6ª Aula Prática

1) Considere o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x^2 + y^2 < b\}$$

onde $a, b \in [-\infty, +\infty]$.

a) Determine valores dos parâmetros a e b de forma a que o conjunto A seja

i) aberto, mas não fechado,

ii) fechado, mas não aberto,

iii) nem aberto nem fechado,

iv) aberto e fechado.

b) Para que valores dos parâmetros a e b, o conjunto A é limitado?

2) Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < 1 - x^2\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\} \end{aligned}$$

a) Esboçe no plano os conjuntos B e C.

b) Justifique quais das seguintes afirmações são verdadeiras

i) B é aberto e C é fechado.

ii) B e C são conjuntos limitados.

iii) A fronteira de C é o próprio conjunto C.

iv) $B \backslash C$ é um conjunto conexo.

v) A união das fronteiras de B e C é um conjunto conexo.

3) Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$D = \big\{(x, y) : xy > 1\big\}$$

a) Represente-o graficamente e diga se é aberto, fechado ou limitado. Identifique a sua fronteira.

b) Dê um exemplo de uma sucessão de termos em D que convirja para um ponto não pertencente a D.

4) Considere a função $g : D \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = (\sqrt{1 - x^2 - y^2})^{-1}$ no domínio D desta expressão.

a) Determine o domínio D e represente-o geometricamente. Diga se é um conjunto limitado, e justifique.

b) Identifique as linhas de nível da função g e represente-as graficamente.

c) Verifique se a função g é limitada.

d) Calcule o contradomínio de g.

e) Mostre que o conjunto D é aberto.

5) Repita o exercício anterior, com $g(x, y) = \log |y - x^2|$.

6) Considere a função f definida por

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$$

no conjunto D em que a expressão do 2º membro faz sentido.

a) Determine e represente graficamente o domínio de f.

b) Determine as linhas de nível de f e esboce-as graficamente.

c) Determine o contradomínio de f.

7ª Aula Prática

1) Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por:

$$D = \{(x, y) : xy > 0\}$$
$$f(x, y) = x \log(xy)$$

a) Interprete geometricamente o domínio D e determine o seu interior, exterior e fronteira. Diga se D é aberto, fechado, limitado. (Justifique a resposta.)

b) A função f é contínua no seu domínio? Justifique a resposta.

c) Mostre que para qualquer semi-recta S com origem no ponto $(0, 0)$ e contida em D o limite

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x, y)$$

existe e não depende de S.

d) Sendo $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{-1/x^2}\}$, calcule, se existir, o limite:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E}} f(x, y)$$

e) Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$? Justifique a resposta.

2) Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy - 1}} ,$$

onde $D = \{(x, y) : xy > 1)$.

a) Interprete geometricamente o domínio.

b) Justifique que f é contínua em D.

c) Existe algum ponto fronteiro a D ao qual f seja prolongável por continuidade?

d) Indique o contradomínio de f.

3) Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ a função dada por:

$$f(x, y) = 1 + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Calcule, se existir, o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

4) Repita o exercício anterior, com a função

$$f(x,y) = 1 + xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ .$$

5) Calcule (ou mostre que não existe) cada um dos seguintes limites:

a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{x - 2y}$

b) $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,1,1)} \frac{y^2}{x}\,(z+1)\operatorname{sen} 3x$

6) Calcule, se existirem, os seguintes limites:

a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$

b) $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$

c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(1 + \frac{x^2 - 2x - y^2 + 4y - 3}{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right)$

8ª Aula Prática

1) Considere a função $f : D \to \mathbb{R}^2$ definida pela expressão

$$f(x,y) = \left(\log(4 - x^2 - y^2), \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

no domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4\}$.

a) Represente geometricamente o conjunto D, e diga se é aberto, fechado ou limitado.

b) Mostre que f não é prolongável por continuidade a nenhum ponto fronteiro a D.

2) Verifique se a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida pela expressão

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

3) Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\,\text{sen}\,\dfrac{x^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^2$.

4) Estude quanto à continuidade a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x^2 + y^2 < 2y \\ |x| & \text{se } x^2 + y^2 = 2y \\ y^2 & \text{se } x^2 + y^2 > 2y \end{cases}$$

5) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estude a função f quanto à continuidade.

6) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{3x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estude a função f quanto à continuidade.