Geometria Diferencial

Ficha Extra - Conexões em Fibrados Principais

Não precisam de entregar esta ficha

Seja $\xi = (\pi, E, M)$ um fibrado vectorial de rank r. Dado um referencial local $\{s_1, \ldots, s_r\}$ num aberto trivializante $U \subset M$, podemos parametrizar todas as bases $\{v_1, \ldots, v_r\}$ de fibras E_p sobre pontos $p \in U$ mediante

$$\phi(v_1, \ldots, v_r) = (p, B) \in U \times GL(r),$$

onde $B \in GL(r)$ é a matriz de mudança de base de $s(p)$ para $\{v_1, \ldots, v_r\}$. Portanto o conjunto F de todas as bases de E é uma variedade diferenciável com uma projecção natural $\pi : F \to M$ e com trivializações locais $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times GL(r)$. Ao terno $\Xi = (\pi, F, M)$ chamamos o **fibrado dos referenciais** de ξ; note que o referencial local $\{s_1, \ldots, s_r\}$ pode ser visto como uma secção local $s : U \to F$. Uma vez que as fibras F_p são isomorfas ao grupo de Lie $GL(r)$, Ξ diz-se um **fibrado principal**.

1. Mostre que a matriz $B' \in GL(r)$ que representa uma dada base de E_p num outro referencial s' se relaciona com a matriz $B \in GL(r)$ que representa essa base em s mediante $B' = S^{-1}B$, onde $S : U \to GL(r)$ é a matriz de mudança de base de s para s'. Conclua que ξ e Ξ são determinados pelo mesmo cociclo.

2. Em $\pi^{-1}(U)$ definimos a matriz de 1-formas

$$\tilde{\omega} = B^{-1} (\pi^* \omega) B + B^{-1} dB,$$

   onde ω é a matriz das formas de conexão associada ao referencial s. Mostre que $\tilde{\omega}$ não depende da escolha do referencial s, e portanto está globalmente definida em F. Mostre ainda que $\omega = s^* \tilde{\omega}$.

3. Em $\pi^{-1}(U)$ definimos a matriz de 2-formas

$$\tilde{\Omega} = B^{-1} (\pi^* \Omega) B,$$

   onde Ω é a matriz das formas de curvatura associada ao referencial s. Mostre que $\tilde{\Omega}$ não depende da escolha do referencial s, e portanto está globalmente definida em F. Mostre ainda que $\Omega = s^* \tilde{\Omega}$.

4. Mostre que

$$\tilde{\Omega} = d\tilde{\omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = d\tilde{\omega} + \frac{1}{2}[\tilde{\omega}, \tilde{\omega}]$$

   e que

$$d\tilde{\Omega} + \tilde{\omega} \wedge \tilde{\Omega} - \tilde{\Omega} \wedge \tilde{\omega} = 0 \Leftrightarrow d\tilde{\Omega} + [\tilde{\omega}, \tilde{\Omega}] = 0.$$

5. Mostre que os núcleo das 1-formas da matriz $\tilde{\omega}$ definem uma distribuição H de dimensão d em F, e que as curvas em F tangentes a H correspondem a referenciais paralelamente transportados ao longo da projecção da curva em M. Mostre ainda que H é integrável *sse* a conexão ∇ é plana.

6. Mostre que $GL(r)$ age à direita em F, que a acção é livre e que $F/G = M$. Mostre ainda que se $\Psi(S) : F \to F$ é a acção de $S \in GL(r)$ então $\Psi(S)^*\tilde{\omega} = S^{-1}\tilde{\omega}S = \mathrm{Ad}(S^{-1})\tilde{\omega}$, e que se $\psi(A) \in \mathfrak{X}(F)$ é a acção infinitesimal de $X \in \mathfrak{gl}(r)$ então $\tilde{\omega}(\psi(A)) = A$.

7. Qualquer vector $X \in T_uF$ pode ser decomposto de forma única na soma $X = X^h + X^v$, onde $X^h \in H_u$ e $X^v \in \ker d_u\pi$. Se $\theta \in \Omega^k(F, \mathfrak{gl}(r))$, definimos a **derivada exterior covariante** $D\theta \in \Omega^{k+1}(F, \mathfrak{gl}(r))$ mediante

$$D\theta(X_1, \ldots, X_{k+1}) = d\theta(X_1^h, \ldots, X_{k+1}^h).$$

Mostre que

$$D\tilde{\omega} = \tilde{\Omega}$$

e que

$$D\tilde{\Omega} = 0.$$