Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Geometria II

Repescagem do 2º Teste - 17 de Junho de 2004 - 10h

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Seja (M,g) a variedade Riemanniana definida por $M=\mathbb{R}^2$ e

$$g = dr\otimes dr + \operatorname{senh}^2 r d\theta\otimes d\theta,$$

onde (r,θ) são as habituais coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$.

(3 val.) (a) Calcule as formas de conexão associadas ao co-referencial ortonormado

$$\omega^1 = dr;$$
$$\omega^2 = \operatorname{senh} r d\theta.$$

(3 val.) (b) Mostre que todas as linhas rectas passando pela origem são (imagens de) geodésicas.

(3 val.) (c) Mostre que (M,g) possui curvatura de Gauss $K=-1$

(2 val.) (d) Prove que (M,g) é geodesicamente completa, e identifique-a.

(3 val.) (e) Seja $C=\{r_0<r<r_1\}\subset M$ uma coroa circular. Mostre que não existe nenhum mergulho isométrico $f: C\to\mathbb{R}^3$ da forma

$$f(r,\theta) = (\rho(r)\cos\theta, \rho(r)\operatorname{sen}\theta, z(r)).$$

2. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana de dimensão 2, e $\Delta\subset M$ um **triângulo geodésico**, i.e., um aberto homeomorfo a um disco cuja fronteira está contida na união das imagens de três geodésicas. Sejam α,β,γ os ângulos internos de Δ, i.e., os ângulos entre as geodésicas nos pontos de intersecção contidos na fronteira de Δ. Prove que se Δ é suficientemente pequeno se tem

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi + \int_\Delta K,$$

onde K é a curvatura de Gauss de M, usando:

(3 val.) (a) O facto de que $\int_\Delta K$ é igual ao ângulo pelo qual roda um vector transportado paralelamente uma vez ao longo de $\partial\Delta$.

(3 val.) (b) O teorema de Gauss-Bonnet para variedades com bordo.