Cálculo Diferencial e Integral II

Exercício de Aplicação 6 - Mecânica de Fluidos

Um **fluido** é descrito pela sua **densidade** $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e pelo seu **campo de velocidades** $\mathbf{v} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, que assumiremos serem funções de classe C^∞: $\rho(t, \mathbf{x})$ e $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ representam a densidade e a velocidade do fluido que ocupa a posição $\mathbf{x}$ no instante t.

1. Demonstre o **Lema da Localização**: a única função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que
$$\int_B f = 0$$
para qualquer bola $B \subset \mathbb{R}^n$ é a função identicamente nula.

2. Se $A \subset \mathbb{R}^3$ é um domínio regular, a massa total do fluido contido em A no instante t é
$$M(t) = \iiint_A \rho$$
e portanto para haver conservação da massa devemos ter
$$\frac{dM}{dt} = -\oiint_{\partial A} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$$
(onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior). Use este facto e o Lema da Localização para mostrar que ρ e $\mathbf{v}$ devem satisfazer a **equação da continuidade**,
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0.$$

3. A trajectória de cada partícula de fluido é dada por um caminho $\mathbf{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ satisfazendo
$$\frac{d\mathbf{g}}{dt}(t) = \mathbf{v}\left(t, \mathbf{g}(t)\right).$$
Mostre que se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável então
$$\frac{d}{dt}\left[f(t, \mathbf{g}(t)\right] = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{g}(t)) + \partial_{\mathbf{v}} f(t, \mathbf{g}(t)).$$
Define-se a **derivada convectiva** de f como sendo a função
$$\frac{Df}{dt}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \mathbf{x}) + \partial_{\mathbf{v}} f(t, \mathbf{x}),$$
que exprime a derivada de f ao longo da trajectória da partícula de fluido que ocupa a posição $\mathbf{x}$ no instante t.

4. A **pressão** do fluido é um campo escalar $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que a força exercida sobre a variedade-3 com bordo $A \subset \mathbb{R}^3$ pelo fluido circundante é

$$\mathbf{F} = -\oiint_{\partial A} p\mathbf{n},$$

onde $\mathbf{n}$ é a normal unitária exterior (o integral de um campo vectorial é o vector dos integrais das suas componentes). Use o Teorema da Divergência para mostrar que

$$\mathbf{F} = -\iiint_A \nabla p.$$

5. Use as duas alíneas precedentes e o Lema da Localização para mostrar que a Segunda Lei de Newton

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

aplicada a uma região arbitrária de fluido actuado unicamente por forças de pressão[1] implica a **equação de Euler**

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p.$$

Supomos deste ponto em diante que o fluido é **incompressível**, ou seja, que a sua densidade ρ é constante no espaço e no tempo. Note que em particular a equação da continuidade se reduz à condição de que o campo de velocidades tenha divergência nula,

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

---

6. Define-se a **vorticidade** do fluido como sendo a função $\boldsymbol{\omega} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}.$$

Mostre que a equação de Euler se pode reescrever como

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \right).$$

7. Mostre que a vorticidade satisfaz a equação

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\partial_{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{v}.$$

[1] Na prática qualquer força cuja densidade volumétrica seja um gradiente (como por exemplo a força gravitacional) pode ser incluida no termo de pressão.

8. Prove o **Teorema de Bernoulli:** se o escoamento é **estacionário**, i.e. se

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

então

$$\partial_{\mathbf{v}} \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + p \right) = 0.$$

9. Considere o escoamento estacionário **linear** dado por $\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$, i.e., por

$$v_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j,$$

onde $A = (a_{ij})$ é uma matriz constante. Mostre que a equação da continuidade é equivalente a $\operatorname{tr} A = 0$, e que a equação de Euler é equivalente a exigir que A^2 seja simétrica.

10. Seja $\mathbb{A}$ o espaço das matrizes 3×3 anti-simétricas. Mostre que existe um isomorfismo linear $I : \mathbb{A} \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\Omega \cdot \mathbf{x} = I(\Omega) \times \mathbf{x}$$

para todo o $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

11. Escreva $A = \Sigma + \Omega$, onde Σ e Ω são respectivamente as partes simétrica e anti-simétrica de A. Mostre que

$$\boldsymbol{\omega} = 2I(\Omega).$$

Mostre ainda que se $\Sigma = 0$ o movimento do fluido é de rotação uniforme com velocidade angular $\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}$, e que se $\Omega = 0$ o movimento do fluido é simplesmente um movimento de expansão/contracção ao longo das direcções dos vectores próprios de Σ.

12. Prove o **Teorema de Kelvin**: se $C(t)$ é uma curva fechada cujos pontos seguem trajectórias de partículas do fluido, então

$$\frac{d}{dt} \oint_{C(t)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C(t)} \frac{D\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Conclua que se o fluido provém de uma região onde o escoamento é **irrotacional** (i.e., onde a vorticidade é zero) então o escoamento será irrotacional em todo o espaço.

13. Mostre que qualquer campo vectorial $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ satisfazendo $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ é uma solução da equação de Euler.

14. Use a alínea anterior para determinar escoamentos não triviais com simetria cilíndrica e com simetria esférica. O que pode dizer sobre qualquer combinação linear das soluções que determinou?