Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

Ficha de Trabalho 2

1. Determine se existem os limites das seguintes sucessões e em caso afirmativo calcule-os:

$$\text{(i) } \lim \frac{i^n}{n}; \quad \text{(ii) } \lim \frac{n+2i}{7+3ni}; \quad \text{(iii) } \lim \frac{1}{(2+3i)^n};$$

$$\text{(iv) } \lim \frac{n}{n+i}; \quad \text{(v) } \lim \frac{\operatorname{sen} ni}{n}; \quad \text{(vi) } \lim e^{in}.$$

2. Esboce os conjuntos determinados pelas equações dadas e indique se são ou não abertos:
   (i) $(1-2i)z+(1+2i)\overline{z}-2=0$;
   (ii) $|z| \leq \operatorname{Re}(z)+2$;
   (iii) $\operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z-1}\right)=0$;
   (iv) $|z|^2-(1-i)z-(1+i)\overline{z}+1=0$.

3. Escreva os seguintes números complexos na forma $a+bi$:

$$\text{(i) } e^{2+i}; \quad \text{(ii) } \cos(2+3i); \quad \text{(iii) } \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} i.$$

4. Determine a parte real e imaginária de cada uma das seguintes funções:

$$\text{(i) } \overline{z}+iz^2; \quad \text{(ii) } \frac{\overline{z}}{z}; \quad \text{(iii) } z \operatorname{sen} z.$$

5. Estabeleça as seguintes identidades, onde $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\text{(i) } \cos(iz)=\operatorname{ch}(z); \quad \text{(ii) } \operatorname{sen}(iz)=i\operatorname{sh}(z); \quad \text{(iii) } \cos^2 z+\operatorname{sen}^2 z=1;$$

$$\text{(iv) } \operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1; \quad \text{(v) } \operatorname{sen}(z+w)=\operatorname{sen} z\cos w+\cos z \operatorname{sen} w.$$

6. Calcule os conjuntos de números complexos determinados pelas seguintes expressões:

$$\text{(i) } \log(-e); \quad \text{(ii) } \log(-i); \quad \text{(iii) } \log\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right);$$

$$\text{(iv) } 2^{-i}; \quad \text{(v) } i^i; \quad \text{(vi) } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}.$$

7. Resolva as seguintes equações:

$$\text{(i) } e^z = -1; \quad \text{(ii) } \log(i - z) = \left(2 + \frac{i}{2}\right)\pi; \quad \text{(iii) } \operatorname{sen} z = 3i;$$

$$\text{(iv) } (z^4 - 1)\operatorname{sen}(\pi z) = 0; \quad \text{(v) } \operatorname{ch}^2 z = 0; \quad \text{(vi) } \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{z}\right) = 0; \quad \text{(vii) } 1 + e^{z^2} = 0.$$

8. Determine se as seguintes funções são contínuas na origem:

   (a) $f(z) = \frac{z^2+3}{z^3-4}$.

   (b) $f(z) = \begin{cases} \frac{z \operatorname{sen} z}{|z|} & \text{se } z \neq 0, \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$

   (c) $f(z) = \begin{cases} z e^{\frac{1}{z}} & \text{se } z \neq 0, \\ 0 & \text{se } z = 0. \end{cases}$

9. Calcule a imagem pelas funções indicadas dos seguintes conjuntos do plano complexo:

   (a) $f(z) = z^2, \quad S = \{z \in \mathbb{C} \colon \arg(z) = \frac{\pi}{6}\}$.

   (b) $f(z) = \frac{1}{z-i}, \quad S = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - i| = 2\}$.

   (c) $f(z) = e^{2z}, \quad S = \{z \in \mathbb{C} \colon 0 < \operatorname{Re}(z) \leq 1, \frac{\pi}{3} \leq \operatorname{Im}(z) \leq \frac{2\pi}{3}\}$.

   (d) $f(z) = \log(z), \quad S = \{z \in \mathbb{C} \colon 2 < |z| < e, \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{7\pi}{4}$ onde $\log$ denota o valor principal do logaritmo.

   (e) $f(z) = \frac{1}{z}, \quad S = \{z \in \mathbb{C} \colon z + \overline{z} = 2\}$.

   (f) $f(z) = \operatorname{ch} z, \quad S = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) = 1\}$.