Cálculo Diferencial e Integral II

Exercício Teórico 5

O **paralelepípedo**-k gerado pelos vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto

$$P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \{t_1\mathbf{v}_1 + \ldots + t_k\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n : t_1, \ldots, t_k \in [0,1]\}.$$

1. Mostre que o paralelepípedo-n gerado por $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ é mensurável e

$$V_n(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)) = |\det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)|.$$

2. O **volume**-k de $P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \subset \mathbb{R}^n$ define-se do seguinte modo: o plano coordenado

$$\pi_k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = \ldots = x_n = 0\}$$

pode ser identificado com $\mathbb{R}^k$ de forma natural. Se A é uma matriz ortogonal tal que $A \cdot P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \subset \pi_k$, definimos

$$V_k(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)) = V_k(A \cdot P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)),$$

onde o lado direito da igualdade está bem definido devido à identificação de π_k com $\mathbb{R}^k$. Mostre que

$$V_k(P(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)) = (\det G)^{\frac{1}{2}},$$

onde G é a matriz $k \times k$ definida por

$$g_{ij} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$$

(portanto o volume-k não depende da escolha de A).