as classes de equivalência de G-fibrados principais estão em correspondência biunívoca com as classes de homotopia de aplicações $\phi : M \to E/G$.*

O fibrado $E_G = E$ costuma-se chamar o **fibrado classificante** e o quociente $B_G = E/G$ costuma-se chamar o **espaço classificante** dos fibrados principais com grupo de estrutura G. Este espaço classificante é único a menos de tipo de homotopia. Infelizmente, em geral, B_G não tem dimensão finita.

Exemplos 25.2.

1. *Vimos que no caso dos fibrado vectoriais de rank r, o espaço classificante é a Grassmanniana infinita $\tilde{G}_r(\mathbb{R}^\infty)$ formada pelos subespaços de $\mathbb{R}^\infty$ de codimensão r. Como vimos acima, os fibrado vectoriais de rank r são fibrados associados a fibrados principais com grupo de estrutura $GL(r)$. De facto, mostra-se que:*
$$B_{GL(r)} = \tilde{G}_r(\mathbb{R}^\infty).$$
2. *A esfera infinita $\mathbb{S}^\infty$, i.e., o limite directo das esferas de dimensão finita*
$$\cdots \subset \mathbb{S}^d \subset \mathbb{S}^{d+1} \subset \mathbb{S}^{d+2} \subset \cdots$$
pode ser identificada com a esfera unitária em $\mathbb{R}^\infty$ para o produto interno:
$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

(note que, nesta soma, apenas um número finito de termos é não nulo). A acção natural do grupo $\mathbb{Z}_2$ em $\mathbb{S}^\infty$, é uma acção livre. Como $\mathbb{S}^\infty$ é contráctil, concluímos que $E_{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{S}^\infty$ e que:

$$B_{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{P}^\infty.$$

Vimos anteriormente a noção de conexão num fibrado vectorial. Pelo nosso princípio geral, deve existir uma noção de conexão em fibrados principais, pelo menos no caso em que $G = GL(r)$, que determina a conexão no fibrado associado. De facto, pode-se definir conexões para quaisquer fibrados principais como iremos ver de seguida.

Definição 25.3. *Seja $\xi = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal. Uma **conexão de Ehresmann** Γ em ξ é uma distribuição H no espaço total P tal que:*

(i) H é horizontal: para todo o $u \in P$,

$$T_uP = H_u \oplus T_u(P_{\pi(u)});$$

(ii) H é G-invariante: para todo o $g \in G$ e $u \in P$,

$$H_{ug} = (R_g)_* H_u,$$

onde $R_g : P \to P$ é a transformação dada por $R_g(u) = u \cdot g \equiv ug$.

Seja $\xi = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal com um conexão Γ. Para $u \in P$, vamos chamar a $V_u \equiv T_u(P_{\pi(u)})$ (o espaço tangente à fibra que contém u) o **espaço vertical** e a H_u o **espaço horizontal**. Assim, qualquer vector tangente $\mathbf{v} \in T_uP$ possui uma decomposição:

$$\mathbf{v} = h(\mathbf{v}) + v(\mathbf{v}), \qquad \text{onde } h(\mathbf{v}) \in H_u, v(\mathbf{v}) \in V_u.$$

Como a distribuição da conexão é C^∞, qualquer campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ decompõe-se num campo vectorial horizontal $h(X)$ e num campo vectorial vertical $v(X)$.

Exemplo 25.4.

Seja M uma variedade diferenciável e $\xi_F = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial sobre M com uma conexão ∇. Consideremos o fibrado $\xi = (\pi, F(E), M)$ dos referenciais de ξ_F: é um fibrado principal com grupo de estrutura $GL(r)$, onde $r = \operatorname{rank} \xi_F$. Se $u = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r) \in F(E)$ é um referencial, e $c : I \to M$ é uma curva com $c(0) = \pi(u)$, então os campos vectoriais $X_1, \dots, X_r$ ao longo de $c(t)$ obtidos por transporte paralelo de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$, determinam uma curva $u(t) = (X_1(t), \dots, X_r(t))$ em $F(E)$. Considerando todas as curvas $u(t)$ obtidas desta forma, definimos o subespaço:

$$H_u = \{u'(0) \in T_uF(E) : \text{ para todas as curvas } u(t)\}.$$

É fácil de ver que a distribuição $u \mapsto H_u$ é C^∞ e verifica as condições (i) e (ii) da definição de conexão. Assim, toda a conexão ∇ num fibrado vectorial determina uma conexão Γ no fibrado dos referenciais.

Seja $\xi = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal. A acção de G em P induz uma acção infinitesimal da sua álgebra de Lie $\psi : \mathfrak{g} \to P$. Vamos usar a notação $X^* = \psi(X)$, para designar o campo vectorial em P determinado pelo elemento $X \in \mathfrak{g}$. Este campo é vertical, i.e., $h(X^*) = 0$. Para cada $u \in P$, a aplicação $X \mapsto X^*_u$ fornece um isomorfismo linear $\mathfrak{g} \simeq V_u$.

Fixemos uma conexão Γ em P. Chama-se **1-forma da conexão** à 1-forma diferencial ω com valores em $\mathfrak{g}$ que satisfaz:

$$\omega(\mathbf{v}) = X, \quad \text{onde } X \in \mathfrak{g} \text{ é tal que } X^*_u = v(\mathbf{v}),$$

para todo o $\mathbf{v} \in T_uP$. Note que $\omega(\mathbf{v}) = 0$ sse $\mathbf{v}$ é um vector horizontal, de forma que ω determina a distribuição. De facto, esta 1-forma caracteriza completamente a conexão, como mostra a seguinte proposição cuja demonstração deixamos como exercício:

Proposição 25.5. *Seja $\xi = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal. Se Γ é uma conexão em ξ, a 1-forma de conexão ω satisfaz:*

(i) $\omega(X^*) = X$, para todo o $X \in \mathfrak{g}$;

(ii) $(R_g)^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$, para todo o $g \in G$.

Reciprocamente, se $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{g})$ satisfaz (i) e (ii), então existe uma única conexão Γ em P cuja 1-forma de conexão é ω.

Seja Γ uma conexão num G-fibrado principal $\xi = (\pi, P, M)$. Para definir a curvatura de Γ, introduzimos a *derivada exterior covariante* $D : \Omega^k(P) \to \Omega^{k+1}(P)$ por:

$$(D\theta)(X_0, \dots, X_k) = (\mathrm{d}\theta)(h(X_0), \dots, h(X_k)), \quad (X_0, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(P)).$$

A **2-forma de curvatura** de Γ é, então, a forma diferencial $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ dada por:

$$\Omega \equiv D\omega.$$

Seja $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ uma trivialização do G-fibrado principal $\xi = (\pi, P, M)$. A trivialização define secções locais $s_\alpha : U_\alpha \to P$ por $s_\alpha(p) = \phi_\alpha^{-1}(p, e)$, onde $e \in G$ é a identidade. A 1-forma de conexão ω determina uma família de **1-formas locais de conexão** $\omega_\alpha \in \Omega^1(U_\alpha; \mathfrak{g})$ por:

$$\omega_\alpha = (s_\alpha)^*\omega.$$

Por seu lado, a 2-forma de curvatura Ω determina **2-formas locais de curvatura** $\Omega_\alpha \in \Omega^2(U_\alpha; \mathfrak{g})$ por:

$$\Omega_\alpha = (s_\alpha)^*\Omega.$$

Exemplo 25.6.

Como vimos no Exemplo 25.4, toda a conexão ∇ no fibrado vectorial $\pi : E \to M$ determina uma conexão de Ehresmann Γ no $GL(r)$-fibrado principal dos referenciais $\pi : F(E) \to M$. A 1-forma de conexão e a 2-forma de curvatura de Γ tomam valores na álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(r)$.

Como vimos na Lição 22, uma vez escolhida a trivialização do fibrado vectorial $\pi : E \to M$, a conexão ∇ determina, em cada aberto U_α, uma matriz de 1-formas diferenciais $\omega_\alpha = [\omega_a^b]$ e uma matriz de 2-formas de curvatura $\Omega_\alpha = [\Omega_a^b]$. Para a trivialização induzida do fibrado dos referenciais $\pi : F(E) \to M$, estas matrizes de formas diferencias são, precisamente, as 1-formas locais de conexão e as 2-formas locais de curvatura da conexão Γ.

Tal como no caso de conexões em fibrados vectoriais, temos:

Teorema 25.7. *Seja* Γ *uma conexão num* G*-fibrado principal* $\xi = (\pi, P, M)$*, com 1-forma de conexão* ω *e 2-forma de curvatura* Ω*. Então, são as válidas:*

(i) Equação de estrutura: $\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$.

(ii) Identidade de Bianchi: $\mathrm{d}_\nabla \Omega = 0$.

Vejamos, agora, a noção de *transporte paralelo* para uma conexão Γ num G-fibrado principal $\xi = (\pi, P, M)$. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial na base M, existe um único campo vectorial $\widetilde{X} \in \mathfrak{X}(P)$ no espaço total, tal que:

(a) $\widetilde{X}$ é horizontal: $h(X) = 0$;

(b) $\widetilde{X}$ é π-relacionado com X.

A $\widetilde{X}$ chama-se o **levantamento horizontal** de X. A proposição seguinte enumera as principais propriedades dos levantamentos horizontais, e é imediata das definições:

Proposição 25.8. *Seja* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f \in C^\infty(M)$*. Então:*

(i) $\widetilde{X} + \widetilde{Y}$ *é o levantamento horizontal de* $X + Y$*;*

(ii) $(\pi^* f)\widetilde{X}$ *é o levantamento horizontal de* fX*;*

(iii) $h([\widetilde{X}, \widetilde{Y}])$ *é o levantamento horizontal de* $[X, Y]$.

Pela propriedade (iii), o campo vectorial

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]},$$

é vertical. De facto,temos a seguinte interpretação geométrica da curvatura, cuja demonstração deixamos como exercício:

Teorema 25.9. *Seja* Γ *uma conexão num* G*-fibrado principal* $\xi = (\pi, P, M)$*, com 2-forma de curvatura* $\Omega \in \Omega^2(P; \mathfrak{g})$*. Para toda a secção* $s : U \to P$*, definida num aberto* $U \subset M$*, temos que:*

$$(s^*\Omega)(X, Y)^* = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]}.$$

Uma **conexão plana** é uma conexão para a qual a curvatura é nula: $\Omega \equiv 0$. Como os levantamentos horizontais $\widetilde{X}$ de campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ geram a distribuição horizontal da conexão, obtemos:

Corolário 25.10. *Uma conexão é plana sse a distribuição horizontal é integrável.*

Para definirmos o transporte paralelo precisamos de fazer levantamentos horizontais de curvas $c : I \to M$ de classe C^1: uma curva $u : I \to P$ de classe C^1 diz-se um **levantamento horizontal** da curva $c(t)$, se $\pi(u(t)) = c(t)$ e $u(t)$ é uma curva horizontal (i.e., é tangente à distribuição horizontal).

Proposição 25.11. *Seja* Γ *uma conexão num* G*-fibrado principal* $\xi = (\pi, P, M)$*. Se* $c : I \to M$ *é uma curva de classe* C^1 *e* $u_0 \in \pi^{-1}(c(0))$ *existe um único levantamento horizontal* $u : I \to P$ *de* $c(t)$ *tal que* $u(0) = u_0$.

Demonstração. Pela trivialidade local do fibrado, podemos levantar $c(t)$ numa curva $v : I \to P$, tal que $v(0) = u_0$ e $\pi(v(t)) = c(t)$. O levantamento horizontal $u : I \to P$, caso exista, é da forma:

$$u(t) = v(t)g(t),$$

onde $g : I \to G$ é uma curva de classe C^1 em G tal que $g(0) = e$. Se ω é a 1-forma de conexão, diferenciando esta relação, vemos que:

$$\omega(\dot{u}(t)) = \mathrm{Ad}(g(t)^{-1})\omega(\dot{v}(t)) + g(t)^{-1}\dot{g}(t),$$

onde $t \mapsto g(t)^{-1}\dot{g}(t) \equiv \mathrm{d}_{g(t)}L_{g(t)^{-1}}\dot{g}(t)$ é uma curva na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A curva $u(t)$ é horizontal sse

$$g(t)^{-1}\dot{g}(t) = -\mathrm{Ad}(g(t)^{-1})\omega(\dot{v}(t)).$$

A proposição segue-se do lema seguinte, cuja demonstração deixamos como exercício:

Lema 25.12. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $t \mapsto X(t)$ é uma curva contínua em $\mathfrak{g}$, então existe uma única curva $g : I \to G$ de classe C^1, com $g(0) = e$, que satisfaz:*

$$g(t)^{-1}\dot{g}(t) = X(t), \quad (t \in I).$$

□

Assim, dada uma curva $c : I \to M$, podemos definir o **transporte paralelo** $\tau_t : P_{c(0)} \to P_{c(t)}$ por:

$$\tau_t(u_0) = u(t),$$

onde $u(t)$ é o único levantamento horizontal $u : I \to P$ de $c(t)$ tal que $u(0) = u_0$. Note que podemos definir o transporte paralelo ao longo de curvas seccionalmente C^1, fazendo o transporte paralelo sucessivamente ao longo das suas componentes de classe C^1.

O transporte paralelo é um isomorfismo das fibras, pois temos:

Proposição 25.13. *O transporte paralelo ao longo de uma curva $c : I \to M$ seccionalmente C^1 comuta com a acção de G:*

$$\tau_t \circ R_g = R_g \circ \tau_t, \quad \forall g \in G.$$

Temos, ainda, que:

(i) τ_1 é um isomorfismo com inverso o transporte paralelo ao longo da curva $\bar{c}(t) \equiv c(1-t)$.

(ii) Se c_1 e c_2 são curvas seccionalmente C^1 e $c_1(1) = c_2(0)$, então o transporte paralelo ao longo da concatenação $c_1 \cdot c_2$ é a composição dos transportes paralelos.

Demonstração. Para a primeira afirmação, basta observar que R_g leva curvas horizontais em curvas horizontais. O resto é óbvio. □

Assim, se Γ é uma conexão num G-fibrado principal $\xi = (\pi, P, M)$, podemos definir o **grupo de holonomia** de Γ com ponto base $p_0 \in M$, como sendo o conjunto dos isomorfismos $\tau_1 : P_{p_0} \to P_{p_0}$ obtidos por transporte paralelo ao longo de curvas $c : I \to M$ com $c(0) = c(1) = p_0$. Designamos este grupo por $\Phi(p_0)$.

Fixando um ponto $u_0 \in \pi^{-1}(p_0)$, obtemos um isomorfismo entre $\Phi(p_0)$ e o subgrupo

$$\Phi(u_0) = \{g \in G : \tau(u_0) = u_0 g \text{ para algum } \tau \in \Phi(p_0)\} \subset G.$$

Dados dois pontos $u_0, u_0' \in \pi^{-1}(p_0)$ existe um elemento $g_0 \in G$ tal que $u_0' = u_0 g_0$, donde $\Phi(u_0') = g_0 \Phi(u_0) g_0^{-1}$. Assim, os subgrupos $\Phi(u)$, para

$u \in \pi^{-1}(p_0)$, são todos conjugados. Pode-se, ainda, mostrar o seguinte resultado fundamental:

Teorema 25.14 (Ambrose-Singer)**.** *Seja Γ é uma conexão num G-fibrado principal $\xi = (\pi, P, M)$. Para qualquer $u \in P$, designe por $P(u) \subset P$ o conjunto dos $u' \in P$ que podem ser unidos a u por uma curva horizontal. O grupo de holonomia $\Phi(u)$ é um subgrupo de Lie de G, com álgebra de Lie:*

$$\{\Omega_{u'}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) : \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_{u'}, u' \in P(u)\} \subset \mathfrak{g}.$$

Seja $\xi = (\pi, P, M)$ um G-fibrado principal e $\rho : G \to GL(r)$ uma representação de G, de forma que temos uma acção linear de G em $\mathbb{R}^r$. O fibrado associado $\xi_{\mathbb{R}^r} = (\pi, E, M)$ é, pois, um fibrado vectorial. O transporte paralelo em ξ induz uma operação de transporte paralelo em $\xi_{\mathbb{R}^r}$ como passamos a explicar.

Se $c : I \to M$ é uma curva seccionalmente de classe C^1, um levantamento horizontal de $c(t)$ no fibrado associado é, por definição, uma curva $\mathbf{v}(t) \in E$ da forma:

$$\mathbf{v}(t) = [(u(t), \mathbf{v})] \in P \times_G \mathbb{R}^r \equiv E,$$

onde $u(t)$ é um levantamento de $c(t)$ em P. É fácil de ver que, para qualquer $\mathbf{v}_0 \in E_{c(0)}$, existe um único levantamento horizontal $\mathbf{v}(t)$ de $c(t)$ tal que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Pelo procedimento usual, obtemos o transporte paralelo ao longo de $c(t)$, agora, no fibrado associado: $\tau_t : E_{c(0)} \to E_{c(1)}$.

Seja s um secção do fibrado associado. Se $\mathbf{v} \in T_pM$ seja $c : I \to M$ uma curva de classe C^1 tal que $c(0) = p$ e $\dot{c}(0) = \mathbf{v}$. Definimos a derivada covariante $\nabla_{\mathbf{v}} s$ de s na direcção de $\mathbf{v}$ por:

$$\nabla_{\mathbf{v}} s \equiv \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\tau_t^{-1}(s(c(t)) - s(p)\right] \in E_p.$$

Se $X \in \mathfrak{X}(M)$ é um campo vectorial, então definimos a derivada covariante duma secção s ao longo de X, como sendo a secção dada por:

$$(\nabla_X s)(p) \equiv \nabla_{X_p} s.$$

Como não poderia deixar de ser, temos:

Proposição 25.15. *A derivada covariante $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ associada à conexão Γ em ξ define uma conexão ∇ no fibrado vectorial associado $\xi_{\mathbb{R}^r}$. Reciprocamente, toda a conexão ∇ no fibrado vectorial associado $\xi_{\mathbb{R}^r}$ define uma conexão Γ no fibrado principal ξ. Estas correspondências são inversas uma da outra.*

A correspondência entre conexões num fibrado principal e no fibrado vectorial associado, sugere que a teoria de classes características para fibrados vectoriais, que estudámos na Lição anterior, deve-se generalizar a fibrados principais. De facto, se Γ é uma conexão num G-fibrado principal $\xi = (\pi, P, M)$, então definimos o **homomorfismo de Chern-Weil**

$$I^k(G) \to H^{2k}(M), \; P \mapsto [P(\Omega^k)],$$

de forma análoga ao que fizemos no caso de fibrados vectoriais. Mais uma vez, este homomorfismo é independente da conexão e pode, então, ser utilizado para construir classes características.

Por exemplo, se ξ é um fibrados principal com grupo de estrutura $GL(r,\mathbb{R})$ as **classes de Pontrjagin** de ξ obtêm-se tomando os polinómios simétricos elementares:

$$p_k(\xi) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{2k}}[\sigma_{2k}(\Omega^{2k})] \in H^{4k}(M).$$

De igual forma, se ξ é um fibrados principal com grupo de estrutura $GL(r,\mathbb{C})$ as **classes de Chern** de ξ obtém-se tomando

$$c_k(\xi) \equiv \frac{1}{(2i\pi)^{k}}[\sigma_{k}(\Omega^{k})] \in H^{2k}(M).$$

Na verdade, esta é a *abordagem geométrica* às classes características. Existe também uma *abordagem topológica*, que recorre à classificação de fibrados principais. Para um grupo de Lie G, definem-se, primeiro, certas classes de cohomologia naturais no espaço classificante B_G, e que correspondem a *classes características universais* do fibrado classificante $E_G \to B_G$. Para um fibrado principal $\xi = (\pi, P, M)$ com grupo de estrutura G, definem-se as classes características tomando os pull-backs pela aplicação classificante $\psi : M \to B_G$ das classes características do espaço classificante. Isto permite precisar as classes características, pois elas são agora classes nos grupos abelianos $H^\bullet(M,\mathbb{Z})$, em vez de classes nos espaços vectoriais $H^\bullet(M)$ (i.e., podem ter torção).

Exercícios.

1. Seja G um grupo de Lie compacto, não trivial. Mostre que não existe uma variedade (de dimensão finita) contráctil, com uma acção livre de G.

2. Seja $G = \mathbb{S}^1$. Mostre que $E_G = \mathbb{S}^\infty$ e que $B_G = \mathbb{CP}^\infty$.

3. Seja Γ uma conexão num G-fibrado principal $\xi = (\pi, P, M)$, com 2-forma de curvatura $\Omega \in \Omega^2(P;\mathfrak{g})$. Para toda a secção $s : U \to P$, definida num aberto $U \subset M$, mostre que:
$$(s^*\Omega)(X,Y)^* = [\widetilde{X},\widetilde{Y}] - \widetilde{[X,Y]}.$$

4. Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $t \mapsto X(t)$ é uma curva contínua em $\mathfrak{g}$, mostre que existe uma única curva $g : I \to G$ de classe C^1, com $g(0) = e$, que satisfaz:
$$g(t)^{-1}\dot{g}(t) = X(t), \quad (t \in [0,1]).$$

5. Demonstre a correspondência entre conexões em fibrados vectoriais e conexões em fibrados principais dada pela Proposição 25.15.

6. Forneça os detalhes da construção do homomorfismo de Chern-Weil no caso dos fibrados principais.

Bibliografia

- B. Doubrovin, A. Fomenko e S. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications* (3 vols.), Springer-Verlag.

- R. Bott e L. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag.

- M. Hirsch, *Differentiable Topology*, Graduate Texts in Mathematics 33, Springer-Verlag, New York-Berlin.

- S. Kobayashi e K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, (2 vols.), John Wiley & Sons.

- M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. I & II, Publish or Perish, Inc., Wilmington.

- F. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics 94, Springer-Verlag, New York-Berlin.