Cálculo Diferencial e Integral II

Exercício Teórico 2

1. Prove o **Lema de Schwarz:** Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange duas vezes na expressão

$$\Delta(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) + f(0,0).$$

2. Prove o **Teorema de Taylor:** Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^3 então

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}\mathbf{h}^t \cdot Hf(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + R_2(\mathbf{a};\mathbf{h})$$

onde $Hf(\mathbf{a})$ é a matriz Hessiana e

$$R_2(\mathbf{a};\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|^2).$$

Sugestão: Fixe $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ com $\|\mathbf{v}\| = 1$ e aplique o Teorema de Taylor com resto de Lagrange à função $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$.