Cálculo Diferencial e Integral II

Exercício de Aplicação 1 - Corpo Rígido

O **grupo das rotações** é o conjunto

$$SO(3) = \{S \in M_3(\mathbb{R}) : S^t S = I, \det S = 1\}$$

formado pelas matrizes 3×3 ortogonais de determinante 1, e a sua **álgebra de Lie** é o conjunto

$$\mathfrak{so}(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$$

formado pelas matrizes 3×3 anti-simétricas. Um **corpo rígido com um ponto fixo**[1] pode ser modelado como um conjunto mensurável C (**configuração de referência**) no qual está definida uma função integrável $\rho : C \to \mathbb{R}^+$ (**função densidade de massa**). O movimento do corpo em torno do ponto fixo (a origem) é dado por um caminho diferenciável $S : \mathbb{R} \to SO(3)$, de forma que cada ponto $\boldsymbol{\xi} \in C$ descreve um caminho $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{x}(t) = S(t)\boldsymbol{\xi}$.

1. Mostre que
$$\dot{S}(t) = S(t)A(t)$$
onde $A(t) \in \mathfrak{so}(3)$.

2. Mostre que existe uma aplicação linear bijectiva $\mathbf{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \to \mathbb{R}^3$ tal que
$$A\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Omega}(A) \times \boldsymbol{\xi}$$
para todo o $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}(3)$, onde $\times$ designa o produto externo.

3. Se $S \in SO(3)$ então $S(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) = (S\boldsymbol{\alpha}) \times (S\boldsymbol{\beta})$. Use este facto para mostrar que a velocidade do ponto $\boldsymbol{\xi} \in C$ é dada por
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{x}(t)$$
onde
$$\boldsymbol{\omega}(t) = S(t)\mathbf{\Omega}(t)$$
e
$$\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{\Omega}(A(t))$$
($\boldsymbol{\omega}$ diz-se a **velocidade angular instantânea** do corpo rígido; $\mathbf{\Omega}$ é a velocidade angular instantânea vista na configuração de referência – Figura 1).

4. O **momento angular** do corpo rígido é
$$\mathbf{p}(t) = \int_C \left[(S(t)\boldsymbol{\xi}) \times (\dot{S}(t)\boldsymbol{\xi})\right] \rho(\boldsymbol{\xi}) dV_3(\boldsymbol{\xi}).$$

[1] A restrição de existir um ponto fixo não é importante, uma vez que o movimento de um corpo rígido pode sempre ser decomposto num movimento de translacção do centro de massa e um movimento de rotação em torno do centro de massa.

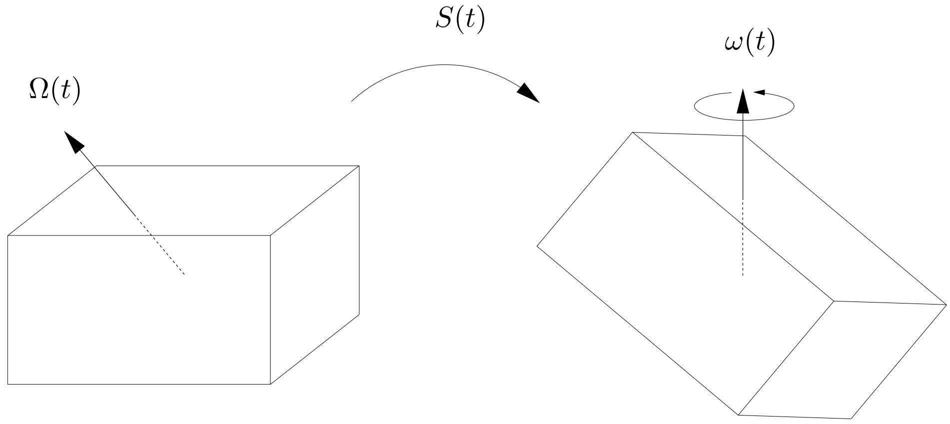

Figura 1: Velocidades angulares.

Mostre que

$$\mathbf{p}(t) = S(t)\mathbf{P}(t)$$

onde

$$\mathbf{P}(t) = \int_C [\boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{\xi})]\rho(\boldsymbol{\xi})dV_3(\boldsymbol{\xi}).$$

5. O **tensor de inércia** do corpo rígido é o operador $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$I(\mathbf{v}) = \int_C [\boldsymbol{\xi} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\xi})]\rho(\boldsymbol{\xi})dV_3(\boldsymbol{\xi})$$

(portanto $\mathbf{P} = I\boldsymbol{\Omega}$). Mostre que na base canónica o tensor de inércia admite a representação matricial

$$I = \begin{pmatrix} \int_C \rho(y^2+z^2) & -\int_C \rho xy & -\int_C \rho xz \\ -\int_C \rho xy & \int_C \rho(x^2+z^2) & -\int_C \rho yz \\ -\int_C \rho xz & -\int_C \rho yz & \int_C \rho(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Portanto o operador de inércia é simétrico. Conclua que existe uma base ortonormada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ na qual I admite a representação $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Os eixos $\mathbb{R}\mathbf{e}_1$, $\mathbb{R}\mathbf{e}_2$, $\mathbb{R}\mathbf{e}_3$ dizem-se os **eixos principais de inércia** e os valores próprios I_1, I_2, I_3 os **momentos principais de inércia** do corpo rígido. Qual a expressão dos momentos principais de inércia na base dos eixos principais de inércia? Mostre que $I_1 < I_2 + I_3$ (e desigualdades semelhantes para I_2, I_3; portanto os momentos principais de inércia satisfazem as mesmas desigualdades que os comprimentos dos lados de um triângulo).

6. Mostre que cada uma das condições de simetria seguintes garante que o eixo dos zz é um eixo principal de inércia:

   (a) **Simetria em relação ao eixo dos zz:**
   $(x, y, z) \in C$ **sse** $(-x, -y, z) \in C$ e $\rho(x, y, z) = \rho(-x, -y, z)$.

   (b) **Simetria em relação ao plano $z = 0$:**
   $(x, y, z) \in C$ **sse** $(x, y, -z) \in C$ e $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z)$.

7. Se o momento das forças exteriores é nulo, o vector momento angular é constante. Mostre que nesse caso valem as **equações de Euler**

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \times \mathbf{\Omega}.$$

Mostre que as quantidades

$$K = \frac{1}{2}\mathbf{P} \cdot \mathbf{\Omega}$$

e

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$$

são conservadas ao longo das soluções destas equações.

8. Escreva as equações de Euler e as quantidades conservadas na base dos eixos principais de inércia. Mostre que as equações de Euler admitem como soluções rotações em torno de cada um dos eixos principais de inércia com velocidade angular constante. Mostre ainda que se $I_1 > I_2 > I_3$ as rotações em torno de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ são estáveis, enquanto que a rotação em torno de $\mathbf{e}_2$ é instável.

Sugestão: Note que as soluções das equações de Euler descrevem curvas em $\mathbb{R}^3$ que são a intersecção de esferas com elipsóides – Figura 1.

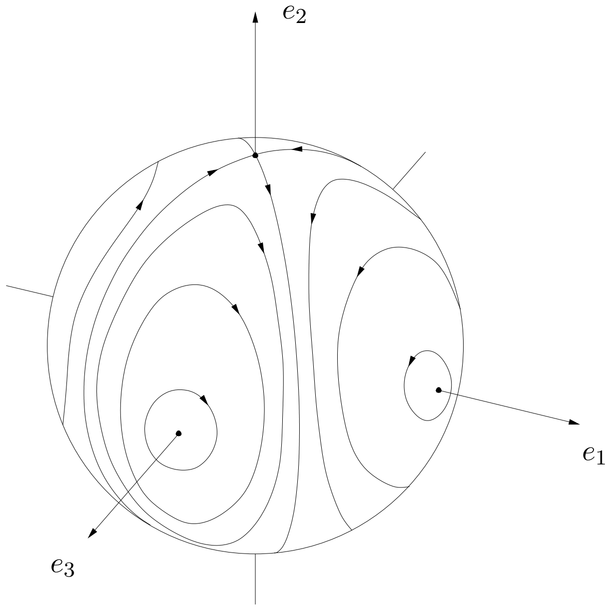

Figura 2: Soluções das equações de Euler.